NOUVEAUX MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE

DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES.

ANNÉE MDCCLXXII.

AVEC L'HISTOIRE POUR LA MÊME ANNÉE.



A BERLIN.

CHEZ CHRÉTIEN FRÉDERIC VOSS.

MDCCLXXIV.

HISTOIRE

DE

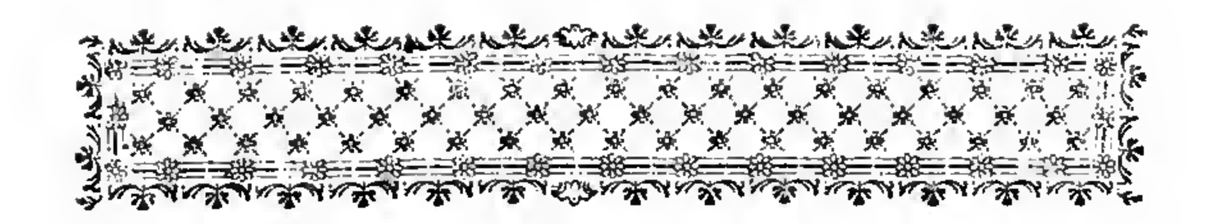
L'ACADÉMIE ROYALE

DES

SCIENCES

ET

BELLES-LETTRES.



HISTOIRE
DE L'ACADÉMIE.

MDCCLXXII.

ASSEMBLÉES PUBLIQUES OU EXTRAORDINAIRES.

Quoique l'Académie ait eu plusieurs journées intéressantes & brillantes, il n'y en a point qui ait égalé celle du Lundi 27 Janvier. L'usage de célébrer l'anniversaire de la naissance du Roi dans l'assemblée du Jeudi 24, si le cas y échet, ou du Jeudi suivant, fut changé, à la requisition de S. M. la Reine Douairiere de Suede, Sœur du Roi, qui se trouvoit alors à Berlin, & qui fixa le Lundi pour cette solemnité. On fit les préparatifs convenables pour une semblable fête académique; & le Lundi, vers les quatre heures, S. M. vint accompagnée de S. A. R. la Princesse sa fille, de LL. AA. RR. le Prince & la Princesse de Prusse, la Princesse HENRI, la Princesse FERDINAND, la Princesse AMÉLIE, Abbesse de Quedlimbourg, la Princesse PHILIPPINE, à présent Landgrave de Hesse-Cassel, le Margrave HENRI, & de LL. AA. SS. le Prince FRÉDERIC de Brunswick & la Princesse son Épouse. Ces augustes Personnes étoient suivies des Cavaliers & des Dames de leurs Cours; & il y avoit outre cela un très grand nombre de personnes de la premiere distinction, tant de la ville & du pays qu'étrangeres.

Quand la Reine eut pris place, le Sécretaire perpétuel lui adressa la parole en ces termes.

MADAME,

Pourrions-nous méconnoître dans ce moment le prix de la ſenſibilité? (*) *Pourrions-nous ne pas nous féliciter de la poſſéder, d'en éprouver les effets, portés à leur plus haut degré? Quelle vue plus propre à exciter en nous l'admiration & le reſpect, la tendreſſe & l'amour, que celle de l'auguſte* LOUISE ULRIQUE, *Fille, Femme, Mere, Sœur de Rois, de qui Elle tire un éclat qu'Elle leur a bien rendu par toutes les qualités qui La diſtinguent autant du vulgaire des Reines, ſi j'oſe m'exprimer ainſi, que les* FRÉDERIC *& les* GUSTAVE *ſont au-deſſus de ces Rois, qui ne ſervent qu'à lier le fil de la Chronologie. Oui,* MADAME, *l'hommage que nous offrons à V. M. nous l'offririons en apparence à toute autre Reine; mais ce n'eſt qu'à Vous, à Votre auguſte Perſonne, qu'une Société de Philoſophes peut payer ce tribut que n'obtiendront jamais de nous les titres & les grandeurs, & que nous réſervons uniquement aux lumieres & aux vertus. Votre Couronne diſparoîtroit à nos yeux, ſi nous n'appercevions le laurier de l'immortalité qui l'entrelace. Nos faſtes conſerveront le ſouvenir de cette journée, en y gravant que* Minerve *a préſidé à l'Académie dont* Apollon *eſt le Protecteur.* (**)

Que ce ſpectacle, MADAME, *doit être intéreſſant, & ſi je l'oſe dire, attendriſſant pour V. M! Avec quelle complaiſance ne devez-vous pas regarder ce ſanctuaire conſacré aux Muſes par* FRÉDERIC*! C'eſt ici où, en nous efforçant de Lui plaire par notre application à la recherche de la vérité, nous travaillons à tranſmettre aux ſiecles à venir la gloire de ſon Regne. C'eſt ici où nous comptons nos jours par ſes bienfaits, où nous ne ceſſons de demander au Ciel la conſervation du Mortel le plus digne de vivre, du Monarque le plus digne de régner. Vous joignez ſans doute,* MADAME, *Vos vœux aux nôtres; & ils augmenteront puiſſamment leur*

(*) Cette idée étoit priſe de quelques converſations précédentes, dans lesquelles la Reine avoit mis en queſtion s'il étoit avantageux d'avoir une grande ſenſibilité, & s'il n'en réſultoit pas plus de peines que de plaiſirs.

(**) Le Sécretaire & les Académiciens ſe tinrent debout pendant cet exorde; après quoi ils s'aſſirent.

*efficace dans cette Fête, toujours solemnelle pour nous, mais que la présence de V. M. rend aujourd'hui si éclatante. FRÉDERIC accomplit son douzieme lustre. Vainqueur de tant de dangers qui ont menacé sa Personne sacrée, que ne peut-il l'être du Temps, à la voracité duquel rien n'échappe! Ah! qu'il atteigne au moins la fin d'un siecle dont il est le Héros! Mais non; ne formons point de vœux indiscrets. Le suprême Arbitre des événemens lit au fond de nos cœurs; il entend nos requêtes; il les a exaucées dans les conjonctures les plus critiques; il laissera encore à la Terre son plus bel ornement, à l'État sa Divinité tutelaire, à l'Académie son Chef & son Modele. Ses Oracles (*) qui vont tout à l'heure se faire entendre au milieu de nous, frapperont encore plus d'une fois nos oreilles, pénétreront encore plus d'une fois nos cœurs dans les années qui succéderont à celle-ci, dans ces années qui de l'*Achille* des Guerriers feront le *Nestor* des Rois.*

Vous l'avez revu, MADAME, ce ROI, ce Frere, ce Grand-Homme, dont les destinées ont été si étonnantes pendant l'intervalle du temps qui Vous en a separée. Il Vous a revue, cette Reine, cette Sœur, dans les veines de laquelle coule un sang qui semble être le sien propre. Ah! que ce moment doit avoir rappellé d'idées à vos esprits, excité de sentimens dans Vos cœurs! Jamais rien ne Vous aura mieux représenté le songe de la vie, où les plus grands événemens, les plus merveilleuses situations, vont avec le cours des années s'affoiblir insensiblement dans le lointain, & à la fin semblent s'y perdre & s'y évanouir. Que n'avez-Vous pas vu, que n'avez-Vous pas éprouvé, augustes Personnes, depuis l'instant de votre séparation! Ce passé n'est plus: l'avenir est caché dans une obscurité impénétrable: jouissez du présent qui doit être délicieux pour Vous. Épanchez journellement & réciproquement dans le sein l'un de l'autre, des ames faites pour se connoître & se pénétrer, pour s'unir & se confondre.

C'est un réveil pour Vous, MADAME, que Votre retour dans ces contrées: réveil aussi réel que celui du Philosophe de l'Antiquité étoit fabuleux. Il doit Vous avoir agréablement occupée, vivement affectée. Vous aviez vu Votre auguste Pere poser les fondemens solides de la grandeur de cet

(*) Le Discours du Roi qu'on lut ensuite, & qui va suivre celui-ci.

État ; mais auriez-Vous pu prévoir la rapidité avec laquelle cet édifice seroit élevé jusqu'à son comble? Auriez-Vous pu penser que l'Europe seroit conjurée contre FRÉDERIC, & sembleroit ne l'avoir été que pour graver son nom en caracteres ineffaçables dans le Temple de l'Immortalité? Ah! MADAME, si le Livre des destinées s'étoit ouvert à Vos yeux le jour de Votre départ, quel bouleversement dans Votre ame généreuse à chaque page que Vous y auriez lue! Quel frémissement dans ces époques redoutables où la prudence humaine sembloit avoir épuisé toutes ses ressources! Mais quel ravissement lorsqu'après avoir vu le Roi armé du foudre dans les combats, Vous l'auriez apperçu dictant la Paix, & se reposant sur ses lauriers! Qui Vous auroit dit que ces Freres si tendrement chéris, que Vous laissiez ici, encore dans leur premiere jeunesse, affronteroient sitôt les plus grands hazards; qu'ils courroient avec tant de rapidité dans la carriere de la gloire; que défenseurs de la Patrie, libérateurs de l'Allemagne, Vous les retrouveriez le front ceint d'un éclat immortel; que Vous verriez dans notre magnanime HENRI le plus sage des Capitaines, & si puis employer cette expression, le Créateur de ses Triomphes. Et l'Héritier du Thróne, MADAME, avec toutes ses graces, avec ce caractere de bonté qui s'allie si heureusement en lui avec celui de dignité, ne Vous intéresse-t-il pas autant que nous? Ne Vous console-t-il pas de ne plus revoir ce Prince également auguste & aimable, dont la présence auroit rendu Votre satisfaction complette?

Mais détournons nos yeux de dessus Vos pertes & les nôtres, MADAME, & n'altérons point la sérénité de ce beau jour. Respectons les arrêts d'enhaut; & bornons-nous à demander la conservation des Têtes sacrées qui composent actuellement l'auguste Maison Royale. Nous ne verrons plus VOTRE MAJESTÉ au milieu de nous: ce délicieux moment s'écoule; il va comme tous les autres s'engloutir dans l'abyme du passé: j'avoue que cette idée m'afflige, & que je cherche à prolonger au moins ce que je ne puis fixer, en donnant à ce discours plus d'étendue que je ne lui en avois d'abord destiné.

GUSTAVE, Sage couronné! CHARLES, FRÉDERIC-ADOLPHE, Soutiens du Thróne le plus ancien peut-être & l'un des plus

plus respectables qui furent jamais! il me semble que je Vous vois encore, que je Vous parle. . . . Mais quoi! des Terres & des Mers nous séparent: il ne me reste que Votre image, Votre souvenir. Il en sera tout à l'heure de même de Vous, Grande Reine! de Vous, Princesse, en qui tout offre l'empreinte des graces & des vertus de Votre auguste Mere, Princesse digne de porter les Couronnes les plus brillantes, & de faire le bonheur des plus grands Empires! Vous allez disparoître de devant nos yeux; mais Vous aurez, tant que nous vivrons, un Temple & des Autels au fond de nos cœurs.

Après que le Sécretaire perpétuel eut cessé de parler, Mr. le Professeur *Thiebault* s'acquitta de la fonction dont il étoit chargé, de lire un Discours qui doit occuper ici une place également due à l'importance du sujet & à l'éminence de l'Auteur.

DISCOURS

Sur l'utilité des Sciences & des Arts dans un État.

DES personnes peu éclairées ou peu sinceres ont osé se déclarer les ennemis des Sciences & des Arts: s'il leur a été permis de calomnier ce qui fait le plus d'honneur à l'humanité, à plus forte raison doit-il être permis de le défendre: c'est le devoir de tous ceux qui aiment la Société, & qui ont un cœur reconnoissant de ce qu'ils doivent aux Lettres. Le malheur veut que souvent des paradoxes fassent plus d'impression sur le public que des vérités: c'est alors qu'il faut le détromper, & confondre par de bonnes raisons, & non par des injures, de telles rêveries. Je suis honteux de dire dans cette Académie, qu'on a eu l'effronterie de mettre en question si les Sciences sont utiles ou nuisibles à la Société; chose sur laquelle personne ne devroit avoir de doute. Si nous avons de la préférence sur les animaux, ce n'est certainement pas par les facultés du corps; mais c'est par l'esprit plus étendu que la Nature nous a donné; & ce qui distingue l'homme de l'homme, c'est le génie & les connoissances. D'où viendroit la distance

infinie qu'il y a entre un peuple policé & un peuple barbare, si ce n'est que l'un est éclairé, & que l'autre végete dans l'abrutissement & dans la stupidité?

Les Nations qui ont joui de cette supériorité ont été reconnoissantes envers ceux qui leur ont procuré cet avantage: de là vient la juste réputation dont jouissent ces Lumieres de l'Univers, ces Sages qui par leurs savans travaux ont éclairé leurs compatriotes & leur siecle.

L'homme est peu de chose par lui-même: il naît avec des dispositions plus ou moins propres à se développer: mais il faut les cultiver: il faut que ses connoissances se multiplient pour que ses idées puissent s'étendre: il faut que la mémoire se remplisse, pour que ce magasin fournisse à l'imagination des matieres sur lesquelles elle puisse s'exercer; & que le jugement se raffine, pour trier ses propres productions. L'esprit le plus vaste, privé de connoissances, n'est qu'un diamant brut, qui n'acquerra de prix qu'après avoir été taillé par les mains d'un habile Lapidaire. Que d'esprits perdus ainsi pour la Société! Et que de grands hommes en tout genre étouffés dans leur germe, soit par l'ignorance, soit par l'état abject où ils se trouvoient placés!

Le véritable bien de l'État, son avantage & son lustre, exigent donc que le peuple qu'il contient, soit le plus éclairé & le plus instruit qu'il est possible, pour lui fournir en chaque genre un nombre de Sujets habiles & capables de s'acquitter avec dextérité des différens emplois qu'il faut leur confier.

Ceux qui, par le hazard de la naissance, sont dans une position à ne pouvoir apprécier les torts infinis que souffrent plus ou moins les Gouvernemens Européens par les fautes dont l'ignorance est cause, ne sentiront peut-être pas aussi vivement ces inconvéniens, que s'ils en avoient été les témoins. On pourroit rapporter une multitude de ces exemples, si la nature & l'étendue de ce Discours ne nous resserroient dans de justes bornes. C'est la paresse qui dédaigne de s'instruire; c'est l'ignorance ambitieuse qui prétend à tout, & qui est incapable de tout, qu'auroit dû fronder je ne sai quel énergumene, qui ne débitant que de misérables paradoxes, a osé soutenir que les Sciences sont pernicieuses, qu'elles ont rendu les vices plus raffinés & qu'elles

pervertiſſent les mœurs. De pareilles fauſſetés ſautent aux yeux; & ſous quelque apparence qu'on les préſente, il demeure conſtant que la culture de l'eſprit le rectifie au lieu de le dépraver. Qu'eſt-ce qui corrompt les mœurs? Ce ſont les mauvais exemples; & comme les maladies épidémiques ſont de plus grands ravages dans des Villes immenſes que dans des hameaux, il arrive de même que la contagion du vice fait plus de progrès dans les Cités qui fourmillent de peuple, que dans les campagnes où les travaux journaliers & une vie plus retirée conſervent la ſimplicité des mœurs dans leur pureté.

Il s'eſt trouvé de faux Politiques, reſſerrés dans leurs petites idées, qui ſans approfondir la matiere ont cru qu'il étoit plus facile de gouverner un peuple ignorant & ſtupide qu'une nation éclairée. C'eſt vraiment puiſſamment raiſonner, tandis que l'expérience prouve que, plus le peuple eſt abruti, plus il eſt capricieux & obſtiné! & la difficulté eſt bien plus grande de vaincre ſon opiniâtreté, que de perſuader des choſes juſtes à un peuple aſſez policé pour entendre raiſon. Le beau pays que celui où les talens demeureroient éternellement enfouis, & où il n'y auroit qu'un ſeul homme moins borné que les autres! Un tel État, peuplé d'ignorans, reſſembleroit au Paradis perdu de la Geneſe, qui n'étoit habité que par des bêtes.

Quoiqu'il ne ſoit pas néceſſaire de prouver à cet illuſtre Auditoire, & dans cette Académie, que les Arts & les Sciences procurent autant d'utilité qu'ils donnent d'éclat aux peuples qui les poſſedent; il ne ſera peut-être pas inutile d'en convaincre un genre de perſonnes moins éclairées, pour les prémunir contre les impreſſions que de vils ſophiſtes pourroient faire ſur leur eſprit. Qu'ils comparent un Sauvage du Canada avec quelque Citoyen d'un pays policé de l'Europe; & tout l'avantage ſera en faveur de ce dernier. Comment peut-on préférer la Nature groſſiere à la Nature perfectionnée, le manque de moyens de ſubſiſter à une vie aiſée, la groſſiéreté à la politeſſe, la ſureté des poſſeſſions dont on jouit à l'abri des loix, au droit du plus fort & au brigandage qui anéantit les fortunes & l'état des familles?

La ſociété formant un corps de peuple ne ſauroit ſe paſſer ni des Arts ni des Sciences. C'eſt par le nivellement & l'Hydraulique que les contrées

fituées le long des fleuves fe mettent à couvert des débordemens & des inondations. Sans ces Arts, des terrains féconds fe changeroient en marais malfains, & priveroient nombre de familles de leur fubfiftance. Les terrains plus élevés ne fauroient fe paffer d'Arpenteurs pour mefurer & partager les champs. Les connoiffances phyfiques bien conftatées par l'expérience contribuent à perfectionner la culture des terres, & furtout le jardinage. La Botanique qui s'applique à l'étude des fimples, & la Chimie qui fait en extraire les fucs fpiritueux, fervent au moins à fortifier notre efpérance durant nos maux, fi même leur propriété n'a pas la vertu de nous guérir. L'Anatomie guide & dirige la main du Chirurgien dans ces opérations douloureufes mais néceffaires, qui fauvent une partie de notre exiftence aux dépens de la partie endommagée. La Mécanique fert à tout. Faut-il foulever ou tranfporter un fardeau? C'eft elle qui le meut. Faut-il creufer dans les entrailles de la Terre pour en tirer des métaux? C'eft elle qui par des machines ingénieufes deffeche les carrieres, & délivre le Mineur de la furabondance des eaux qui le feroient périr ou ceffer fon travail. Faut-il conftruire des moulins pour nous broyer l'aliment le plus connu & le plus néceffaire? C'eft la Mécanique qui les perfectionne: c'eft elle qui foulage les ouvriers, en rectifiant les diverfes efpeces de métiers fur lesquels ils travaillent. Tout ce qui eft machine eft de fon reffort: & combien n'en faut-il pas dans tous les genres? L'art de conftruire un vaiffeau eft peut-être un des plus grands efforts de l'imagination: mais que de connoiffances ne faut-il pas que le Pilote poffede, pour diriger ce bâtiment & braver les flots en dépit des vents! Il faut qu'il ait étudié l'Aftronomie, qu'il ait de bonnes Cartes marines, une notion exacte de la Géographie, de l'habileté dans le calcul pour connoître l'étendue qu'il a parcourue & le lieu où il fe trouve: à quoi il fera fecouru à l'avenir par des pendules qu'on vient récemment de perfectionner en Angleterre. Les Arts & les Sciences fe tiennent par la main: nous leur devons tout: ce font les bienfaiteurs du genre humain. Le Citoyen des grandes villes en jouit, fans que fa molleffe orgueilleufe fache ce qu'il en coûte de veilles & de travaux pour fournir à fes befoins, & contenter fes goûts fouvent bizarres.

La guerre, quelquefois néceſſaire & ſouvent entrepriſe trop légèrement, que n'exige-t-elle pas de connoiſſances! La ſeule découverte de la poudre en a tellement changé la méthode, que les plus grands Héros de l'Antiquité, s'ils pouvoient revenir au monde, ſeroient obligés de ſe mettre au fait de nos découvertes, pour conſerver la réputation qu'ils ont ſi juſtement acquiſe. Il faut, dans ces temps modernes, qu'un Guerrier étudie la Géométrie, la Fortification, l'Hydraulique, la Mécanique, pour conſtruire des forts, former des inondations artificielles, connoître la force de la poudre, calculer le jet des bombes, ſavoir diriger l'effet des mines, faciliter le tranſport des machines de guerre. Il faut qu'il ſache à fond la Caſtramétation & la Tactique, la méchanique de l'exercice; qu'il ait une connoiſſance exacte des terrains & de la Géographie, & que ſes projets de campagne ſoient ſemblables à une démonſtration géométrique, quoiqu'il ſoit borné à l'art conjectural. Il doit avoir la mémoire remplie de l'hiſtoire de toutes les guerres précédentes, pour que ſon imagination ait la liberté d'y puiſer comme dans une ſource féconde.

Mais les Généraux ne ſont pas les ſeuls obligés de recourir aux archives des temps paſſés: le Magiſtrat, le Juriſconſulte, ne ſauroient s'acquitter de leurs devoirs s'ils n'ont bien approfondi cette partie de l'Hiſtoire qui concerne la légiſlation. Il faut non ſeulement qu'ils ayent étudié l'eſprit des loix du pays qu'ils habitent, mais qu'ils ſachent encore celles des autres peuples, & à quelles occaſions elles ont été promulguées ou abolies.

Ceux même qui ſe trouvent à la tête des Nations, & ceux qui adminiſtrent ſous eux les Gouvernemens, ne ſauroient ſe paſſer d'étudier l'Hiſtoire. C'eſt leur bréviaire: c'eſt un tableau qui leur repréſente les plus fines nuances des caractères, & les actions des hommes puiſſans, leurs vertus, leurs vices, leurs ſuccès, leurs malheurs, leurs reſſources. Dans l'hiſtoire de leur patrie, qui doit arrêter leur attention particuliere, ils trouvent l'origine des inſtitutions bonnes ou mauvaiſes, & une chaîne d'événemens liés les uns aux autres, qui les conduit juſqu'au tems préſent: ils y trouvent les cauſes qui ont uni les peuples, & les cauſes qui ont rompu ces liens: des exemples à ſuivre, des exemples à éviter. Mais quel objet de médita-

tion pour un Prince, que de paſſer en revue cette multitude de Souverains que l'Hiſtoire lui préſente! Il s'en trouve néceſſairement dans ce nombre, de ſon caractere, ou dont les actions ont quelque rapport aux ſiennes; & dans le jugement que la poſtérité en a porté il voit, comme dans un miroir, l'arrêt qui l'attend dès que ſa diſſolution totale aura fait évanouir la crainte qu'il inſpire.

Si les Hiſtoriens ſont les précepteurs des hommes d'État, les Dialecticiens ont été les foudres des erreurs & des ſuperſtitions. Ils ont combattu & détruit les chimeres des Charlatans ſacrés & profanes: ſans eux nous immolerions peut-être encore, comme nos Ancêtres, des victimes humaines à des Dieux fantaſtiques: nous adorerions l'ouvrage de nos mains; obligés de croire ſans oſer réfléchir, il nous ſeroit peut-être encore interdit de faire uſage de notre raiſon ſur la matiere qui importe le plus à notre deſtinée; nous acheterions au poids de l'or, comme nos peres, des paſſeports pour le Paradis, des Indulgences pour les crimes: les voluptueux ſe ruineroient pour ne point entrer en Purgatoire; nous dreſſerions encore des bûchers pour brûler ceux dont les opinions ne ſeroient pas les nôtres: la néceſſité des actions vertueuſes ſeroit remplacée par de vaines pratiques; & des fourbes tonſurés nous pouſſeroient, au nom de la Divinité, à commettre les plus horribles forfaits. Si le fanatiſme ſubſiſte encore en partie, il faut l'attribuer aux profondes racines qu'il a pouſſées dans des tems d'ignorance, de même qu'à l'intérêt de certains corps vêtus en ſoutane, noirs, bruns, gris, blancs ou pies, qui réchauffent ce mal & en redoublent les accès, pour ne pas perdre la conſidération où ils ſe maintiennent encore dans l'eſprit du peuple. Nous convenons que la Dialectique n'eſt pas à la portée de l'eſprit de la populace: cette portion nombreuſe de l'eſpece humaine ſera toujours la derniere à ſe deſſiller les yeux; & quoiqu'en tout pays elle ait le dépôt de la ſuperſtition en garde, il n'en eſt pas moins vrai de dire qu'on eſt parvenu à la détromper des ſorciers, des poſſédés, des adeptes, & d'autres inepties auſſi puériles. Nous devons ces avantages à une étude plus ſcrupuleuſe qu'on a faite de la Nature: la Phyſique s'eſt aſſociée à l'analyſe & à l'expérience: on a porté la plus vive lumiere dans ces

ténebres qui cachoient tant de vérités à la docte Antiquité; & quoique nous ne puissions parvenir à la connoissance des premiers principes secrets que le grand Géometre s'est reservés pour lui seul, il s'est trouvé néanmoins de ces puissans Génies qui ont découvert les loix éternelles de la pesanteur & du mouvement; un Chancelier *Bacon*, le précurseur de la nouvelle Philosophie, ou pour mieux dire, celui qui en a deviné & prédit les progrès, a mis le Chevalier *Newton* sur les voies de ses merveilleuses découvertes. *Newton* parut après *Des-Cartes*, qui ayant décrédité les erreurs anciennes les avoit remplacées par les siennes propres. On a depuis pesé l'air (*); on a mesuré les Cieux; on a calculé la marche des corps célestes avec une justesse infinie (**); on a prédit les éclipses; on a découvert une propriété inconnue de la matiere, la force électrique, dont les effets étonnent l'imagination; & sans doute que dans peu le retour des Cometes se pourra prédire comme les éclipses; mais nous devons déjà au savant *Bayle* d'avoir dissipé l'effroi que ce phénomene causoit aux ignorans. Avouons-le: autant que la foiblesse de notre condition nous humilie, autant les travaux de ces grands hommes nous relevent le courage & nous font sentir la dignité de notre être.

Les fourbes & les imposteurs sont donc les seuls qui puissent s'opposer aux progrès des Sciences, & qui puissent prendre à tâche de les décrier, puisqu'ils sont les seuls auxquels les Sciences soient nuisibles. Dans ce siecle philosophe où nous vivons, on n'a pas seulement voulu dénigrer les hautes Sciences; il s'est trouvé des personnes d'assez mauvaise humeur, ou plutôt assez dépourvues de sentiment & de goût, pour se déclarer les ennemis des Belles-Lettres. A leur sens, un Orateur est un homme qui s'occupe plus à bien dire qu'à penser juste; un Poëte est un fou qui s'amuse à mesurer des syllabes; un Historien est un compilateur de mensonges; ceux qui s'occupent à les lire perdent leur temps; & ceux qui les admirent sont des esprits frivoles. Ils proscriroient les fictions anciennes, ces fables ingénieuses & allégoriques qui renfermoient tant de vérités. Ils ne veulent pas concevoir que si *Amphion*, par les sons de sa lyre, bâtit les murs de Thebes, cela

(*) *Torricelli.* (**) *Newton.*

veut dire que les Arts adoucirent les mœurs des ſauvages humains, & donnerent lieu à l'origine des ſociétés.

Il faut avoir l'ame bien dure pour vouloir priver l'eſpece humaine des conſolations & des ſecours qu'elle peut puiſer dans les Belles-Lettres, contre les amertumes dont la vie eſt remplie! Qu'on nous délivre de nos infortunes, ou qu'on nous permette de les adoucir! Ce ne ſera pas moi qui répondrai à ces ennemis atrabilaires des Belles-Lettres; mais je me ſervirai des paroles de ce Conſul philoſophe, le pere de la patrie & de l'éloquence (*). „Les Lettres, dit-il, cultivent la jeuneſſe, réjouiſſent la vieil„leſſe, donnent du luſtre à la fortune, offrent un aſyle & conſolent dans „la diſgrace, plaiſent au dedans de la maiſon, n'importunent point au de„hors, veillent les nuits avec nous, voyagent avec nous, réſident aux „champs avec nous." Fuſſions-nous même incapables d'y parvenir, ou d'en bien goûter les charmes; nous devrions toujours les admirer, à ne les voir que dans les autres.

Que ceux qui aiment tant à déclamer, apprennent à reſpecter ce qui eſt reſpectable; & au lieu de cenſurer des occupations également honnêtes & utiles, qu'ils répandent plutôt leur bile ſur l'oiſiveté qui eſt la mere de tous les vices! Si les Sciences & les Arts n'étoient pas d'une néceſſité indiſpenſable aux ſociétés; s'il n'y avoit pas de l'utilité, de l'agrément & de la gloire à les cultiver; comment la Grece auroit-elle jetté ce vif éclat dont elle éblouit encore nos yeux, dans ces tems mémorables où elle porta les *Socrate*, les *Platon*, les *Ariſtote*, les *Alexandre*, les *Periclès*, les *Thucydide*, les *Euripide*, les *Xénophon?* Les faits vulgaires s'effacent de la mémoire; mais les actions, les découvertes, les progrès des grands hommes font des impreſſions durables.

Il en fut de même chez les Romains: leur beau ſiecle fut celui où le ſtoïque *Caton* périt avec la liberté; où *Cicéron* foudroyoit *Verrès*, publioit ſon Livre des *Offices*, ſes *Tuſculanes*, ſon Ouvrage immortel *ſur la nature des Dieux;* où *Varron* écrivoit ſes *Origines* & ſon Poëme *ſur la Guerre civile;*

(*) Dans ſa Harangue pour *Archias*.

civile; où *César* effaça par ſa clémence ce que ſon uſurpation avoit d'odieux; où *Virgile* récitoit ſon *Énéide;* où *Horace* chantoit ſes Odes; où *Tite-Live* tranſmettoit à la poſtérité l'Hiſtoire de tous les grands-hommes qui avoient illuſtré la République. Que chacun ſe demande dans quel temps il auroit voulu naître à Athenes ou à Rome: ſans doute qu'il choiſira ces époques brillantes.

Une affreuſe barbarie ſuccéda à ces temps de gloire; un débordement de peuples féroces couvrit preſque toute la face de l'Europe. Ils amenerent avec eux les vices & l'ignorance, qui préparerent les voies à la ſuperſtition la plus outrée. Ce ne fut qu'après onze ſiecles d'abrutiſſement que la Terre put ſe dégager de cette rouille; & dans cette renaiſſance des Lettres, on fait plus de cas des bons Auteurs qui les premiers illuſtrerent l'Italie, que de LÉON X qui les protégea. FRANÇOIS I, jaloux de cette gloire, voulut la partager; il fit des efforts inutiles pour tranſplanter ces plantes étrangeres dans un ſol qui n'étoit point encore préparé pour elles; & ce ne fut qu'à la fin du regne de LOUIS XIII, & ſous celui de LOUIS XIV, que commença ce beau ſiecle où tous les Arts & toutes les Sciences s'acheminerent, d'une marche égale, au point de perfection où il eſt permis aux hommes d'atteindre. Depuis, les différens Arts ſe répandirent partout: le Dannemarc avoit déjà produit un *Tycho-Brahé*, la Pruſſe un *Copernic:* l'Allemagne ſe glorifia d'avoir donné le jour à *Leibnitz*. La Suede auroit également augmenté la liſte de ces hommes célebres, ſi les guerres perpétuelles où cette Nation ſe trouvoit engagée, n'avoient pas nui aux progrès des Arts.

Tous les Princes éclairés ont protégé ceux dont les ſavans travaux ont honoré l'eſprit humain; & les choſes de nos jours en ſont venues au point, que pour peu qu'un Gouvernement Européen négligeât d'encourager les Sciences, il ſe trouveroit bientôt arriéré d'un ſiecle à l'égard de ſes voiſins: la Pologne en fournit un exemple palpable.

Nous voyons une grande Impératrice ſe faire un point d'honneur d'introduire & d'étendre les connoiſſances dans ſes vaſtes États, & traiter comme une affaire importante tout ce qui peut y contribuer.

Qui ne ſeroit ému & touché, en apprenant l'honneur qu'on rend en Suede à la mémoire d'un grand homme? Un jeune Roi, qui connoit le prix des Sciences, y fait ériger actuellement un tombeau à Des-Cartes, pour s'acquitter, au nom de ſes Prédéceſſeurs, de la reconnoiſſance qu'ils devoient à ſes talens. Quelle douce ſatisfaction pour cette *Minerve* qui mit au jour, qui inſtruiſit Elle-même ce jeune *Télémaque*, de retrouver en lui ſon eſprit, ſes connoiſſances & ſon cœur! Elle a droit de ſe complaire & de s'applaudir dans ſon ouvrage; & s'il eſt interdit à nos cœurs d'épancher avec profuſion tout ce que le ſentiment nous inſpire ſur ſon ſujet; au moins ſera-t-il permis à cette Académie, & à toutes celles qui exiſtent, en lui offrant les hommages les plus ſinceres, de la placer avec reconnoiſſance dans le petit nombre des Princeſſes éclairées qui ont aimé & protégé les Lettres.

* * *

L'Aſſemblée publique pour l'anniverſaire de l'avénement de S. M. au Thrône s'eſt tenue le Jeudi 4 Juin. Le Sécretaire perpétuel a ouvert la ſéance par le Diſcours ſuivant:

SANS avoir le don de Prophétie, je pourrois dire, MESSIEURS, que cette année va faire époque dans les Annales du ſiecle & dans l'Hiſtoire de la patrie. Ce n'eſt point ici le paſſé gros de l'avenir: c'eſt le préſent qui eſt actuellement en travail. Cependant, quelles que ſoient la vraiſemblance & la proximité des évènemens qui fixent l'attention de l'Europe, je m'abſtiens d'en parler, ayant toujours été de l'avis de ce Philoſophe qui diſoit que, quand on eſt ſimple paſſager dans un vaiſſeau, il ne faut pas ſe mêler du gouvernail. Je me borne à fixer mes regards ſur le Pilote, j'admire ſa manœuvre; ou (pour parler ſans figure) je m'occupe du ſujet de cette ſolemnité; je repaſſe le cours des années du glorieux Regne pour la durée duquel nous formons les vœux les plus ardens; je penſe aux limites des États Pruſſiens lorſque FRÉDERIC eſt monté ſur le Thrône, & à celles que ſes exploits & ſon influence ſur le ſyſteme général leur ont données & leur donneront encore. Vit-on jamais de Puiſſance s'élever avec plus de rapidité & s'affermir avec plus de ſolidité? A la grandeur & à la gloire ſe joindront le bonheur des ſu-

jets, la prospérité intérieure, qui fait la vraie santé des Corps politiques. La même main qui sait rassembler & réunir, saura semer & répandre. Le Monarque le plus révéré sera le plus aimé. Et qu'ainsi le Ciel verse toujours sur lui ses plus riches trésors!

Le Sécretaire perpétuel a rapporté ensuite tout ce qui concernoit les Prix à distribuer & les Questions à proposer par l'Académie. On en trouvera le détail dans le Programme qui va suivre.

Il a lu ensuite l'Éloge de M. *Achard*.

M. le Directeur *Merian* a terminé la séance par la lecture d'un Mémoire intitulé: *Expériences philosophiques sur la vue & le toucher.*

P R I X
proposés par l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres pour l'Année 1774.

L'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres, dans son Assemblée publique du 4 Juin 1772, a adjugé le Prix de la Classe de Mathématique, qui concernoit la Question suivante:

Quelles sont les dimensions des objectifs composés de deux matieres, telles que le verre commun & le cristal d'Angleterre, les plus propres à détruire entierement, ou au moins sensiblement, les aberrations de réfrangibilité & de sphéricité, taut pour les objets placés dans l'axe que pour ceux qui sont hors de l'axe? Et quel est le nombre & l'arrangement des oculaires qu'il faudroit adapter à de tels objectifs pour avoir les lunettes les plus parfaites qu'il est possible?

Ce Prix a été remporté par M. *Jean Fréderic Hennert*, Professeur de Mathématiques à Utrecht.

La Classe de Belles-Lettres devoit adjuger le même jour le Prix sur la Question suivante:

Quand on approfondit l'Histoire de Brandebourg, on trouve que les Margraves & les Électeurs qui ont gouverné ce pays, les Alberts, *les* Ottons, *les* Waldemar d'Anhalt, *les* Louis de Baviere, *& presque tous les Électeurs de la Maison de* ZOLLERN, *quoiqu'inférieurs en puissance primitive aux quatre autres grands & anciens Ducs de la Germanie, se sont cependant toujours distingués dans une suite de siecles par l'influence supérieure que la grandeur personelle de leur caractere & de*

leur génie leur a procurée, non ſeulement dans les affaires de l'Empire, mais encore dans celles de l'Europe en général, & particulierement dans celles de la Boheme, de la Pologne, de la Pruſſe, de la Slavie, de la Suede & du Dannemarc. On trouve encore que, ſans être Rois, ces Princes ont preſque toujours joué un rôle égal, & quelquefois ſupérieur, à celui des Rois & des Souverains leurs voiſins, tant dans les affaires de la Paix, que dans celles de la Guerre, & qu'ils ont eu une part très eſſentielle aux grands évènemens qui ſont arrivés de leur tems; on voit que c'eſt par ce moyen & par la ſageſſe de leur conduite, qu'ils ſe ſont frayés le chemin à la Royauté, & qu'ils ont ſucceſſivement fondé la puiſſance de cet État, qui, ſans être une des anciennes Monarchies de l'Europe, & ſans les égaler en étendue de territoire, y tient aujourd'hui un rang très diſtingué.

L'Académie ſouhaite

„Que cette vérité ſoit développée dans un Tableau général, où, ſans entrer dans „un détail minucieux de la vie de ces Princes, on ne mette en uſage que les cir„conſtances, les faits & les anecdotes les plus propres à les caractériſer, à prouver „ce qu'on vient d'avancer, à tirer les inductions naturelles qui en réſultent, & en„fin à faire diſparoître les préjugés que les Etrangers peu inſtruits de l'Hiſtoire ont „communément ſur l'origine & les progrés de ce qu'ils appellent *Monarchies nou„velles.*

L'Académie n'ayant pas été ſatisfaite des Mémoires envoyés ſur ce ſujet, elle renvoie l'adjudication du Prix à l'année prochaine (1773) & invite les Savans à s'occuper de cet objet.

La Claſſe de Mathématique propoſe pour le Prix du 31 Mai 1774, une nouvelle Queſtion, énoncée en ces termes.

Il s'agit *de perfectionner les méthodes qu'on emploie pour calculer les orbites des Cometes d'après les Obſervations; de donner ſurtout les formules générales & rigoureuſes qui renferment la ſolution du Probleme où il s'agit de déterminer l'orbite parabolique d'une Comete par le moyen de trois obſervations, & d'en faire voir l'uſage pour réſoudre ce probleme de la maniere la plus ſimple & la plus exacte.*

On invite les Savans de tout pays, excepté les Membres ordinaires de l'Académie, à travailler ſur cette Queſtion. Le Prix qui conſiſte en une Médaille d'or du poids de cinquante Ducats, ſera donné à celui qui, au jugement de l'Académie, aura le mieux réuſſi. Les pieces, écrites d'un caractere liſible, ſeront adreſſées à M. le Conſeiller Privé *Formey*, Sécretaire perpétuel de l'Académie.

Le terme pour les recevoir eſt fixé juſqu'au 1 de Janvier 1774, après quoi on n'en recevra abſolument aucune, quelque raiſon de retardement qui puiſſe être alléguée en ſa faveur.

On prie les Auteurs de ne point ſe nommer, mais de mettre ſimplement une Deviſe, à laquelle ils joindront un Billet cacheté, qui contiendra, avec la Deviſe, leur nom & leur demeure.

Le Jugement de l'Académie ſera déclaré dans l'Aſſemblée publique du 31 de Mai 1774.

On a été averti par le Programme de l'année précédente, que le Prix de la Claſſe de Philoſophie expérimentale qui ſera adjugé le 31 Mai 1773, concerne la Queſtion ſuivante:

Comme l'Arſenic ſe trouve dans les mines de la plûpart, pour ne pas dire, de tous les métaux & demi-métaux en grande abondance, & que malgré cette abondance, il n'eſt encore gueres connu que par ſes qualités nuiſibles: On demande

Quel eſt le véritable but auquel la Nature ſemble avoir deſtiné l'Arſénic dans les mines? Et ſi l'on peut en particulier démontrer, par des expériences faites ou à faire, ſi, comment, & juſqu'à quel point il ſert, ſoit à former les métaux, ſoit à les perfectionner, ou à produire en eux d'autres changemens néceſſaires & utiles?

Il reſte à parler du Prix extraordinaire, fondé par feu M. le Conſeiller Privé *Eller*. La Queſtion propoſée a pour objet

La Théorie des tranſplantations.

Il s'agit de celles qui tranſportent les plantes d'un climat, & ſurtout de leur terroir natal, dans un autre. Il réſulte de ce tranſport divers changemens, qui, généralement parlant, détériorent les plantes. On doit expoſer ces changemens & les expliquer, tant par la nature des choſes que d'après les expériences très fréquentes de ce genre qui ont déjà été faites. La théorie demandée réduira les différens cas à certaines eſpeces rélativement aux cauſes qui y influent. Elle fournira en même tems pour chaque eſpece la méthode requiſe, afin que les eſſais qu'on voudra faire à l'avenir réuſſiſſent en grand, & qu'on puiſſe s'aſſurer ſuffiſamment d'avance s'ils ſont praticables.

Les Pieces envoyées pour cette Queſtion n'ayant pas paru ſatisfaiſantes, elle a été renvoyée au 31 Mai 1774.

Le ſecond des Prix propoſés par un Particulier de France, & que l'Académie s'étoit chargée d'adjuger, à la requiſition de M. *de la Condamine*, a été donné, dans l'Aſſemblée ordinaire du 19 Mars, à M. *Joſſe Leopold Friſch*, Paſteur à Grüneberg en Siléſie. Voyez le Programme de ces Queſtions dans les Mémoires de MDCCLXX, p. 31.

L'Académie a fait des pertes & des acquiſitions dans le cours de l'année MDCCLXXII. Les pertes ont été celle de M. *Antoine Achard*,

Conseiller Privé & Ecclésiastique, Pasteur de l'Église françoise de Berlin, décédé le 2 de Mai, & dont l'Éloge se trouve à la fin de cette Histoire; & celle de M. *François Vincent Toussaint*, Professeur d'Éloquence dans l'Académie Royale des Nobles, auparavant Avocat au Parlement de Paris, décédé le 22 de Juin.

M. *Louis Cochius*, Prédicateur de la Cour à Potsdam, qui avoit été aggrégé à l'Académie le 26 Avril 1770, & placé comme Membre ordinaire dans la Classe de Philosophie spéculative le 3 Mai suivant, est venu prendre séance le 19 Mars 1772, & a fait son Discours de réception en Latin: *Oratio de quibusdam ad Philosophiam, præcipue Leibnitzianam, spectantibus.* Nous en donnerons le précis ci-dessous. Voici la Réponse que lui fit le Sécretaire perpétuel.

Nous sommes convenus, Monsieur & très digne Confrere, que je répondrois à votre beau Latin dans la Langue de l'Académie, c'est à dire, en aussi bon François qu'il me seroit possible. Vous savez que nous avons desiré de vous acquérir, que nous nous sommes réjouis de vous posséder, & que nous attendions avec impatience le moment de jouir. Il est venu ce moment: nous vous voyons au milieu de nous; nous venons d'avoir le plaisir de vous entendre: cela ne fait qu'augmenter l'envie que nous avons que ce plaisir devienne habituel, & qu'il soit durable. Nous sommes séparés, il est vrai, par la diversité du séjour; & nous savons que vous avez de grandes & d'importantes occupations. Nous espérons cependant qu'elles vous laisseront des momens de loisir, & que nous en profiterons. Initié, comme vous l'êtes, aux doctrines les plus profondes & les plus solides de la Philosophie, les sources de méditation les plus intéressantes sont continuellement à votre portée; il vous suffit d'y puiser, & vous n'en reviendrez jamais à vuide. Nos assemblées profiteront du fruit de vos recherches; nos Mémoires s'enrichiront; & si nos Mânes conservent quelque sensibilité, ils se réjouiront dans la suite des temps de l'association de nos biens, comme nous nous réjouissons dans ce moment de l'association de nos personnes.

Le Roi ayant disposé de la place de Professeur d'Éloquence, qui vaquoit à l'Académie des Gentilshommes par la mort de M. *Toussaint*, en

faveur de M. *Borrelly*, ci-devant Professeur d'Éloquence à Aix en Provence; S. M. ordonna aussi à l'Académie de le recevoir au nombre de ses Membres ordinaires dans la Classe de Belles-Lettres. Le nouvel Académicien vint prendre séance le Jeudi 15 d'Octobre; & fit un Discours de réception, qui paroitra dans le Volume suivant de ces Mémoires, & qui traitoit *de l'art de procéder dans le développement de l'esprit humain.* Voici la Réponse du Sécretaire perpétuel.

Faire des pertes & les réparer, c'est le sort de tous les corps tant physiques que moraux pendant le cours de leur durée. Tantôt il y a du gain, tantôt il y a de la perte; la balance ne sauroit jamais être exacte. Mais elle est censée l'être, lorsqu'à une privation digne d'être regrettée succede une acquisition digne d'être estimée. Nous sommes aujourd'hui dans le cas, Monsieur. Nous avons eu en M. Toussaint *un Confrere dont le génie, les talens, les écrits lui avoient fait une réputation distinguée, dont les mœurs & le caractere avoient gagné notre confiance & notre attachement. Vous apportez au milieu de nous les présomptions les plus favorables à tous ces égards. S'il n'étoit question que d'autorités, les suffrages qui vous ouvrent les portes de l'Académie sont décisifs. Mais, dans une Assemblée de Philosophes qui veulent juger par eux-mêmes, ce que nous venons d'entendre est le véritable poids dans la balance. Quiconque connoît aussi bien que vous, Monsieur, l'art de développer l'esprit humain, a poussé le développement du sien au degré qu'on exige ou qu'on suppose dans les Membres de ces Compagnies fondées pour éclairer le genre humain, pour répandre dans la Société toutes les connoissances qui peuvent la rendre plus parfaite & plus heureuse. Venez donc, mon digne Confrere, venez réunir vos efforts aux nôtres pour concourir avec une application soutenue à un but aussi excellent. Par là nous continuerons à répondre de concert aux soins paternels que notre auguste Protecteur ne cesse de prendre de nous; nous lui témoignerons la reconnoissance qu'il en attend, & la seule qui puisse lui être agréable; nous aurons de justes & continuels sujets de nous féliciter, vous de nous appartenir, nous de vous posséder.*

M. le Marquis de *Toschi-Fagnano*, Archidiacre de la Cathédrale de Sinigaglia a été aggrégé au nombre des Associés externes, dans l'Assemblée du 2 Juillet, en conformité des ordres gracieux de Sa Majesté.

HISTOIRE NATURELLE.

Nous placerons ici un Mémoire entier, lu dans l'Assemblée du 17 Juillet, qui nous a paru appartenir à la partie historique de ce Volume. Sa longueur ne nous permettra pas d'insérer beaucoup d'autres Articles.

OBSERVATIONS D'HISTOIRE NATURELLE.

PAR M. JEAN BERNOULLI.

Ces observations rouleront principalement sur la faculté que je crois pouvoir attribuer à quelques espèces de Papillons de pondre des œufs féconds sans s'être accouplés; elles pourroient donner lieu à un grand préambule sur les voyes miraculeuses de la Nature & je pourrois les faire suivre par bien des conjectures; mais celles-ci seroient encore fort hazardées & le préambule dont je parle seroit déplacé à la tête d'un petit nombre de remarques lesquelles, après les avoir supprimées assés longtems, je n'expose enfin, que dans la vue d'engager ceux qui font leur principale occupation de l'Histoire naturelle, de publier pareillement les faits analogues qu'ils auront eu occasion d'observer, & de poursuivre des recherches qui, à ce qu'il me semble, doivent conduire à des connoissances nouvelles & surprenantes dans le systeme de la réproduction des êtres.

Il y a sept ou huit ans qu'un de mes concitoyens des plus estimables & très versé dans l'Histoire naturelle, M. *Basler*, Professeur en langue hébraï-

que,

que, me marqua dans une Lettre qu'ayant nourri une des chenilles qui donnent le papillon que M. *de Réaumur* nomme *Paquet de feuilles seches* (*), & en ayant suivi la transformation, le papillon avoit pondu des œufs, desquels il avoit été fort surpris de voir sortir des chenilles, vu que la mere n'avoit reçu l'approche d'aucun mâle.

Quelques fortes que fussent mes raisons pour ne pas douter de la vérité de l'observation de M. *Basler*, je ne souhaitois pas moins de m'en convaincre par mes propres yeux, ou de voir arriver chés moi quelque fait semblable. Ce ne fut cependant que durant l'été de 1767 que je m'amusai de nouveau à nourrir quelques chenilles & à augmenter ma collection de papillons. Je trouvai alors vers la fin de Juin sur un poirier une chenille qu'on rencontre assés fréquemment sur cet arbre; elle est représentée par les Figures 1 & 3 Pl. XVIII. du 1r Volume de l'Ouvrage de M. *de Réaumur*, qui la décrit dans le 7e Mémoire, & elle fait le No. 15 de la seconde Classe des phalenes dans le 4e Recueil déjà cité des *Récréations* de M. *Rœsel*. Je mis cette chenille séparément dans une petite boëte, & comme elle avoit déjà toute sa crue elle ne tarda pas à faire sa coque. Au bout de quelques jours je perdis de vue la boëte qui renfermoit cette coque, mais en la rouvrant plus de 15 jours après, je fus très agréablement surpris en y trouvant une petite famille de chenilles qui ne pouvoient être provenues que d'un papillon mort qui étoit dans la boëte, & que je reconnoissois pour celui de la chenille que j'y avois mise.

Je vis aussitôt la voracité que M. *Rœsel* attribue à cette chenille, bien constatée; car mes petits nouveaux-nés avoient dévoré entierement la coque de leur mere & en partie celles des œufs d'où elles étoient sorties, & je n'ai pu satisfaire suffisamment la gloutonnerie & la délicatesse de ces petits êtres pour les conserver. Mais ce n'est pas là le fait le plus curieux de leur histoire: j'ai dit plus haut que j'avois séquestré ma chenille dans une

(*) M. *de Réaumur* le décrit dans le septieme Mémoire du second Volume de son grand Ouvrage sur les Insectes en 6 Volumes in 4to. La chenille qui le produit a été nommée par M. *Rœsel*, *die grosse haarichte und mit vielen Warzen und Zapfen bewachsene Grasraupe*, & elle se trouve décrite avec son papillon dans le bel Ouvrage intitulé *Insecten-Belustigungen*, au No. 41 des phalenes de la seconde Classe.

petite boëte fermée, qui n'avoit point été ouverte jusqu'après la naissance de ces petites chenilles; il étoit donc évident que le papillon femelle qui en étoit venu, avoit pondu des œufs féconds sans accouplement & sans même qu'aucun papillon quelconque en eût approché. Le fait étoit aussi curieux que certain, & il étoit semblable à l'observation de M. *Basler;* aussi ai-je toujours été curieux depuis, soit de connoître d'autres chenilles qui eussent la même faculté, soit de chercher dans les Auteurs qui ont écrit sur cette partie de l'Histoire naturelle des traces d'observations pareilles. Bien des circonstances m'ont empêché fréquemment de satisfaire ma curiosité, mais je vais indiquer du moins le peu que j'ai pu apprendre de plus sur ce sujet.

Si on ajoute foi aux deux observations que j'ai rapportées & qu'on les regarde comme concluantes, on sera disposé à croire que les Naturalistes en ont fait un grand nombre de semblables: mais je pense qu'on se tromperoit. D'un côté curieux de conserver leurs papillons beaux & entiers, & de l'autre regardant cette *monogénésie*, qu'il me soit permis de me servir de cette expression, comme impossible, ils n'ont pas tourné leurs recherches de ce côté & les soupçons mêmes qu'ils pouvoient avoir de sa possibilité n'ont pu les y engager. J'ajouterai qu'en supposant même qu'un grand nombre de papillons ayent la faculté dont nous parlons, il y a apparence qu'il faut un concours de circonstances heureuses pour qu'on puisse en faire l'observation. Cela me paroit d'autant plus vraisemblable, que le papillon de ma chenille du poirier est sorti de sa coque beaucoup plutôt qu'il ne l'auroit fait si les observations que Mrs. *de Réaumur* & *Rœsel* ont faites sur le tems que ce papillon passe dans son état de chrysalide étoient générales (*), de sorte qu'il se peut que ma petite boëte étoit exposée à un degré de chaleur tout à fait convenable; de plus la chenille avoit déjà toute sa crue, & ni la chrysalide ni le papillon n'avoient été inquiétés.

(*) M. *Rœsel* dit que cette chenille est de toutes celles qu'il connoit celle qui reste le plus longtems dans sa coque avant que de devenir chrysalide, & que le papillon n'en nait qu'en automne: M. *de Réaumur* dit pareillement que ce n'est qu'en Septembre & Octobre qu'il a eu le papillon de cette chenille; mais on sait aussi que ce célèbre Académicien a observé qu'on peut facilement hâter ou retarder le dégagement des papillons de leurs enveloppes, & qu'il a tiré même de cette propriété des inductions très curieuses.

Un de ceux qui a le plus élevé de chenilles & de papillons dans ce siecle c'est M. *Rœsel*, mais nous le voyons dans un grand nombre d'endroits de ses *Récréations* regarder comme certain que des œufs de papillon ne peuvent produire des chenilles sans qu'un accouplement ait précédé; par exemple au §. 11. (*Insecten-Belustigung, IVte Sammlung Num. I.*) de sa description de la chenille qu'on nomme quelquefois *Marte à points d'argent*, M. *Rœsel* dit qu'il est digne de remarque que la plûpart des phalenes femelles de la seconde classe, quand ils sont enfermés ou embrochés par des épingles, laissent tomber leurs œufs par nécessité ou par douleur, & que ceux-là même le font qui n'ont pas été fécondés par le mâle. *Mais*, ajoute-t-il, *il est positif, quant à ces œufs non animés, qu'il n'en sort jamais de chenilles; un grand nombre d'expériences que j'ai faites à ce sujet m'en ont convaincu.* On trouve dans l'Ouvrage de M. *Rœsel* plusieurs passages qui viennent à l'appui de cette assertion, je n'en citerai que les suivans: *Insecten-Belustigung, IIte Samml. Vorb.* §. 3. (7). *IVte Samml. Num. XXIV.* §. 1. *Num. XXX.* §. 4. *Vte Samml. Num. VI.* §. 7. Ce dernier passage prouve que la remarque de M. *Rœsel* s'étend aussi aux papillons que donnent les chenilles arpenteuses.

M. *de Réaumur* qui ne le cédoit à personne dans la connoissance des Insectes & qui les étudioit avec un esprit de recherche supérieur, a glissé encore plus sur l'idée, que le fait qui nous occupe pouvoit avoir lieu. J'ai même été surpris de ne voir aucune trace de cette idée, ni dans la Préface de son second Volume, ni dans le second Mémoire de ce Volume, où cependant il conseille fort de répéter & de retourner en toutes façons les expériences de Malpighi sur la maniere dont se fait la fécondation des œufs des papillons; car il regarde, dit-il, ces expériences comme *propres à nous donner des éclaircissemens sur un des plus grands mysteres de la Nature sur celui de la génération.* Ma surprise en est d'autant plus grande que M. *de Réaumur* a été mis en quelque façon sur les voyes par les célebres Naturalistes *Gœdart* & *Lister*, ainsi que le prouve le passage suivant, que je transcrirai en entier parce qu'il a trait encore à la suite de ce Mémoire. En parlant dans le septieme Mémoire du second Vol. p. 320. de la surprise qu'eut *Gœdart* de voir

naître de la belle chenille à brosses, décrite daos le second Mémoire du premier Volume, un papillon tout à fait vilain, & auquel *Gœdart* refuse même de donner le nom de papillon parce qu'il n'a pas d'aîles seosibles, M. *de Réaumur* ajoute ce qui suit:

„Mais ce qui augmente le prodige, c'est que l'animal, sorti de la premiere des especes de chenilles ne s'est point accouplé, à ce que dit *Gœdært*, qu'il a cependant fait des œufs, d'où sont nées ensuite de petites chenilles. Il est surprenant que *Lister*, dans ses notes sur cet Auteur, ait, avec lui, parlé de ce second fait comme d'une grande merveille, comme s'il nous prouvoit qu'il y a des œufs de papillons d'où des cheoilles écloseot, quoiqu'ils n'ayent pas été fécondés par l'accouplement du papillon mâle. *Lister* n'avoit-il pas encore lû *Swammerdam* lorsqu'il écrivoit cette oote? Il nous a appris que l'espece de chenilles à brosses qui vit des feuilles du prunier, donne un papillon mâle, qui a de belles & de grandes aîles, & que la même espece de chenilles doone un papillon femelle, qui est dépourvu d'aîles. En général, il n'a pas évité de relever les méprises de *Gœdært*, & il ne lui a pas fait grace sur celle-ci. Les cheoilles à brosses de l'aulne avoient donné à *Gœdært* un papilloo avec des aîles, & un autre sans aîles, qu'il n'avoit pas voulu reconnoître pour papillon: ils se sont sans doute accouplés ensemble à des heures où *Gœdært* ne pouvoit pas les observer. Les chenilles à brosses du prunier m'ont aussi donné des papillons femelles sans aîles; j'eo ai eu qui m'ont pondu des œufs féconds & d'autres des œufs stériles. Je n'ai jamais eu que de ces derniers, quand j'ai tenu les femelles dans des poudriers où il n'y avoit pas de mâles. Je n'ai pas eu besoin même, l'année derniere, d'user de précaution pour avoir des femelles seules; il ne m'est point né de mâles."

Nous voyons donc que parmi les Naturalistes plus anciens, ni *Swammerdam* oi probablement *Malpighi* n'ont accordé aux papillons la faculté de se reproduire sans accouplement, & que dans ce siecle-ci Mrs. *de Réaumur* & *Rœsel* n'ont pas voulu non plus admettre cette monogénésie, ont prétendu même en avoir reconnu par expérience l'impossibilité. Je ne sais cependant si, outre les deux observations que j'ai rapportées, oo n'en trouve-

roit pas, dans les Recueils académiques ou dans les Ouvrages des autres Naturalistes, plusieurs à opposer à leur sentiment; j'ai lieu de le croire, car en voici d'abord deux assés décisives, qui sont consignées dans les *Nova Acta Physico-Medica Academiæ Naturæ curiosorum*, de 1767. *Obs. LXXXVII.* par un Savant très éclairé, M. *Pallas*, actuellement Professeur d'Histoire naturelle & Académicien à Pétersbourg. On y verra que M. *de Réaumur* s'y combat lui-même si on met les teignes au nombre des chenilles, comme *Rœsel* l'a fait avec assés de raison à ce qu'il me semble; & quand cela ne seroit pas, ces observations ne laisseroient pas de mériter d'être plus connues & de pouvoir faire soupçonner la monogénésie possible parmi un plus grand nombre d'Insectes, & même parmi des papillons. Voici un Extrait du petit Mémoire que j'ai allégué:

„*In classe animalium Insectorum*, dit d'abord M. Pallas, *miracula tanta tamque varia detexit recentiorum in naturæ œconomia illustranda desudantium industria, ut vix quidquam utcunque insolitum & a generaliore Naturæ norma abludens, paradoxum nostro sæculo videri debeat. Inauditum hucusque fuit*, dari Phalænam fœmineam, nudo vermis habitu, non alis modo, *quippe cujus plurima extant exempla, sed &* pedibus, antennis, paleisque *Lepidoptero propriis* destitutam; *inauditum* Lepidopteri ova, sine maris vivifico influxu, fœcunda *nasci posse. Prioris tamen in altera hic describendarum specierum, posterioris etiam in utraque exempla inveni, eaque memoriæ prodidisse, neque inutilis injucundusve, neque forte inglorius labor censebitur*." M. *Pallas* observe ensuite que c'est dans les bois de sapins qui sont aux environs de Berlin que ces deux especes d'Insectes se trouvent le plus fréquemment, & que c'est la plus grande qui est la plus rare; il commence par décrire celle-ci & ne laisse rien à désirer, ni sur la chenille ou teigne & son fourreau (représentée par M. *de Réaumur* T. III. Table XI. Fig. 10.), ni sur la chrysalide, ni sur le papillon tant mâle que femelle qui en résulte; après avoir fait remarquer tout ce que ce dernier a de particulier dans son extérieur, il ajoute ce qui suit: „*Paradoxa hæc Phalæna fœmina, dum e folliculo suo exit, vehementi quasi peristaltico motu agitatur. Etiam aliquo postquam exiit tempore, simili vermiculatione aliqualiter loco*

movetur; tandem vero velut exanimis, quiescit, vulvam quæ brevis intestinuli instar est, postica corporis extremitate exserit, lente movet, per eam maxima ovorum parte se exonerat & demum marcescit."

„*Servavi sæpe solos in separatis scatulis fœmineos folliculos, vidique emissis plurimis ovis emarcuisse vermiformes Phalænas; & aliquo tempore post, quamquam omnis mascula progenies absfuisset, totam sæpe scatulam innumeris Eruculis scatuisse, maternos rodentibus folliculos, sibique e furfuribus minutas domunculas construentibus, miratus sum. Vix credibilis phænomeni frequentius postea in minori specie experientiam cepi, quippe cujus fœminæ promtius certiusque ova sua edunt, quam prioris, quæ plerumque ovis refertæ moriuntur atque siccescunt. In eadem ad quam describendam progredior specie, eandem observaverat proprietatem Reaumurius (Vol. III. p. 151.) cui & Lawa hujus speciei cum folliculo (T. XI. f. 7. 8. 9.) & mascula Phalæna (l. c. f. 5. 6.) & fœmina quoque anomala (p. 152. 153.) probe cognita fuit.*"

Je ne tirerai plus rien du Mémoire de M. *Pallas*, sur ce qui concerne ce dernier papillon femelle, si ce n'est le passage suivant, qui contient la raison pour laquelle l'Auteur a donné à ce papillon le nom de *Phalæna casta*: „*Ubi e folliculo prodiit*, dit-il, *incurvo corpore ni decidat, posticæ ejusdem extremitati per reliquam vitam adhærere pergit, sæpeque vulva & parte corporis adhuc intra folliculum hærente, ut maris commercium recusare videatur, ibidem depositis prius pro parte ovis, marcescit.*"

Je n'ai rien à ajouter à ce que j'ai dit sur ce que d'autres ont observé rélativement à la matiere que je traite, si ce n'est que dans la Famille du célebre M. *Huber*, Professeur d'Anatomie & Médecin de la Cour de Cassel, on m'a assuré, il y a 4 ans, avoir eu quelques exemples de la même nature, mais sans qu'on ait pu me nommer les especes.

Je passe au petit nombre de recherches que j'ai faites moi-même dans l'intention de connoître un plus grand nombre de chenilles dont la naissance soit possible sans accouplement.

Je n'avois pas encore lu ce que Mrs. *de Réaumur* & *Rœsel* ont écrit sur la chenille à brosses lorsqu'ayant trouvé en 1768 quatre chenilles de cette

eſpece (*) que me donnerent toutes des papillons femelles, je penſai auſſitôt que ſi un papillon au monde pouvoit être hermaphrodite, ce devoient être ces lourdes maſſes, privées d'aîles, & incapables même à cauſe de leur plénitude de faire quelques pas. Je fus donc fort attentif à les obſerver, mais voici ce qui arriva: Mes papillons étant ſortis de leurs coques ne s'en éloignerent preſque pas; le dernier même y reſta conſtamment attaché; ils ſemblerent ſe défendre de pondre; ce ne fut que quelques jours après leur naiſſance qu'il leur échappa quelques œufs, & il y eut un intervalle de 12 heures au moins entre le premier & le ſecond œuf d'un de ces papillons; enfin comme n'en pouvant plus ils laiſſerent partir tous la plus grande partie de leurs œufs à la fois & moururent, en gardant néanmoins chacun une quantité d'œufs plus ou moins grande dans le corps. Cette obſervation, telle que je la rapporte, rend déjà la monogénéſie de cette eſpece de papillons aſſés problématique, mais elle fournit de plus matiere à une autre remarque.

M. *Rœſel*, avant que d'avoir trouvé cette eſpece de chenilles, avoit élevé quelques années de ſuite celle qui lui eſt fort ſemblable, qui ſe nourrit des feuilles du prunier: il n'en avoit jamais eu que des papillons femelles, & cela lui auroit, dit-il, preſque fait croire avec d'autres, (**) que c'étoient des eſpeces d'hermaphrodites, ſi les chenilles qu'il décrit dans le No. ſuivant ne l'euſſent confirmé dans ſes premieres idées; celui de ces papillons femelles qu'il décrit pondit des œufs en grand nombre par différens tas & mourut; M. *Rœſel* eſpéra de voir naître des chenilles de ces œufs, mais il fut trompé dans ſon attente. Il éleva enſuite l'eſpece de ces chenilles qui a des rayes orangées, il en eut des papillons de l'un & de l'autre ſexe, ces papillons s'accouplerent, (***) ſix jours après l'accouplement les femelles

(*) Mes chenilles étoient de celles qui ont les broſſes jaunâtres & les rayes orangées, & qui font le No. 40. de la ſeconde claſſe des phalenes dans l'Ouvrage de M. *Rœſel*: je les trouvai le 20 Juin. J'en eus les papillons le 4, le 5, le 10 & le 13 Juillet; la chenille de ce dernier avoit fait ſa coque le 2.

(**) Peut-être que M. *Rœſel* n'entend par là que les mêmes Auteurs dont a parlé M. *de Réaumur*.

(***) Cet accouplement a fourni à M. *Rœſel* l'occaſion de faire encore une autre obſervation curieuſe: il a vu le petit papillon mâle emporter ſa lourde femelle & voler avec elle par la chambre.

pondirent des œufs qu'ils couvrirent de poils de la maniere que le fait le papillon de la chenille à oreilles & celui de la commune, & de ces œufs sortirent des chenilles au bout de 15 jours. Or la femelle de la chenille du prunier n'avoit pas couvert ces œufs de poils, comme probablement elle eût pu le faire, & mes femelles n'avoient pas eu non plus pour les leurs cette attention; ne pourroit-on donc pas en conclure que ces femelles non mariées sentent en quelque façon que ce seroit peine perdue que de coucher mollement & de garantir des injures de l'air, les œufs qu'elles ne peuvent s'empêcher de pondre; & si cela est il faudra leur accorder un esprit ou un instinct supérieur à celui du papillon de la chenille à oreilles, qui range toujours ses œufs avec le même soin, qu'il ait eu commerce avec un mâle ou non, & qui montre en cela très peu de prévoyance, ainsi que M. *de Réaumur* le remarque dans le second Mémoire de son second Volume.

Je viens de parler du papillon très paresseux aussi de la chenille à oreilles; c'est pareillement un de ceux que j'ai mis à l'épreuve. Cette chenille n'étant que trop commune est la premiere que j'aye nourrie: je savois depuis dix ou douze ans que son papillon garantit ses œufs avec beaucoup de soin, quand même il ne s'est pas accouplé; mais dans mes derniers essais je n'ai rien vu naitre de pareils œufs & je ne me rappelle pas que mes anciennes observations pussent me fournir quelque chose de plus satisfaisant. (*)

J'ai trouvé en 1768 le 30 Juin sur le sapin deux papillons femelles qui ressemblent beaucoup à ceux de la chenille à oreilles, mais qui en different cependant principalement par la tête & par le corps; celui-ci est rouge & coupé dans la direction des anneaux par des bandes noires; la tête a des antennes du sixieme genre, mais des barbes seulement d'un côté de la tige; & chacune de ces barbes a près de sa racine encore une autre pointe ou barbe

&

mais la conclusion qu'il en tire sur la maniere dont les œufs de ces insectes se dispersent ne me paroit pas tout à fait juste.

(*) Mais une autre observation curieuse qu'a fourni cette espece de papillon, c'est qu'il nait des papillons hermaphrodites pour les couleurs; M. *Happe*, Dessinateur de l'Académie pour l'Histoire naturelle m'a dit avoir vu un papillon de la chenille à oreilles qui avoit d'un côté les aîles comme les mâles & de l'autre comme les femelles. M. *Happe* a entendu parler aussi d'autres exemples de cette espece.

& du reste de la tige sortent plusieurs poils fort déliés. Ces papillons ont à l'anus un canal assés long par lequel ils pondent leurs œufs. Ils en pondirent plusieurs dès le lendemain, qui ressemblent aussi aux œufs du papillon de la chenille à oreilles; mais ils ne les couvrirent pas de poils, quoique le conduit dont j'ai parlé paroisse fait pour cet usage, à en juger par analogie avec d'autres papillons. Cependant, que les meres se soient accouplées ou non, il est certain que ces œufs étoient féconds; car les ayant vus changer de couleur le 12 Juillet, j'en ouvris un le 16 & j'y trouvai une petite chenille velue, qui perdoit facilement ses poils & qui étoit encore blanche & transparente; on n'y voyoit d'autres couleurs que quelques rayes longitudinales. (*)

La grande chenille de sapin, qui est décrite dans *Ræsel*, a beaucoup de ressemblance avec celle qui donne le papillon *paquet de feuilles séches*, & les papillons se ressemblent pareillement beaucoup; cependant j'ai quelques preuves, peu concluantes à la vérité, contre la monogénésie de ces papillons. En ayant trouvé quelques-uns à la mi-Août de 1768, un de ces papillons m'a pondu plusieurs œufs qui n'ont rien donné; & la liqueur qu'ils contenoient est restée verte jusqu'à ce qu'ils se soient desséchés; un autre au contraire a pondu des œufs dans lesquels on voyoit 14 jours après en les ouvrant nager des corps informes rougeâtres; c'étoient de petites chenilles qui sont parvenues à maturité avec une grande vitesse, puisque quatre jours après elles sont sorties de leurs coques, dont elles mangerent même aussitôt une partie avec grand appétit, parce que je n'avois pas leur nourriture naturelle sous la main à leur donner. Ces chenilles, à ce que j'ai remarqué alors, ne sont pas telles pour les couleurs qu'on les voit après leur entier accroissement, ainsi qu'il arrive dans plusieurs especes: les trois premiers anneaux sont blancs avec quelques petits points noirs; les autres anneaux sont jaunes dans leur partie supérieure avec deux petits tubercules noirs de chaque côté; il regne le long du dos une ligne noire fort étroite; les côtés sont bruns; mais au reste on y voit déjà les deux intersections bleues du second & du troisieme anneau.

Au mois de Juillet 1770 j'ai trouvé la chenille que M. *de Réaumur* nomme le Hérisson; elle s'est changée le 12 ou le 13 Août, en un papillon

(*) Je ne trouve rien de plus dans mes papiers sur le sort de ces œufs.

qui a pondu continuellement des œufs quelques jours de suite, sans avoir eu affaire à aucun mâle; mais ils n'ont rien produit.

ADDITION.

Dans le tems que j'ai présenté à l'Académie les observations précédentes je conservois dans une boëte une chrysalide que je voyois devoir me donner le papillon *paquet de feuilles seches* femelle: je fus fort attentif à ce qui en résulteroit; j'obtins en effet le papillon que j'attendois; il resta isolé dans la même boëte & toujours à l'ombre dans une chambre tempérée, exposée au couchant; il vécut 16 jours, & pendant ce tems il se délivra de tous ses œufs à l'exception de 3 ou 4, mais ils se sont tous desséchés. J'ai reçu aussi depuis ce tems-là de M. *Basler* des éclaircissemens que je lui avois demandés sur son observation; il me marque qu'après avoir nourri sa chenille de feuilles de prunier elle fit sa coque au bout de 3 ou 4 jours; qu'il mit dans un verre le papillon qui en vint peu après, & que ce papillon pondit des œufs en quantité sur une feuille sur laquelle le papillon étoit couché dans le vase: „Les ayant séparés, dit M. *Basler*, je les mis sur le fourneau de ma chambre, sans aucun dessein, ils furent là jusqu'au mois de Novembre, lorsqu'on commençoit à chauffer le fourneau; ce fut alors que je fis une découverte qui me surprit beaucoup; car en voulant chercher quelqu'autre chose sur ce fourneau j'apperçus ce papier rempli de petites chenilles, dont la plûpart étoient encore en vie, mais qui faute de nourriture creverent ensuite; ces œufs étoient donc fécondés, puisqu'ils ont produit des chenilles, mais par qui, ou dans quel tems? Le papillon, dans cet état, ne pouvoit pas l'être, puisqu'il étoit seul & isolé entierement; l'étoit-il donc dans son état de chenille? voilà ce que je ne puis pas savoir. J'ai répété dans la suite cette observation sur la même espece de chenilles & sur plusieurs autres, sans pouvoir faire la même découverte.

Ce que je viens de rapporter semble fortifier l'objection qu'on m'a faite, que les œufs, tant du papillon isolé de M. *Basler*, que ceux du mien, peuvent avoir été fécondés d'une maniere fortuite qui nous a échappé; cependant, quand je rejetterois entierement ces deux observations, je ne pourrois m'em-

pêcher en réfléchiſſant ſur celles de M. *Pallas*, ſur celle de *Gœdart*, ſur le rapport ſingulier qu'on remarque entre le phalene de la chenille à broſſes & la premiere des deux eſpeces que décrit M. *Pallas*, je ne pourrois m'empêcher, dis-je, de croire la monogénéſie dont il a été queſtion réelle au moins dans quelques eſpeces, ou poſſible même dans un grand nombre; la réalité de cette ſeconde ſuppoſition dépendroit probablement beaucoup d'un certain degré de chaleur; quant à la premiere elle exigeroit peut-être encore qu'on admît la conjecture avancée déjà, ſi je ne me trompe, par plus d'un Naturaliſte: qu'une même fécondation peut ſervir pour trois ou quatre générations ou davantage. Quoi qu'il en ſoit, la matiere me ſemble mériter qu'on l'approfondiſſe & qu'on la ſoumette à des expériences réitérées; elles ne ſeroient peut-être infructueuſes abſolument qu'avec les femelles des papillons diurnes, n'y ayant aucun exemple, que je ſache, que de tels papillons ayent pondu des œufs ſans avoir eu commerce avec quelque mâle.

C A L C U L.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

de M. EULER *le Pere à M.* BERNOULLI, *concernant le Mémoire imprimé parmi ceux de 1771. p. 318.*

Ayant lu avec bien du plaiſir vos recherches ſur les nombres de la forme $10^r \pm 1$ j'ai l'honneur de vous communiquer les criteres par leſquels on peut juger, pour chaque nombre premier $2p+1$, laquelle de ces deux formules $10^p - 1$ ou $10^p + 1$ ſera diviſible par $2p+1$.

Pour cet effet il faut diſtinguer les deux cas ſuivans.

I^r Cas. Si $2p+1 = 4n+1$, on n'a qu'à conſidérer les diviſeurs de ces 3 nombres n, $n-2$, & $n-6$, & ſi parmi eux on trouve ou les 2 nombres 2 & 5 ou aucun d'eux, c'eſt une marque que la

formule $10^p - 1$ ſera diviſible; mais ſi parmi les dits diviſeurs ne ſe trouvent que les nombres 2 ou 5, alors la formule $10^p + 1$ ſera diviſible; ainſi pour le nombre premier $2p + 1 = 53 = 4n + 1$, on aura $n = 13$, & nos 3 nombres ſeront 13. 11. 7, donc ni 2 ni 5 n'eſt diviſeur, & partant la formule $10^{26} - 1$ ſera diviſible par 53.

II^d Cas. Si $2p + 1 = 4n - 1$, on doit conſidérer ces trois nombres n, $n + 2$, & $n + 6$, & ſi parmi leurs diviſeurs ſe rencontrent ou tous les deux nombres 2 & 5 ou aucun d'eux, alors la formule $10^p - 1$ ſera diviſible; mais ſi ſeulement l'un des nombres 2 ou 5 s'y trouve, alors la formule $10^p + 1$ ſera diviſible; comme ſi $2p + 1 = 59 = 4n - 1$, & partant $n = 15$; nos 3 nombres ſont 15, 17, 21 ou 5 eſt parmi les diviſeurs & non pas 2, donc la formule $10^{23} + 1$ ſera diviſible par 59.

Ces regles ſont fondées ſur un principe dont la démonſtration n'eſt pas encore connue.

Le plus grand nombre premier que nous connoiſſions eſt ſans doute $2^{31} - 1 = 2147483647$, que Fermat a déjà aſſuré être premier, & moi je l'ai auſſi prouvé; car puiſque cette formule ne ſauroit admettre d'autres diviſeurs que de l'une & ou de l'autre de ces 2 formes $248n + 1$ & $248n + 63$, j'ai examiné tous les nombres premiers contenus dans ces deux formules juſqu'à 46339, dont aucun ne s'eſt trouvé diviſeur.

Cette progreſſion 41. 43. 47. 53. 61. 71. 83. 97. 113. 131 &c. dont le terme général eſt $41 - x + xx$, eſt d'autant plus remarquable que les 40 premiers termes ſont tous des nombres premiers.

MÉTAPHYSIQUE.

Les conſidérations que nous allons préſenter, ſont tirées du Diſcours que M. *Cochius* prononça le jour de ſon entrée à l'Académie, & qu'il fit rouler ſur divers objets appartenans à la Philoſophie, & particulierement à celle de *Leibnitz*.

Toutes nos connoissances tirent leur origine des sens; & notre ame destituée d'organes ne seroit pas plus capable d'exercer sa faculté de penser & d'en avoir une connoissance intime, qu'un Artiste privé d'outils le seroit d'exécuter les ouvrages de son Art. *Leibnitz* a dit que nous ne penserions pas même à la pensée, si nous ne nous rappellions certaines circonstances, ou particularités, que les sens nous fournissent.

La certitude de nos connoissances roule sur ces deux principes; l'expérience, & l'identité ou la contradiction.

Les premiers hommes qui se sont appliqués aux connoissances, se sont contentés des vérités de *sentiment*. Peu à peu on est allé plus loin.

L'Histoire marque trois âges de la Philosophie: l'*enfance*, où l'on ne rendoit raison que des premieres connoissances, acquises par la voie du *sentiment*. Les Philosophes de ce temps-là se bornoient à exciter le même sentiment dans ceux à qui ils parloient; & pour donner quelque relief à leurs enseignemens, ils les revêtoient des graces de la Poésie & de la Musique. La *jeunesse* est le tems où l'on commença d'élever le sentiment à des idées plus claires; où l'on abandonna le chant & la poésie; mais comme on sentit que les dogmes avoient besoin du secours de l'éloquence, on l'employa. C'étoit la méthode des Philosophes Grecs avant *Aristote*; ils attiroient les esprits à l'étude de la Philosophie par la maniere éloquente avec laquelle ils l'offroient: mais cette route n'étoit nullement propre à conduire à la certitude & à opérer la conviction. Enfin, quand on vit que la Philosophie n'acquiert de réalité & de force qu'au moyen des définitions précises & des démonstrations rigoureuses, on pensa à lui donner la forme de Science: c'est son *âge viril*, qui offre bien des vicissitudes depuis *Aristote* jusqu'à *Leibnitz*, auquel on peut attribuer la gloire de l'avoir conduit à sa maturité.

Le génie de ce grand-homme avoit réuni tout ce qui peut résulter de la nature & de l'industrie, de l'étude des Anciens & d'une méditation assidue. Il possédoit ces deux éminentes qualités, rarement jointes ensemble, la force & la vivacité du sentiment, la profondeur & la solidité du jugement.

Quelques ſecrets philoſophiques qu'il a devinés, prouvent cette vivacité de ſentiment à laquelle rien n'échappoit. Lors même que ſes recherches philoſophiques le conduiſoient vers un but déterminé, il ne laiſſoit pas de faire, comme en paſſant, une infinité de remarques, propres à répandre du jour ſur d'autres matieres intéreſſantes. Tels ſont les doutes qu'il a propoſés ſur l'invariabilité de la révolution tant journaliere qu'annuelle de la Terre, & même ſur la cauſe de la gravité: il propoſa des méthodes pour découvrir les changemens qui y arrivoient, au cas qu'il y en eût. Dans la Botanique, il avoit déjà conſeillé d'aſſocier la méthode ſexuelle aux autres. Il attribuoit aux plantes quelque perception ou appétit, mais foible & ſans faculté de réflêchir. Il avoit prédit qu'on trouveroit un jour des êtres moyens entre les plantes & les animaux; en un mot ſon flambeau diſſipoit déjà des obſcurités que le tems a fait pleinement ceſſer.

Sa profonde méditation ſe manifeſte dans tout ce qu'il nous a laiſſé ſur la Philoſophie. Il avoit tellement perfectionné ce talent qu'il trouvoit d'abord des facilités dans ce qui paroiſſoit le plus difficile aux autres; & que ſouvent auſſi il appercevoit des difficultés dans ce que les autres trouvoient facile. Cela venoit de ce que, non content des apparences, il ſondoit & pénétroit toujours auſſi avant qu'il lui étoit poſſible. Dès l'âge de quinze ans, il avoit paſſé des journées entieres dans la ſolitude & au fond des bois, délibérant ſur le choix qu'il feroit entre les différentes Sectes des anciens Philoſophes. Par là il avoit tellement augmenté les forces de ſon eſprit, qu'il étoit capable de répandre une grande lumiere ſur les matieres les plus profondes & les plus abſtraites; il joignoit à cela les beautés de l'élocution; il avoit même le talent rare d'égayer & d'embellir les matieres de métaphyſique, dont les plus ſublimes ont pris, pour ainſi dire, entre ſes mains un tour romanesque. Quand il tendoit vers quelque but, rien ne l'arrêtoit, & il ne ſe laiſſoit point décourager par des difficultés, communément regardées comme inſurmontables. Sa longue expérience l'avoit mis au fait des précautions à obſerver pour faire des progrès & des découvertes. Il recommandoit entr'autres fortement celle de ne pas trop accumuler d'obſervations, dans le deſſein d'étudier la Nature: un trop grand

nombre d'obſervations, ſelon lui, ne rend pas les choſes plus explicables; au contraire il y répand de la confuſion & embarraſſe le raiſonnement. Ce n'eſt pas la quantité, c'eſt le choix judicieux, qui conduit au bon uſage, aux applications importantes, aux découvertes d'un ordre diſtingué. *Newton* n'a conſtruit ſes admirables théories que d'après un petit nombre d'expériences.

Cet abus de multiplier les obſervations eſt ſurtout ordinaire & préjudiciable dans les recherches pſychologiques, parce que c'eſt peut-être la partie des connoiſſances humaines où il eſt le plus aiſé d'obſerver. Chacun, avec une médiocre attention, peut réfléchir ſur ce qui ſe paſſe en lui-même & ſur ce qu'il apperçoit dans les autres; mais il eſt ſuffiſamment connu qu'au lieu d'expliquer ainſi la nature de l'ame, on ne fait qu'embrouiller cette doctrine. De là toutes ces facultés imaginées & diſtinguées dans une ſubſtance ſimple telle que l'ame, tous ces inſtincts primitifs qui ne peuvent être ramenés à aucun principe commun, & de la réunion deſquels on croit pouvoir former la nature & développer l'eſſence de l'ame.

Un autre précepte capital de la méthode Leibnitienne conſiſte à pouſſer l'analyſe des idées auſſi loin qu'elle peut aller, & à ne pas s'arrêter tant qu'on voit le moyen d'arriver à une réſolution ultérieure. Cette analyſe exacte peut ſeule mener finalement à une connoiſſance ſolide, vraie & certaine: c'eſt elle qui dévoile l'intérieur des choſes, toujours caché à l'étude ſuperficielle; ſi l'objet de la méditation appartient à la claſſe des vérités dérivatives, elle fait parvenir au principe primitif; s'il eſt compoſé, en le décompoſant, on trouve que quelques-uns de ſes attributs tiennent à une qualité primitive commune, ce qui diminue le nombre des déterminations eſſentielles, & bannit toute ſuperfluité des définitions. L'examen de l'homme peut ſervir à prouver qu'une analyſe exacte, quand on a ſoin de la pouſſer aſſez loin, mene à la connoiſſance de la nature. En analyſant le corps, on n'y trouve rien qui puiſſe ſervir de prémiſſe propre à faire conclure que l'homme eſt doué de la faculté de penſer. Cela fait voir qu'il faut ajouter à la matiere & au méchaniſme corporel un principe immatériel pour rendre raiſon de la penſée & de ſes opérations. Alors la diſpute ſur la queſtion:

Si un corps organisé comme celui de l'homme peut penser, ou non? se réduit à une pure logomachie. Le corps pensera si on lui associe le principe, la force qui fait naître la pensée: sans quoi il ne pensera pas plus qu'un instrument de Musique ne fera entendre un son harmonieux, si aucun Musicien n'en joue; mais l'homme pensera conformément à la nature de l'organisation & à l'état actuel de la machine, comme le Musicien fera entendre une mélodie bonne ou mauvaise, suivant que l'instrument est lui-même bon ou mauvais, bien ou mal accordé. C'est ce qui a conduit *Leibnitz* à l'hypothese de l'Harmonie préétablie, que peu de personnes prennent dans le véritable sens de l'Auteur, qui savoit parfaitement que l'homme est *un*, & non pas *deux*, comme les deux horloges de *Huygens*. *Leibnitz* prétendoit que l'ame ne pouvant apporter aucun changement aux loix du mouvement, ni le corps à celles de la Logique, tandis que néanmoins les mouvemens du corps suivent les volontés de l'ame, & réciproquement les impressions que le corps éprouve sont transmises à l'ame, il faut, pour comprendre la possibilité de ce phénomene, supposer qu'il y a une harmonie entre les dispositions de l'un & de l'autre; & que c'est là le premier pas par où l'on remonte jusqu'à en trouver la raison. Ainsi *Leibnitz* n'a jamais pensé à nier un premier principe commun d'où dépendent tous les faits psychologiques & méchaniques que nous observons; mais il a déclaré qu'il n'entreprenoit pas de le définir.

Une troisieme précaution concerne les différentes méthodes de procéder dans l'analyse des idées. Il y a deux méthodes principales, dont l'une sert à la décomposition des quantités & l'autre à l'analyse des qualités: la premiere peut être appellée mathématique & la seconde logique. M. *Cochius* a réservé cette matiere pour un autre Mémoire, se contentant de remarquer en deux mots, que les contradictions fréquentes & inévitables dans les recherches sur l'Infini viennent principalement de la confusion des méthodes mathématiques, qui diminuent ou augmentent les quantités, & des méthodes philosophiques, qui analysent les qualités. Quand ceux qui emploient ces méthodes veulent empiéter sur le terrain les uns des autres, ils commettent aisément les plus étranges bévues. La question des élémens éprouve le même sort, par la même raison.

Leibnitz

Leibnitz a tracé une route où il eſt très avantageux de marcher après lui: cependant ſa philoſophie a le malheur de trouver plus de gens qui ſe plaiſent à la réfuter qu'il n'y en a qui s'occupent à l'étudier. Sans doute qu'on eſt rebuté par ſon tour laconique: car ſouvent il ſe contentoit d'énoncer la propoſition qu'il avoit trouvée, & d'en indiquer la raiſon. Il faiſoit comme un Surintendant des Bâtimens, qui donne l'idée & montre la place, laiſſant les détails du plan & de la conſtruction aux Architectes ſubalternes; mais les Architectes des ſyſtemes philoſophiques n'ont pas toujours bien ſaiſi l'idée du Surintendant.

De nos jours le terme de philoſophie a pris un ſens équivoque: tantôt on entend par là le ſimple bonſens, ou l'uſage de la réflexion; tantôt la ſcience fondée ſur des démonſtrations. Ces deux ſens doivent être employés à propos rélativement au but & aux circonſtances. Il y a des occaſions où les méthodes ſcientifiques feroient, pour ainſi dire, une triſte figure, & ſeroient tout à fait déplacées; mais en revanche, il y en a d'autres où le bonſens le plus épuré, ſans la ſcience, ne va pas loin & ne ſuffit pas.

NAVIGATION.

M. *de Bernieres*, l'un des quatre Contrôleurs généraux des Chauſſées & Ponts de France, a fait parvenir à l'Académie un Mémoire qu'il a adreſſé à pluſieurs autres Académies de l'Europe, où il annonce une découverte qui a été depuis longtems l'objet de ſes méditations & de ſes recherches, & qu'il croit digne de lui mériter l'eſtime des hommes. Elle conſiſte dans le moyen de conſtruire un bateau, un bac, un paquebot, une chaloupe, enfin tout bâtiment deſtiné à porter des hommes ſur les rivieres, & même ſur la mer, de côte en côte, ou dans des trajets de moyenne étendue, comme du Continent à une Ile, & réciproquement, d'un Royaume à un autre Royaume, &c. de façon que les Navigateurs n'auront point à craindre que leur bâtiment ſoit ſubmergé ni renverſé par les vents, les tempêtes, les

orages, les trombes même & les typhons qui ſont ſi redoutables pour les bâtimens ordinaires.

M. *de Bernieres* a exécuté, ſous les ordres de M. le Marquis *de Marigny*, qui les tenoit du Roi lui-même, un modele de 16 pieds de long ſur 8 de large, calculé pour porter 5 maîtres, 2 rameurs & un conducteur de gouvernail. Le 5 de Septembre 1771, le Roi étant à Choiſy, M. *de Bernieres* eut l'honneur de lui préſenter ce batelet, qui fut mis à diverſes épreuves dont S. M. parut ſatisfaite. Ces épreuves ont conſiſté à le ſurcharger avec des pierres en telle ſorte, que ne laiſſant hors de l'eau que ſa proue & ſa pouppe, la riviere paſſoit par deſſus librement d'un bord à l'autre, ſans que pour cela ce batelet ceſſât d'être à flot; & en cet état pluſieurs hommes auroient encore pu y monter.

L'Inventeur avoit propoſé enſuite de faire tirer dans les flancs du batelet 24 coups de fuſil à groſſes balles ou à lingots, leſquels auroient pu repréſenter, proportion gardée, 24 coups de boulets de canon dans un bâtiment plus grand, conſtruit ſur les mêmes principes & dans les formes que M. *de B.* prétend être en état de donner pour la mer. Le Roi préféra d'y faire percer 24 trous avec des tarieres de 14 pouces de long ſur un pouce de groſſeur, qui y furent enfoncées juſqu'au manche. S. M. vit ces 24 trous, ainſi que toute la Cour, & on ne les a point fait reboucher: ce batelet eſt depuis plus de deux ans ſur la riviere, ſans qu'il ait été néceſſaire d'en pomper une goutte d'eau. Si les chaloupes du Roi avoient paſſé autant de temps ſans être vuidées, elles auroient été plus de ſix fois à fond; mais le batelet, en vertu de ſa conſtruction, rend autant d'eau qu'il en reçoit, & ainſi il ſe débarraſſe de lui-même de l'eau qui ſubmergeroit tout autre.

Cette découverte, ſuivant ſon Auteur, intéreſſe toutes les Nations, ſon principe pouvant avec la même ſureté s'appliquer à une grande partie des conſtructions marines. Juſqu'à préſent M. *de B.* n'a eu en vue que la ſeule conſervation des hommes, parce qu'il ne met point de proportion entre leur vie & leur fortune. „Ce moyen, continue-t-il, tout nouveau, tout „naiſſant qu'il eſt, & par conſéquent bien loin encore de la perfection à la„quelle il peut s'élever & s'élevera un jour, ce que le tems & la néceſſité

„ameneront; ce moyen me met dès à préſent en état d'aſſurer que je puis „conſtruire, juſqu'à porter 100 hommes à la fois, avec les vivres, les „agrès & les apparaux néceſſaires à un trajet de plus de 100 lieues, ſans „que ces hommes ayent rien à craindre des événemens qui font périr les au-„tres bâtimens. Je ne connois que la vétuſté qui puiſſe détruire mes „conſtructions; mais c'eſt le ſort de la Nature entiere, duquel il n'eſt pas „au pouvoir de l'humanité de ſe garantir."

Ne pourroit-on point aſſigner une place à cette invention entre le ſcaphandre & le char volant?

MÉDECINE EXPÉRIMENTALE.

Nous rapporterons ici dans toute ſon étendue un Mémoire *ſur la méthode ſinguliere de guérir pluſieurs maladies par l'Emphyſéme artificiel*, envoyé à M. le Profeſſeur *Meckel*, pour être préſenté à l'Académie de la part de M. *D. H. Gallandat*, Membre de l'Académie Impériale des Curieux de la Nature, Membre & Tréſorier de la Société Zélandoiſe des Sciences, Opérateur Provincial de Zélande, & Démonſtrateur d'Anatomie, de Chirurgie & de l'Art des Accouchemens à Fleſſingue.

Il ſeroit à ſouhaiter que les gens éclairés qui voyagent dans les pays étrangers, & ſurtout ceux qui y vont pour exercer l'art de guérir, fiſſent une attention particuliere aux différens moyens que les gens du pays mettent en uſage pour opérer la guériſon des maladies qui y regnent, & qu'après en avoir acquis une connoiſſance exacte, ils en fiſſent part au Public. Ce ſeroit ſuivre le conſeil du Pere de la Médecine, qui nous recommande de n'avoir aucune honte d'apprendre des gens du commun des choſes qui peuvent, quoique très ſimples en apparence, donner lieu à faire des découvertes importantes dans l'art de guérir. L'inoculation de la petite vérole dont nous ſommes redevables aux Circaſſiens, & l'uſage du Quinquina que nous avons appris des Sauvages du Pérou, ſont des preuves bien frappantes de l'utilité du conſeil que ce grand homme nous a laiſſé. En effet la plûpart

des meilleurs remedes ont été découverts par des gens qui ignoroient absolument les regles & la théorie de l'art. Il ne faut pas s'en étonner; l'expérience a été & sera toujours chez tous les peuples le meilleur des maîtres. La vraie théorie de l'art de guérir n'est, dans bien des cas, qu'une conséquence de l'expérience; & il est très rare que la théorie, sans l'aide de quelque expérience antérieure, réponde à tous égards à la pratique.

Je me propose de faire voir dans ce Mémoire, qu'il ne faut pas toujours rejetter la maniere de guérir que des Peuples vivant dans la simplicité & la bassesse mettent en usage. Parmi les Peuples que l'on appelle Sauvages, les habitans de la Guinée sont généralement reconnus pour tels. Cependant la plûpart des Voyageurs qui ont eu occasion de les voir de près, attestenr qu'ils possedent plusieurs remedes salutaires qui nous sont inconnus: & le Chevalier *Des Marchais* nous apprend qu'ils ont parmi eux des Médecins & des Chirurgiens, qui, sans être Lettrés ni Gradués, operent par des remedes fort simples, dont ils ont soin de garder le secret, des guérisons qui pourroient faire honneur à nos Esculapes d'Europe. (*)

Ayant fait plusieurs voyages en Guinée en qualité de Chirurgien-Major de Vaisseau, j'ai eu occasion d'y voir traiter plusieurs maladies par des remedes qui nous sont inconnus. Celui que j'ai vu employer au Cap *La Hou* en 1756, est certainement de ce nombre, & mérite peut-être autant par sa singularité que par sa nouveauté, l'attention des gens de l'art. Voici de quoi il s'agit. Dans les marasmes, hypochondries, rhumatismes &c. quand les Chirurgiens du Cap *La Hou* voyent que les remedes ordinaires sont administrés sans succès, ils font, pour guérir leurs malades, une opération que j'appelle insufflation, ou *Emphysème artificiel.* Elle mérite ce nom à juste titre, puisqu'ils font à une & quelquefois aux deux jambes du malade, avec un instrument tranchant, une incision à la peau qui pénetre jusqu'au tissu cellulaire. Au moyen de cette ouverture ils portent un tuyau dans le tissu cellulaire, par lequel en soufflant ils insinuent autant d'air que le malade

(*) Dans ses *Voyages en Guinée*, publiés par le P. *Labat*, Tome I. p. 132. *Bosmann*, *Beschryvinge van Guinee*, 2 *Deel*, p. 7. est à peu près du même avis, & recommande fort la recherche de ces sortes de remedes.

peut fupporter, ou autant qu'ils le jugent à propos. L'air introduit de cette maniere occafionne bientôt un Emphyfeme univerfel. Enfuite ils retirent le tuyau de la plaie, & ils la referment avec un emplâtre agglutinatif, compofé de plufieurs gommes & réfines & un appareil convenable. Immédiatement après cette opération, ils donnent au malade une forte dofe d'une potion compofée de fucs de plantes, de jus de limons, de poivre de Guinée & d'eau de vie; après quoi ils font courir le malade autant qu'il peut, & enfuite extrémement fatigué, ils le font mettre au lit, où il effuie une fueur copieufe. Ils continuent à lui donner trois ou quatre fois par jour une forte dofe de la potion fusdite jufqu'à ce que l'enflure foit paffée & que le malade fe trouve guéri. L'enflure ou le gonflement occafionné par l'air infinué dans le tiffu cellulaire, commence ordinairement à diminuer le troifieme jour; & elle eft totalement diffipée vers le 9e, 10e, ou 11e jour. Quelquefois le Chirurgien eft obligé, pour obtenir la parfaite guérifon du malade, de faire une feconde fois l'opération; mais cela n'arrive que très rarement.

Voilà ce qui m'a été communiqué au fujet de cette opération fingulière, par un Chirurgien Negre, qui l'avoit fouvent pratiquée avec beaucoup de fuccès: j'ai vu une Négreffe, le lendemain après qu'il lui avoit fait cette opération, dont tout le corps (excepté la plante des pieds & la paume des mains) étoit encore gonflé par l'emphyfeme univerfel: & lorfque j'en touchois quelque partie, j'entendois un bruit femblable à celui que fait un morceau de parchemin fec quand on le preffe: j'ai parlé à plufieurs Negres à qui l'on avoit fait depuis longtems cette opération, & je n'en ai vu qu'un feul à qui on l'avoit faite pour la feconde fois.

Je crois que cette opération a été jufqu'à préfent inconnue en Europe, ou du moins qu'elle n'y a jamais été pratiquée pour guérir ou pour prévenir quelque maladie. Le traitement après l'opération a quelque rapport avec celui des Tartares, furtout la maniere de faire courir & fatiguer le malade. Lorfque les Tartares fe trouvent incommodés, dit le Chevalier *de Polignac*, on fait ouvrir la veine à un cheval, & on fait boire le fang tout chaud au malade: enfuite on fatigue beaucoup le malade, foit en le faifant courir

autant qu'il eſt poſſible, ou bien en le faiſant galopper à cheval. Lorſque Charles XII étoit à Bender, les Suédois de ſa ſuite n'ayant point de Chirurgiens pour les ſecourir dans leurs maladies, firent uſage de ce remede & s'en trouverent bien.

L'opération que les Scythes avoient coutume de faire aux jumens pour leur faire venir une plus grande quantité de lait, a beaucoup de rapport avec l'Emphyſeme artificiel des Negres. Hérodote rapporte, au commencement de ſon quatrieme Livre, intitulé *Melpomene*, qu'ils prenoient des tuyaux, les introduiſoient dans les parties génitales des jumens, & inſinuoient l'air dans ces parties en ſoufflant avec la bouche. Cette inſufflation, diſent-ils, fait gonfler les veines des mammelles, & produit une ſécrétion abondante de lait.

Qu'on puiſſe introduire de l'air de dehors en dedans, & enfler ainſi tout le tiſſu cellulaire, c'eſt ce que n'ignorent pas bien des mendians qui ſe font ainſi des maladies effrayantes par l'aſpect, dans le deſſein d'attirer des aumônes des paſſans. *Hildanus* entr'autres en rapporte un exemple ſingulier, Cent. III. Obſerv. 18. Les Bouchers uſent du même artifice pour donner à leurs viandes un coup d'œil ſéduiſant. Les Payſans, au rapport de M. *Mauchart*, (*) ſe ſervent quelquefois du même moyen pour engraiſſer en peu de temps les bœufs qu'ils veulent vendre, ou pour tirer de leurs vaches une plus grande quantité de lait. Ils font, comme il l'a appris d'eux, une ouverture à la peau, laquelle ouverture pénetre juſqu'au tiſſu cellulaire; après y avoir inſinué un peu d'air, ils la referment enſuite. Les deux ou trois jours qui ſuivent cette opération, l'animal eſt triſte & comme malade; mais la gayeté & l'appétit lui reviennent, & en ſix ſemaines il engraiſſe prodigieuſement. (**) La même opération faite à une vache lui fait donner une plus grande quantité de lait: il y a tout lieu de croi-

(*) *Diſſertatio medica de Emphyſemate, quam Præſide* Jo. Henr. Schultze P. P. *tuebatur* Car. Chriſt. Puſch, *Lignicenſis, Halæ, menſe Septembri, anno 1733.* Elle ſe trouve dans Haller, *Collect. Theſ. Med. Chirurg.* Tome II, & dans le même Ouvrage rédigé en François, T. I. p. 271.

(**) Un de mes amis, qui n'eſt ni Médecin ni Chirurgien, m'a auſſi aſſuré que cette même méthode d'engraiſſer les bœufs ſe pratique dans quelques contrées du Dannemarc.

re, dit M. *Mauchart*, que l'air insinué de cette façon & déployant son ressort, excite & provoque les sécrétions.

Je conclus de ce que je viens d'alléguer; 1°. Que quoique les Auteurs ne fassent pas mention de l'Emphyseme artificiel, dans leurs Traités des Opérations chirurgicales, il n'est pourtant pas tout à fait inconnu; 2°. Que cette opération n'est pas fort douloureuse, (*) ni dangereuse, puisqu'il n'est pas apparent que les mendians qui font usage de cet artifice, voulussent se soumettre à de grandes douleurs; & que, si elle étoit dangereuse, les paysans n'y risqueroient pas leurs bestiaux; 3°. Qu'elle est d'une grande utilité pour engraisser les bœufs & pour faire donner aux vaches une plus grande quantité de lait; 4°. Que si cette opération est d'une grande utilité dans ces cas, parce que l'air insinué de cette façon en déployant son ressort excite & provoque les sécrétions, on a tout lieu de croire qu'elle peut être utile dans plusieurs maladies qui attaquent le corps humain, & que par conséquent elle mérite l'attention de ceux qui exercent l'art de guérir.

On m'objectera peut-être que, quoiqu'il soit très aisé de concevoir la facilité que l'on a d'introduire l'air insufflé dans les plus petites parties du corps, à raison des cellules graisseuses qui répondent les unes aux autres, il sera toujours très difficile d'expliquer comment cet air introduit procure la guérison, d'autant plus que les malades attaqués d'Emphyseme universel à l'occasion de quelque plaie au poûmon, en sont ordinairement morts. L'insufflation, au lieu d'exciter & de faciliter les sécrétions, pourra au contraire les suspendre. L'air introduit dans toutes les petites cellules est un corps étranger qui doit nécessairement faire diminuer toutes les sécrétions, rallentir la circulation, gêner toutes les fonctions, & par conséquent causer la mort, comme on peut le voir par des Observations de M. *Littre* insérées dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, par celles de *Bartholin*, dans ses *Hist. Anat. rar.* & de plusieurs Auteurs célebres.

(*) Elle est certainement bien moins douloureuse que la cautérisation & l'application du *Moxa* recommandées contre des douleurs anciennes & opiniâtres, contre la goutte, & auxquelles plusieurs personnes se sont soumises. M. *Pouteau*, dans un Livre intitulé *Mélanges de Chirurgie*, a fort préconisé cette maniere de brûler, qu'il voudroit remettre en vogue. Certainement l'Emphyseme artificiel n'en aura pas les inconvéniens.

Je répons à cette objection ſpécieuſe, que je n'ignore pas que les grandes plaies du poûmon ſont abſolument mortelles; quoique d'un autre côté on trouve auſſi, dans les Auteurs, des Obſervations qui montrent que des plaies au poûmon ont été guéries; mais elles étoient ou légeres, ou à portée d'être panſées par un Chirurgien.

Dire que l'Emphyſeme univerſel eſt la cauſe de la mort de ces malades, c'eſt, ſi je ne me trompe, confondre l'effet avec la cauſe: car l'Emphyſeme ſurvenu en conſéquence de quelque bleſſure au poûmon, n'eſt qu'un ſymptôme occaſionné par la léſion de cet organe. Si l'on veut ſe donner la peine de feuilleter les Auteurs, on trouvera des cas de malades guéris d'un Emphyſeme ſurvenu en conſéquence d'une plaie légere au poûmon, & il y a peu de Chirurgiens d'Armée qui n'ayent vu de pareilles guériſons; d'où il réſulte que ces malades ne ſont pas morts de l'Emphyſeme, mais de la plaie au poûmon. Auſſi le ſavant M. *van Swieten* dit dans ſes *Commentaires ſur les Aphoriſmes de* Bœrhawe: „Lorſqu'à la ſuite d'une plaie à la poitrine le „malade meurt, & qu'après l'avoir ouvert on trouve le poûmon bleſſé, on a „raiſon de dire aux Juges que cette plaie a été la cauſe de ſa mort, quoique „des plaies au poûmon ayent été quelquefois guéries."

Que l'Emphyſeme univerſel & artificiel opéré ſuivant la méthode des Negres ne ſoit pas mortel, c'eſt une choſe dont chaque perſonne peut ſe convaincre par des expériences inconteſtables ſur les animaux. Je les ai répétées plus d'une fois en mon particulier, & en préſence de pluſieurs gens de l'art, & je ne ſuis pas le ſeul: un de mes amis (M. *Negre*, célebre Chirurgien & Accoucheur à Middelbourg,) qui n'étoit point du tout de mon opinion ſur cette opération, en a auſſi fait pluſieurs expériences ſur des chiens; & ce n'eſt qu'après des faits bien conſtatés qu'il a changé d'avis. Voici ce qu'il me marque ſur ce ſujet.

„Je ſuis actuellement d'un autre ſentiment que je n'étois avant que j'euſſe „fait les deux expériences de l'inſufflation. Comme mes propres expérien-„ces m'ont convaincu, il faut bien être du vôtre: cette opération pourra „devenir utile au genre humain; mais elle exige encore du tems avant que „d'être en vogue. Pour vous dire vrai, dans le commencement je craignois „fort

„ fort pour la réussite; mais actuellement, si j'avois occasion de la mettre en „ usage, je n'aurois pas peur de la proposer le premier. . ." Et dans une autre Lettre: „Je viens de faire pour la troisieme fois l'expérience de l'in- „ sufflation sur le chien qui a été le sujet d'une seconde expérience. J'ai fait „ la plaie comme à l'ordinaire avec un bistouri, après quoi j'y ai introduit un „ soufflet, (parce que je n'avois pas assez d'air dans mes poûmons pour pous- „ ser l'insufflation jusqu'au degré que je m'étois proposé,) au moyen duquel „ j'ai insinué l'air jusqu'au point que l'animal étoit d'une énorme grosseur. „ Pendant le tems de l'insufflation le chien n'a fait aucun mouvement pour „ s'échapper, & il ne faisoit aucun cri. Le seul lien dont je me suis servi „ étoit mon mouchoir autour de sa tête pour lui couvrir les yeux; ses pattes „ étoient libres; d'où il résulte que l'insufflation n'est pas douloureuse; car „ si elle l'étoit, l'animal auroit fait tout son possible pour s'échapper, & il au- „ roit fait des cris affreux. Après l'opération j'ai laissé la plaie aux soins de „ la Nature; j'ôtai le mouchoir de ses yeux & je l'appellai; il sauta de la ta- „ ble sur laquelle je l'avois mis, avec une vivacité surprenante. Il lécha la „ plaie, après quoi je lui donnai une tranche de pain qu'il mangea dans „ l'instant, & ensuite une écuelle de lait qu'il a d'abord avalée. Après tout „ cela je l'ai fait aller en rue, où il couroit sans difficulté après les autres „ chiens, mais il se secouoit fort souvent. Voilà en abrégé le résultat de „ de cette expérience: je serai charmé si elle peut aider à justifier cette opé- „ ration."

Après le détail de cette expérience, il feroit superflu d'en rapporter d'autres. Il suffit de faire remarquer que dans toutes les épreuves que M. *Negre* & moi avons faites sur des chiens, le gonflement occasionné par la présence de l'air contenu dans le tissu cellulaire de tout le corps, a commencé à diminuer le troisieme jour, & qu'il a été tout à fait dissipé le onzieme jour après l'opération.

Quant à la difficulté d'expliquer comment l'air introduit par l'insufflation suivant la méthode des Negres, produit la guérison, elle ne me paroit pas grande. Voici comment je conçois les bons effets de cette opération.

L'air élaſtique inſinué dans le tiſſu cellulaire comprime, irrite & augmente la tenſion des vaiſſeaux, en partie comme corps étranger, & en partie parce qu'il ſe raréfie par la chaleur en déployant ſon reſſort ; ce qui doit faire augmenter l'action diminuée des vaiſſeaux, & par conſéquent accélérer la circulation rallentie du ſang; ce qui doit auſſi provoquer les ſécrétions & les rendre plus abondantes. Cette explication me paroit trop ſimple & trop plauſible pour n'être pas la vraie. Auſſi n'ai-je pas balancé, d'après ce raiſonnement & les expériences ci-deſſus mentionnées, de conſeiller à pluſieurs Chirurgiens de vaiſſeaux qui vont en Afrique, d'en faire des épreuves ſur des Negres lorſque l'occaſion s'en préſenteroit; & j'ai eu la ſatisfaction d'apprendre que cette opération a été faite avec tout le ſuccès poſſible à un Negre en 1763, par M. *Takkemberg*, Chirurgien-Major du Vaiſſeau de *Chriſtophle*, à la rade de *Malembo*, ſur la côte d'*Angola* en Afrique. Voici le précis de cette obſervation, qui eſt inſérée dans les Mémoires de la Société Hollandoiſe des Sciences établie à *Harlem*, Tome VIII. Part. II.

Un jeune Negre, âgé d'environ dix ans, ſe plaignit le 16 Avril 1763 d'un mal de côté accampagné de toux, de fievre & d'une reſpiration gênée. M. *Takkemberg* crut que le malade étoit attaqué, ſinon d'une vraie, au moins d'une fauſſe pleuréſie. Il le ſaigna deux fois, & lui adminiſtra les remedes que l'art preſcrit dans ces ſortes de maladies, qui firent diminuer la fievre, le mal de côté & l'embarras de la poitrine; mais le malade ſe plaignit après, que les douleurs ſe répandoient par tout le corps; il lui fit faire uſage des remedes indiqués en pareil cas. Le malade fut attaqué le troiſieme jour d'un roidiſſement contre nature, qui ſe répandit & ſe fixa par tout le corps & dans les extrémités. Les remedes internes & externes furent adminiſtrés ſelon les regles de l'art; les bains, les véſicatoires, les frictions & les linimens convenables ne furent pas oubliés, mais ſans procurer le moindre ſoulagement; au contraire, le roidiſſement prit tellement le deſſus & augmenta au point que le malade ne pouvoit plus faire uſage de remedes internes; à peine pouvoit-il ſucer un peu d'eau entre les dents fermées; tout ſon corps devenu rigide & inflexible reſſembloit à un cadavre gelé; la pa-

role devint inintelligible; les levres se couvrirent d'une croûte brune, & ce qui découloit de sa bouche avoit une odeur cadavéreuse.

Tel étoit l'état de ce Negre le 29 Avril, treizieme jour de sa maladie. On le crut perdu, & le Capitaine du vaisseau trouva fort ridicule lorsque le Chirurgien lui demanda la permission de faire l'épreuve de l'Emphyseme artificiel à ce mourant. Cependant, après lui avoir fait observer qu'il n'y avoit rien à risquer, & qu'il valoit mieux employer un remede incertain que de ne rien faire, sa demande lui fut accordée. En conséquence, il se fit d'abord faire un tuyau de cuivre armé d'une embouchure de bois à un bout & rondelet à l'autre. Après avoir placé le malade (qui depuis cinq jours n'avoit rien pris qu'un peu d'eau) d'une maniere convenable pour faire l'opération, il fit une incision proportionnée au calibre du tuyau, dans la partie moyenne & interne de la jambe; & ayant introduit le tuyau environ deux travers de doigt sous la peau dans le tissu cellulaire, il commença à souffler en serrant en même tems les bords de la plaie avec les doigts pour empêcher l'air de ressortir. On voyoit l'air s'insinuer en faisant de petites bosses dans lesquelles on pouvoit sentir & remuer l'air insufflé. En continuant à souffler il vint à bout de faire non seulement que la jambe jusqu'aux orteils, mais aussi que tout le corps en fut enflé, de façon que l'emphyseme étoit universel. Après avoir retiré le tuyau, il appliqua un plumaceau avec un peu de baume de Pérou sur la plaie, & par dessus un emplâtre, une compresse & une bande assez serrée pour empêcher l'air de sortir. Une heure après l'opération, le malade commença à revivre; il demanda un fruit nommé *Banane*, qu'il suça entre ses dents, & le lendemain il se trouva en état d'ouvrir la bouche. Comme il se plaignoit d'une crudité de poitrine, on lui fit prendre plusieurs jours de suite un *Linctus* ou *Lohoc* pectoral; l'appétit revint: la rigidité des membres diminua à mesure que l'emphyseme se dissipoit, & le malade reprit en peu de temps, au grand étonnement des gens de l'équipage, sa santé & son embonpoint; & il a été vendu à Surinam en bon état & à bon prix. J'ai appris depuis, que ce Negre étoit encore en vie en 1769.

Voilà une expérience bien constatée d'un bon succès qui n'est pas équivoque. J'ai l'original de cette observation en main, il est signé par le Capitaine du vaisseau & par le Chirurgien qui a fait l'opération; de plus, j'ai parlé à plusieurs personnes de l'équipage qui en ont été témoins oculaires.

Je sai aussi de bonne part que cette opération a été faite depuis ce temslà à deux Negres à bord du vaisseau qui est arrivé ici l'année passée (1771); mais je n'en ai pu avoir le détail, attendu que le Chirurgien qui les a faites, est venu à mourir quelque temps avant l'arrivée du Vaisseau. Tout ce que j'en ai pu apprendre des gens de l'équipage, c'est qu'elle a très bien réussi à un Negre attaqué de marasme, & que le sujet à qui on a fait l'autre opération, étoit scorbutique, & qu'il est mort quelques jours après l'insufflation.

Ces faits qui sont autant de preuves décisives qui établissent la possibilité de l'opération, ne doivent cependant être regardés que comme des matériaux encore bruts, ou comme des masses informes. Des expériences multipliées pourront seules fixer nos doutes sur l'efficacité de cette nouvelle méthode; ce n'est que du temps qu'elle peut attendre ce qui lui manque, comme par exemple de pouvoir déterminer la quantité d'air qu'il faut insinuer dans le tissu cellulaire, attendu qu'il y a toute apparence que cela doit varier suivant la maladie, l'état, le tempérament, l'âge & les forces du malade. D'ailleurs, il est à présumer qu'une personne est plus facile à insuffler que l'autre; que l'exercice après l'opération est d'une grande utilité; & que lorsqu'il ne peut pas avoir lieu, on pourroit peut-être y substituer les frictions chaudes, &c.

Malgré ces doutes, il me semble que l'on peut conclure de tout ce que je viens de dire dans ce Mémoire, que l'emphyseme artificiel est une opération chirurgicale qui mérite l'attention des gens de l'art; c'est une nouvelle ressource qu'on pourroit employer en Europe dans plusieurs maladies chroniques, & dans celles dont le tissu cellulaire est le siege. Son efficacité dans le marasme semble être prouvée, tant par l'engraissement des animaux à qui l'on a fait cette opération, que par le bon succès qu'elle a chez les Negres; & il y a tout lieu de croire qu'elle est très propre à guérir les affections

rhumatiſmales, en particulier dans la ſciatique & dans tous les cas où l'humeur rhumatiſmale eſt fixée dans quelque endroit. Quoique cette humeur ſoit un fluide d'une nature qui nous eſt encore inconnu, nous pouvons préſumer, comme le remarque M. *Pouteau*, qu'elle eſt d'un caractere âcre, & même quelquefois cauſtique. Il n'eſt pas douteux qu'elle eſt hors des voies de la circulation, puiſqu'elle reſte fixée dans le même endroit; elle n'eſt donc pas dans les vaiſſeaux, mais répandue dans le tiſſu cellulaire. Cette humeur devient plus âcre lorſqu'elle eſt fixée dans le même endroit, que quand elle eſt errante, tant par ſa ſtagnation que parce qu'elle eſt raſſemblée dans un moindre eſpace: alors ſon impreſſion acrimonieuſe irrite les fibrilles nerveuſes & cauſe de cruelles douleurs; cette même impreſſion ſur les cellules que cette humeur occupe, en affoiblit la contexture & les met hors d'état de ſe débarraſſer de ce fluide étranger. Or, dans ce cas, l'Emphyſeme artificiel me paroit être un moyen efficace pour aider la Nature à ſe débarraſſer de ce fluide rhumatiſmal, en provoquant les ſécrétions par le méchaniſme que j'ai expliqué ci-devant; & l'expérience faite par M. *Takkemberg* à ce Negre, ſur qui tous les autres remedes que l'Art preſcrit ont été infructueux, ſemblent prouver ce que j'avance.

Puiſſent de nouvelles expériences diriger nos doutes, & nous faire connoître toute l'efficacité de cette nouvelle méthode!

* *
*

On a vu dans le Volume précédent, p. 33. que M. *T. Guindant*, Médecin de Paris, avoit fait préſenter à l'Académie, dans ſon Aſſemblée du 11 d'Avril 1771, un Ouvrage de ſa façon, intitulé *Expoſition des variations de la Nature dans l'eſpece humaine, où l'on demande ſi, poſées les Loix naturelles les plus générales ſur lesquelles portent l'ordre & l'harmonie du Corps humain, la Nature peut quelquefois s'en écarter*. M. le Conſeiller *de Francheville* s'étoit chargé de rendre compte de cet Ouvrage, dont il a lu en effet l'Analyſe dans l'Aſſemblée du 12 Mars 1772; & enſuite il a inſéré cette Analyſe dans ſa *Gazette Littéraire* du 6 & 13 Avril ſuivant, N. CCCCXIX & CCCCXX, auxquels nous renvoyons.

OUVRAGES IMPRIMÉS OU MANUSCRITS, MACHINES ET INVENTIONS, PRÉSENTÉS A L'ACADÉMIE PENDANT LE COURS DE L'ANNÉE 1772.

Dans l'Assemblée du 7 Janvier, le Sécretaire perpétuel a remis un *Projet d'Écriture universelle*, envoyé par M. l'Abbé *Maudru*.

Le 16 Janvier, le second Volume de l'*Abrégé chronologique de l'Histoire de Bourgogne* par M. *Mille*, a été présenté avec une Lettre de l'Auteur à l'Académie, qui a été lue.

M. le Professeur *de Castillon* a présenté le même jour de la part de l'Académie de Pise, des *Observations Astronomiques*, & une Théorie des Cometes en Latin.

M. le Directeur *Merian* a proposé, de la part d'une Société d'Académiciens qui veulent publier un Journal, qu'il leur soit permis de prendre au titre la qualité de Membres de l'Académie: ce qui leur a été accordé.

Le 30 Janvier, M. *Bernoulli* a lu une Lettre de M. *Pekko Davila*, qui promet d'envoyer des Curiosités naturelles à l'Académie, & une Lettre de Bologne qui contenoit des particularités littéraires.

S. M. la Reine de Suede a fait présent à l'Académie d'un beau portrait de M. *La Croze*, fait par le célebre Peintre *Pesne*. Il a été remis le 20 Février; & M. le Comte *de Redern* s'est chargé des très humbles remercîmens de l'Académie.

Le 27 Février, le Sécretaire perpétuel a remis une *Quadrature du Cercle* envoyée par un Négociant Allemand de Breslau. On fait mention de ces envois pour montrer que cette chimére roule encore dans bien des cerveaux d'où il n'y a pas moyen de la déloger.

Le 5 Mars a été lue une Lettre de S. M. adressée à l'Académie entiere, en réponse à celle que Lui avoient écrite quelques Académiciens en Lui envoyant le Prospectus de leur *Journal Littéraire*.

M. le Professeur *Toussaint* a demandé si ce Journal pourroit prendre le titre d'*Académique:* la négative a prévalu.

Le 2 Avril, le Sécretaire perpétuel a présenté le Tome I. des *Antiquités de Mayence* en Allemand, envoyé à l'Académie par son Auteur, le Pere *Fuchs*.

Le 30 Avril, le même a remis un Mémoire de M. *de Bernieres*, sur l'art de construire des Vaisseaux qui ne puissent être submergés. (Voyez ci-dessus.) M. *Lambert* s'est chargé de l'examiner, & a fait son rapport dans la séance suivante du 7 Mai.

Le 14 Mai, on a encore reçu une *Quadrature du Cercle*, & une Lettre Allemande sur les manufactures de toile peinte.

Le 21 Mai, M. *Bernoulli* a présenté le Tome II de son *Recueil pour les Astronomes*.

Le 18 Juin, le Sécretaire perpétuel a exhibé un Ordre du Roi, enjoignant l'examen d'une Dissertation imprimée de M. *de Kæsfeld*, sur un Moulin à élever l'eau. MM. *de la Grange* & *Lambert* s'en sont chargés.

— un autre ordre de S. M. concernant des pillules hydragogues, spécifique contre l'hydropisie, proposé dans un Ouvrage de M. *Janin*. M. le Conseiller privé & premier Médecin Cothenius s'est chargé d'en faire rapport.

— un Ouvrage Espagnol sur la construction des Vaisseaux, envoyé à l'Académie par son Auteur, Dom *George Juan*, Commandeur d'*Aliaga*.

Le 25 Juin, le Sécretaire perpétuel a présenté une Lettre de M. *Gallandat*, Démonstrateur d'Anatomie à Flessingue, accompagnée d'un Mémoire sur les cures qu'on peut opérer par l'Emphyseme artificiel. (Voyez ci-dessus.) M. le Directeur *Marggraf* s'est chargé d'examiner ce Mémoire & d'en faire rapport.

M. le Directeur *de la Grange* a rendu compte de la Machine hydraulique de M. *Kæsfeld;* & M. le Conseiller privé *Cothenius* des pillules hydragogues de M. *Janin*. Le précis de ces deux rapports a été envoyé à S. M.

Le 9 Juillet, le Sécretaire perpétuel a remis une Lettre Allemande écrite de Cologne, avec le projet d'une nouvelle Feuille périodique, de l'ordre de celles qu'on nomme *Billets d'Intelligence*.

Le 20 Août, le Sécretaire perpétuel a fait rapport qu'il avoit reçu d. part de M. *de Sozzy* une Brochure imprimée qu'il envoie à l'Académie, de la part de M. *Court de Gebelin* le Programme de l'Ouvrage qu'il a en pris, & depuis publié.

Le 27 Août, l'Académie a reçu deux Écrits de M. *Gardane*, l'un primé, l'autre manuscrit, *sur la gonorrhée & le mal vénérien.*

Le 3 Septembre, M. le Directeur *de la Grange* a rapporté que le *Garrone* lui avoit écrit de Turin, qu'il avoit trouvé le secret d'une cire bl dont il a présenté un échantillon.

Le 10 Septembre, le Sécretaire perpétuel a remis une Lettre & Imprimé *sur la Quadrature du Cercle*, envoyés de Stettin par M. *Klocko* M. *Lambert* s'est chargé du rapport.

M. le Directeur *Merian* a lu une Lettre concernant le Microscope M. *Dellebarre*, dont on propose à l'Academie de faire l'acquisition. Classes de Physique & de Mathématique sont convenues de s'entendre ce sujet.

Le 17 Septembre, le Sécretaire perpétuel a communiqué la découve faite à *Irkutzk*, des parties du squélete d'un Rhinoceros.

M. le Professeur *de Castillon* a rendu compte de quelques Ouvrag envoyés à l'Académie par M. *David*, Professeur de Chirurgie à Rouen

M. *Lambert* a fait le rapport de l'Écrit du Sr. *Klockow* sur la Quadrat re du Cercle.

Le 1 Octobre, on a présenté à l'Académie une séringue pour les ince dies, d'une nouvelle invention, avec un Mémoire destiné à l'expliquer. tout a été envoyé au Directoire général.

M. le Directeur *Merian* a lu une Lettre du Directoire général, qui p l'Académie d'examiner une terre dont il envoie un échantillon. M. le D recteur *Marggraf* s'est chargé de cet examen.

Le Sécretaire perpétuel a remis un Avis sur un *Dictionnaire de Nobless* en Allemand, qui est sous presse:

— une Lettre & un Mémoire de M. *Gariot* sur les Longitudes. M le Directeur *de la Grange* s'est chargé d'en rendre compte. Il s'en est ac

quitt

quitté dans la féance fuivante, & a dit que ce Mémoire ne méritoit aucune attention.

Le 15 Octobre, M. le Profeffeur *de Caftillon* a lu un extrait d'une Lettre de M. *Hahn*, Profeffeur d'Utrecht, qui rend le témoignage le plus avantageux au Microfcope de M. *Dellebarre.*

Le 22 Octobre, M. le Profeffeur *de Caftillon* a encore fait lecture d'une autre Lettre du même Profeffeur, où il s'agiffoit de l'accroiffement du poids d'un pyrophore, dans le tems où il brûle.

Le 5 Novembre, M. le Directeur *Merian* a été autorifé par l'Académie à faire venir le Microfcope de M. *Dellebarre.*

M. *Lambert* a préfenté l'Oraifon funebre de M. *Kowalewski*, favant Profeffeur de Kœnigsberg.

Le 12 Novembre, le Sécretaire perpétuel a remis le Recueil des Pieces du Procès de M. *Luneau de Boisjermain* contre les Libraires-Imprimeurs de l'Encyclopédie.

M. le Profeffeur *de Caftillon* a préfenté un deffin du Microfcope de M *Dellebarre*, avec l'explication.

M. *Bernoulli* a remis, de la part de M. le Profeffeur *Kæftner*, un Volume Allemand, contenant des Mémoires d'Aftronomie.

Le 7 Décembre, M. *Bernoulli* a lu un Avis publié par un Chymifte de Parme.

Les *Obfervations Aftronomiques*, faites à Pétersbourg par M. *Jean Albert Euler*, ont été préfentées régulierement tous les mois à l'Académie par le Sécretaire perpétuel, qui a fait parvenir réciproquement à M. *Euler* les *Obfervations Aftronomiques* faites à Berlin par M. *Beguelin.*

ÉLOGE
DE
M. ACHARD.

ANTOINE ACHARD nâquit à Geneve le 21 Décembre 1696. v. ſt. Son pere, fils d'un Miniſtre du Dauphiné, s'y étoit retiré peu de tems après la révocation de l'Édit de Nantes, & y avoit épouſé *Anne Pinault*, fille d'un des plus reſpectables Paſteurs de l'Égliſe de Geneve, & d'une famille originaire du Poitou.

Le jeune *Achard* marqua de bonne heure du penchant pour l'étude; & ſon pere lui fournit avec plaiſir tous les moyens de s'y appliquer & d'y réuſſir. Après avoir achevé la carriere des Humanités, il fit ſon Cours de Philoſophie, & ſoutint en 1712 avec ſuccès une Theſe publique *ſur le bonheur*. Il l'avoit lui-même compoſée; & le choix du ſujet ſembloit être un augure des deſtinées que la Providence lui réſervoit. Son goût décidé pour la Philoſophie l'engagea, pour ſe l'inculquer à lui-même encore mieux, à l'enſeigner à de jeunes gens qui entroient dans l'Auditoire dont il venoit de ſortir. Et je dirai à cette occaſion que M. *Achard* a conſervé pendant toute ſa vie cette diſpoſition à ouvrir l'eſprit des jeunes gens par des entretiens philoſophiques qui leur étoient extrêmement utiles. Il y mettoit beaucoup de netteté, donnoit une juſte idée des matieres, développoit les difficultés & propoſoit les ſolutions de la maniere la plus ſatisfaiſante. Je puis d'autant mieux en parler que j'ai eu l'avantage d'en profiter dans les années 1728, 29 & 30; & je puis aſſurer avec vérité que c'eſt ce que j'ai entendu de meilleur dans toutes mes études.

On fit à M. *Achard* la propoſition de ſe rendre à Lyon pour paſſer de là à Paris avec un jeune homme dont le pere ſe trouvoit actuelle-

ment engagé dans les affaires du Miſſiſſipi, & avoit la brillante perſpective d'une de ces fortunes qui furent de beaux ſonges, ſuivis d'un promt & accablant réveil. Il arriva dans cette Capitale au fort du jeu des Actions; & ayant été deſcendre à l'Hôtel *de Beaufort*, rue *Quinquempoix*, où logeoit le pere de ſon éleve, il fut au centre de ce tourbillon dont nous parlent les hiſtoires du Syſteme. Les ſcenes qui ſe paſſoient ſous ſes yeux, ſe graverent fortement dans ſa mémoire; & il a pris plaiſir juſqu'à la fin de ſa vie à les raconter fréquemment & d'une maniere fort détaillée.

Cependant le jeune Voyageur ſavoit que Paris renfermoit des objets plus dignes de ſon attention; & il ſe hâta d'en profiter. Il vit donc les Bibliotheques, & les Savans les plus diſtingués. Il eut pluſieurs entretiens avec le P. *le Long*, Prêtre & Bibliothécaire de l'Oratoire, homme très verſé dans l'Hiſtoire de France & d'un caractere affable. Mais celui avec qui il eut les liaiſons les plus particulieres, ce fut le célebre Pere *Tournemine*, qui le recevoit avec tant de bonté qu'il ne manquoit gueres de ſe rendre une fois par ſemaine à la Maiſon Profeſſe des Jéſuites, pour jouir de ſon entretien & lui propoſer des Queſtions qu'il préparoit d'avance, & à la diſcuſſion deſquelles le docte Jéſuite ſe prêtoit avec beaucoup de complaiſance. Auſſi, quand ils ſe ſéparerent, le Pere *de Tournemine* aſſura M. *Achard* qu'il ne paſſeroit jamais un jour ſans prier Dieu qu'il lui fît la grace de l'éclairer, & il lui donna de fortes lettres de recommandation pour le Pere *Colonia*, Jéſuite de Lyon. Le Pere *Hardouin* fut pour M. *Achard* un objet de curioſité plutôt que d'agrément & d'inſtruction. Il n'en put gueres tirer que des bruſqueries, dont le prétexte étoit l'héréſie à laquelle il vouloit l'obliger de renoncer. A en juger par les paradoxes de ce Pere, on ne l'auroit pas cru un ſi ardent Convertiſſeur.

N'oublions pas un plaiſir très vif que goûta M. *Achard*, en rencontrant à Paris le plus cher compagnon de ſes études, & ſon ami le plus intime pendant le reſte de ſa vie, malgré la diſtance des lieux où

ils ont vécu, M. *Vernet*, qui vit encore, & qui s'est fait par des Écrits très solides & très utiles, une réputation distinguée, & bien à l'abri des efforts qu'un Adversaire furieux a employés pour la ternir. La joie de se revoir fut réciproque pour les deux Amis; ils se promenoient tous les jours aux Thuileries, & s'y étant entretenus sur divers sujets de Morale, ils formerent du résultat de leurs entretiens quatre Dialogues qu'ils présenterent en Manuscrit avec une Épitre Dédicatoire à une Dame respectable de Geneve, dont ils avoient reçu plusieurs marques de bienveillance.

M. *Achard* quitta Paris, & revint par Lyon à Geneve, où il reprit avec ardeur ses études de Théologie sous le célebre *Alphonse Turretin*, l'un des plus grands hommes dans son genre que cette ville ait possédés. Il soutint en 1721 sous sa Présidence une These *sur le caractere de J. C. & de ses Apôtres:* & le Répondant se montra digne disciple de son Gamaliel. Il fut question ensuite de se préparer aux Examens pour le Ministere, qui sont très rigides à Geneve. M. *Achard* y satisfit; & en conséquence, suivant l'usage du pays où les jeunes Théologiens deviennent Ministres, sans avoir d'Église, il reçut l'imposition des mains en 1722, avec M. *Tronchin*, mort Professeur en Théologie à Geneve, & M. *Dumont*, mort Pasteur de l'Église de Berlin. Le Pasteur qui leur conféra l'ordination fut M. *Samuel Turretin*, cousin du célebre *Alphonse*, homme d'un mérite distingué, & dont la mort prématurée fut une perte très considérable pour l'Église de Geneve.

Peu après & dans la même année, M. *Achard* eut occasion de faire encore un voyage à Paris; mais il passa en grande partie à la campagne le peu de tems qu'il séjourna en France, & ne fit point de nouvelles connoissances. Il se hâta même de regagner sa Patrie, avec la ferme résolution de se livrer sérieusement à des études qui lui fissent réparer un tems que plusieurs distractions avoient jusqu'alors consumé, & le missent en état d'obtenir un poste dans l'Église ou dans l'Académie.

La Philoſophie, comme nous l'avons inſinué, étoit plus de ſon goût que la Théologie: il vint à en vaquer une Chaire, & il l'auroit diſputée ſans des raiſons d'amitié & la conſidération qu'il devoit à M. *Galatin*, Paſteur de Geneve, & fils d'un des premiers Magiſtrats de la République, qui obtint cette Chaire. En attendant une autre occaſion, il ſe forma entre M. *Achard* & ſes amis une Société, qui, tant par le choix des membres qui la compoſoient que par les matieres qu'on y traitoit, a fait une des plus agréables époques de ſa vie. Le ſujet de leurs Entretiens étoit l'Ouvrage de M. *s'Graveſände* ſur la Philoſophie de Newton; chacun en expliquoit un Chapitre à tour de rôle; & afin que rien ne leur manquât, ils avoient un guide, une eſpece d'Oracle, dans la perſonne d'un Savant, plus recommandable encore par ſa rare modeſtie que par ſes profondes connoiſſances. C'eſt M. *Abauzit*, ſur le mérite duquel il n'y a qu'une voix, tant de ceux qui l'ont connu perſonnellement, que de ceux qui ont été en correſpondance avec lui. Réfugié à Geneve, il y a fourni une longue carriere, ſans titres ni diſtinctions, mais jouiſſant de cette conſidération qui vaut infiniment mieux.

Le tems ſe paſſoit ainſi d'une maniere également gracieuſe & utile; mais il ne laiſſoit pas de s'écouler ſans que M. *Achard* vît encore, ni pût prévoir quel ſeroit l'emploi du reſte de ſa vie. Il étoit ſurtout bien éloigné de penſer qu'il eût près d'un demi-ſiecle à paſſer dans une autre contrée, & qu'il dût y jouir de tous les avantages dont il a été en quelque ſorte comblé. Voici comment les choſes ſe paſſerent. M. *David Ancillon*, Paſteur de l'Égliſe françoiſe du Werder à Berlin, étant mort vers le milieu de 1723, il s'agiſſoit de pourvoir à cette place par la voie ordinaire des élections, dans lesquelles on propoſe ſix ſujets au Troupeau. Un Candidat en Théologie (*), qui avoit connu particulierement M. *Achard* à Geneve, en parla comme d'un homme de mérite & d'un Prédicateur éloquent: & cela fit naître l'idée de l'inviter

(*) M. *de Boiſtiger*, qui eſt mort en 1744, Paſteur de l'Égliſe de la Friderichſtadt.

à venir se faire connoître. Il accepta l'invitation, & quitta Geneve le 2 Janvier, 1724. Vers les fêtes de Pâques il prêcha deux Dimanches de suite devant un Auditoire anssi brillant que nombreux; & le Prince Royal, aujourd'hui notre auguste Monarque, honora ces deux Sermons de Sa présence. Ils furent fort goûtés; & l'élection s'étant faite bientôt après, la grande pluralité des voix donna la préférence à M. *Achard* sur ses Concurrens: de sorte qu'il prit possession de la place vacante.

Un jeune Orateur, qui joint à une belle figure & à des dehors imposans tout ce qu'on appelle l'action, ou l'art de déclamer, & qui dit en même tems des choses intéressantes par un degré de clarté qui les met à la portée de tous ses Audireurs, par une diction élégante & ornée qui les accommode au goût des personnes d'un rang distingué, enfin par ce vrai pathétique qui émeut, qui étonne, qui touche & pénetre; un tel Orateur ne peut manquer de réunir tous les suffrages: & tel parut M. *Achard* dès la premiere fois qu'il monta en Chaire; tel est-il demeuré aussi longtems qu'on a eu la satisfaction de l'y voir. Il avoit admirablement saisi l'art ou le talent que le P. *Gisbert* recommande le plus dans son Traité de l'Éloquence Chrêtienne, *la belle popularité.* Je m'étendrois avec complaisance à rendre ici l'impression de cette espece de Magie oratoire, que j'ai tant de fois éprouvée, si l'objet étoit plus académique.

Dès ce moment M. *Achard* fut non seulement couru comme Prédicateur, mais recherché & fêté comme un homme aimable dans toutes les Sociétés, & surtout chez les Grands. Cela répand sans doute bien des agrémens sur la vie, mais il sentoit lui-même que cela dérange un peu celle d'un Ecclésiastique, qui a des devoirs nombreux à remplir, & des provisions, si je puis ainsi dire, à rassembler pour faire face à tous ces devoirs. Aussi ne se prêtoit-il souvent qu'à regret à cette dissipation, & déroboit aux heures de son repos celles que le Monde s'étoit appropriées. Sa constitution auroit demandé néanmoins de plus grands

ménagemens. Elle étoit assez singuliere. Jusqu'à l'âge de 20 ans il avoit joui de la plus parfaite santé, quoiqu'il n'eût vécu que de lait, par une répugnance invincible pour toutes sortes de viandes & de légumes. Trois ou quatre mois d'une application excessive à l'étude firent alors dans son tempérament une si grande révolution qu'il n'a jamais pu recouvrer sa premiere vigueur. La nécessité l'obligea cependant de renoncer à son ancien régime lorsqu'il eut quitté la maison paternelle; & depuis, les fréquens & grands repas, quoiqu'il y fût fort sobre, ont été probablement l'une des causes du désordre de sa santé pendant le reste de sa vie.

Entre les liaisons auxquelles M. *Achard* auroit voulu se soustraire, il ne faut pas en compter une dont le souvenir au contraire lui est demeuré toujours infiniment précieux. C'est celle qu'il eut l'honneur d'entretenir avec le Prince Royal jusqu'à son avénement au Thrône, soit dans des repas chez la Grande Gouvernante de la Maison Royale, Madame *de Rocoulle*, Dame d'un rare mérite, soit même par une correspondance dans laquelle le Prince lui proposoit quelques questions philosophiques à traiter & quelques difficultés à résoudre. M. *Achard* soutenoit ce personnage en Philosophe instruit & en Courtisan poli. Il savoit dire la vérité & l'assaisonner.

Il avoit déjà passé les cinq premieres années de son séjour à Berlin en pension dans une maison bourgeoise où il avoit tout l'agrément possible: & il ne paroissoit pas penser à renoncer au célibat. Mais il se présenta un mariage avantageux, & dans lequel les qualités estimables de la Demoiselle servirent plus à le déterminer que son bien. Il épousa donc en 1729 Mademoiselle *Marie Horguelin*, fille d'un riche Négociant de Breslau, avec laquelle il a goûté les douceurs d'une parfaite union, sans postérité, & qui lui survit.

L'opulence de M. *Achard* ne changea point ses sentimens ni ses mœurs; mais elle le mit en état de satisfaire le penchant qu'il avoit à vivre honorablement, à obliger ses amis, & surtout à faire du bien aux

pauvres. C'eſt par ce dernier endroit ſurtout qu'il n'a ceſſé de ſe rendre recommandable & vraiement reſpectable.

Des lettres de Geneve l'ayant averti qu'une tendre Mere ſentoit approcher ſa fin & ſouhaitoit encore de le voir, lui firent prendre la réſolution de s'acquitter de ce devoir filial. Il partit de Berlin le 2 Juin 1730, & eut le bonheur de mener avec lui le ſecond fils de M. le Maréchal Comte *de Finkenſtein*, qui eſt aujourd'hui premier Miniſtre du Cabinet. Ce jeune Seigneur alloit faire ſes études à Geneve; & une autre ſatisfaction bien ſenſible à M. *Achard* fut le choix que M. le Maréchal fit de M. ſon frere, auſſi notre Confrere, pour diriger le Comte & dans ſes études & dans ſes voyages. Pour achever le récit du ſéjour de M. *Achard* à Geneve, la Compagnie des Paſteurs, l'Académie & le Conſeil d'État lui donnerent les plus grandes marques de diſtinction & de confiance. Il prêcha deux fois & fut applaudi. Il laiſſa ſa mere encore vivante & vint retrouver ſon Épouſe après une abſence de ſix mois.

En Juillet 1738, le Roi le nomma Conſeiller du Conſiſtoire ſupérieur à la place de feu M. *de Beauſobre*. Cette diſtinction, quoique flatteuſe, lui fit de la peine, parce qu'il y avoit des Paſteurs plus anciens que lui, à qui cette place devoit être donnée. Il auroit bien voulu le repréſenter lui-même; mais la choſe n'étoit pas poſſible. C'étoit la volonté du Roi; & il n'y avoit d'autre parti que celui de l'obéiſſance.

Bientôt après le Roi qui avoit, comme l'on voit, une idée avantageuſe de M. *Achard*, voulut le faire coopérer au deſſein qu'il n'avoit jamais perdu de vue de procurer la réunion des Réformés avec les Luthériens. Le Monarque crut que la traduction d'un Ouvrage Allemand de M. *Reinbeck* ſur la Confeſſion d'Augsbourg, qui étoit fort goûté, contribueroit à l'avancement de cette bonne œuvre. Il y avoit à la vérité un obſtacle qui paroiſſoit inſurmontable, c'eſt que M. *Achard* n'entendoit pas la langue de l'Ouvrage qu'il devoit traduire. Cela ne

rebuta

rebuta pourtant pas le Roi, qui leva la difficulté, en disant qu'il n'y avoit qu'à employer quelque traducteur subalterne, & qu'ensuite M. *Achard* feroit la révision de concert avec M. *Reinbeck*. Le travail fut commencé en effet; mais la mort du Roi, suivie bientôt après de celle de M. *Reinbeck*, y fit renoncer.

Ce fut vers ce tems-là qu'une jaunisse opiniâtre accabla M. *Achard* avec tant de force & de durée qu'il fit venir de Geneve un de ses neveux qui avoit été reçu Ministre depuis peu, & qu'il prit pour Adjoint. C'étoit un digne Pasteur, dont la mort prématurée a été également douloureuse pour le Troupeau & pour Mrs. ses Oncles. L'âge alors avancé de M. *Achard* lui fit choisir un nouvel Adjoint en M. *Erman*, qui promettoit déjà tout ce qu'il a tenu depuis; & quand M. *Erman* succéda à M. *Pelloutier*, M. *Achard* fit venir de Magdebourg M. *Bocquet*, pour qui il a toujours eu l'affection la plus tendre & la mieux placée, & qui à présent remplit dignement sa place de Pasteur du Werder.

Le Roi ayant jugé à propos à son avénement au Thrône de remplir les places vacantes au Conseil François, en lui donnant le titre de *Grand-Directoire françois* & à ses Membres celui de *Conseillers Privés*, S. M. fit à M. *Achard* l'honneur de le mettre de ce nombre, & les Patentes lui en furent expédiées en date du 28 Septembre 1740.

En 1743, les Assemblées dont j'ai souvent parlé d'une Société qui précéda le renouvellement de l'Académie, ayant commencé chez M. le Maréchal *de Schmettau*,. & continué chez M. le Ministre d'État *de Borcke*, M. *Achard* y assista; & au renouvellement il fut aggrégé à l'Académie dans la Classe de Philosophie spéculative. Sa mauvaise santé lui fit bientôt demander la vétérance; mais, depuis quelques années, nous l'avons vu assister régulierement à nos Assemblées, & prendre beaucoup d'intérêt à tout ce qui concernoit l'honneur & le bien de l'Académie.

Il n'est pas difficile de comprendre pourquoi nous n'avons pas joui du fruit de ses lumieres, aussi bien que du plaisir de sa présence. Si

l'on veut cependant que je dise quelque chose de plus précis à cet égard, j'employerai les propres termes du défunt, que je tire d'un Manuscrit dont j'ai suivi le fil jusqu'à présent, & qu'il avoit expressément destiné à cet usage. Après y avoir raconté les principales particularités de sa vie & de ses études, il finit en disant: „On m'a souvent demandé pourquoi, „ayant eu l'honneur d'être membre de l'Académie depuis son renou„vellement, je n'avois jamais rien donné au Public? En voici les „raisons.

„La premiere a été le peu de cas que j'ai toujours fait de mes „compositions. Dès qu'en 1743 je fus déchargé de la plus grande „partie de mes fonctions pastorales, je tentai d'écrire sur quelque ma„tiere de Philosophie; j'avois même déjà assez de remarques sur la „question *de la liberté* pour en former un gros volume; mais outre „que j'étois très souvent interrompu dans mon travail par mes in„dispositions, quand je vins à repasser attentivement le tout, j'en fus „si peu content que je renonçai entierement à mon entreprise. Je „cherchois des éclaircissemens, & je ne trouvois que des difficultés.

„Ma seconde raison c'est que j'aurois voulu produire quelque „chose de neuf, & je ne trouvois rien qui n'eût déjà été dit. Je „me flattois, il est vrai, de répandre quelque jour sur plusieurs en„droits de l'excellent Traité de *Locke* sur l'Entendement humain; „mais les mêmes obstacles m'ont toujours arrêté. Ma santé se re„fusoit à toute méditation suivie, & j'étois obligé de quitter la „plume.

„Enfin 3°, le respect, peut-être outré, que j'ai toujours eu pour le „jugement du Public, m'a retenu. Je commençois & je ne finissois „rien. Ajoutez que m'étant moi-même souvent plaint de l'énorme quan„tité des Livres qui s'imprimoient, j'avois tout lieu de craindre qu'on ne „m'appliquât le reproche que je faisois aux autres."

Dans les dernieres années de sa vie, M. *Achard* s'est occupé à revoir ses Sermons, & même à en confier la révision à des amis qu'il en

croyoit capables. Il sembloit d'abord vouloir en publier un ou deux Volumes; mais il a aussi abandonné cette idée. Il est à souhaiter qu'on fasse un choix parmi ces Sermons; & qu'ils contribuent à l'édification de l'Église après sa mort, comme ils y ont contribué pendant sa vie.

M. *Achard* a fait, comme Conseiller Ecclésiastique, la visite de l'Église de Halle en 1741 avec M. *de Jariges*, mort Grand-Chancelier. Il vit à cette occasion les plus célebres Professeurs de ce tems-là, *Wolff*, *Hoffmann*, *Ludwig*, *Baumgarten*, *Bœhmer* &c. qui lui firent tout l'accueil qu'il méritoit. Il fit encore la visite des Églises de l'Uckermarck en 1753, & il se félicitoit d'avoir rendu alors ses hommages pour la premiere fois à S. A. S. Madame la Princesse héréditaire de Darmstadt, mere de notre auguste Princesse de Prusse. Il a toujours eu le plus grand accès auprès de toute la Maison Royale. S. A. S. Madame la Duchesse de Brunswick l'a honoré d'une correspondance dans laquelle régnoit la confiance la plus intime: & rien n'a été plus sensible pour lui, dans le cours de sa maladie, que d'être privé du bonheur d'en recevoir encore les assurances de sa propre bouche. La Reine Mere l'invitoit souvent, soit à prêcher, soit à sa table avec d'autres Savans, & particulierement avec M. *des Vignoles*, qui a été intimement lié avec lui jusqu'à la fin de sa longue carriere. La Reine, notre respectable Souveraine, a eu les mêmes bontés pour lui: & en dernier lieu la Reine de Suede lui a témoigné une bienveillance toute particuliere, & l'a honoré des plus tendres regrets. M. *Achard* méritoit ces distinctions par toutes sortes d'endroits, & surtout par le degré de sensibilité avec lequel il les recevoit.

Pour ne rien omettre des emplois & des fonctions de M. *Achard*, nous dirons encore qu'il étoit Inspecteur du College françois & Directeur d'une Fondation qu'on nomme *Maison de Charité*, ou *Maison Françoise*.

Les années s'accumuloient; on n'auroit pas cru que M. *Achard* dût pousser sa carriere aussi loin; & à d'autres égards l'exactitude de son

régime & la force de son organisation sembloient devoir encore prolonger sa vie. La décadence se faisoit sentir depuis quelque tems; ses empreintes se manifestoient sur le visage, dans la démarche, & quelquefois en conversation par le défaut, tantôt d'ouïe, & tantôt de mémoire. La derniere de nos assemblées à laquelle il ait assisté est celle du 27 Février. Je le vis malade le 12 Mars, & je désespérai de son rétablissement. C'étoit une hydropisie de poitrine, que de fortes évacuations semblerent dissiper d'abord, mais qui revint avec plus de force, & causa au malade des souffrances considérables par les suffocations dont elle étoit accompagnée. Il avoit prévu sa fin, il s'y étoit préparé & ne la craignoit point. Après de rudes combats il cessa de vivre le 2 Mai, à huit heures du soir, âgé de 75 ans & 4 mois. Il est aisé de réunir les traits de son caractere répandus dans cet Éloge, & d'en conclurre qu'il avoit un droit incontestable au Monument que je viens de lui ériger.



NOUVEAUX

NOUVEAUX MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES.

CLASSE DE PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALE.



EXPÉRIENCES CHYMIQUES
ſur diverſes parties du Tilleul.

PAR M. MARGGRAF. (*)

Traduit de l'Allemand.

I.

OCCASION qui m'a engagé à ce travail eſt une Lettre du 16 Juin 1772, que je reçus de Potsdam, & où l'on me mandoit que Sa Majeſté ſouhaitoit que je fiſſe quelques expériences pour vérifier ce qu'avoit avancé un Médecin François, nommé M. *Miſſa*, au ſujet de la préparation d'un Chocolat tiré des fruits du Tilleul & de ſes fleurs, qui préparés enſemble réuniſſoient les propriétés, le goût & l'odeur du Cacao & de la Vanille. M. *Miſſa* eſt le premier qui ait obſervé que les fruits du Tilleul donnent un beurre qui eſt tout-à-fait ſemblable à celui du Cacao, ayant le même goût & donnant la même pâte que le Cacao. Pour m'aſſurer mieux ſur quoi toutes ces aſſertions étoient fondées, je fis les expériences ſuivantes.

(*) Lû le 14 Janvier 1773.

II. Comme ce qu'il y a de bien odorant dans le Tilleul consiste principalement dans les fleurs, & que chez nous la pleine efflorescence de cet arbre arrive pour l'ordinaire vers le milieu du mois de Juillet, j'eus soin de faire cueillir une bonne & suffisante quantité de ces fleurs, tout-à-fait court, & bien dégagées de toutes les queues & des petites feuilles. J'en fis sécher la moitié à l'air, & je conservai les autres fraîches. Je remplis de celles-ci un vaisseau à distiller ordinaire jusqu'à la moitié, je versai dessus de l'eau bien nette autant qu'il convenoit, & je fis sortir par la distillation à la maniere ordinaire avec une chaleur bouillante environ deux quartes d'une liqueur qui avoit une fort bonne odeur, pareille à celle de la fleur de tilleul. J'en procurai encore une couple de fois la cohobation sur des fleurs fraîches;
N°. 1. mais cela ne me procura aucune huile que je pusse en séparer.

III. Je pressai dans un linge bien net ce qui étoit resté de cette distillation dans le vaisseau, je le laissai reposer, j'en fis écouler la liqueur claire, qui se sépara des parties pulvérulentes, lesquelles demeurerent au fond du vaisseau, & au moyen d'une chaleur convenable j'obtins par l'évaporation une matiere de la consistance d'un miel médiocrement épais: ce qui
N°. 2. me donna un extrait douceâtre dont l'odeur n'étoit pas désagréable.

IV. Je délayai cet extrait avec autant d'eau nette qu'il en falloit pour qu'un œuf frais pût y surnager; j'y joignis un peu de levain pour mettre le tout en fermentation, je le plaçai dans un endroit où la chaleur étoit entre le 65 & le 70e degré du Thermometre de Fahrenheit. Le mouvement de la fermentation s'y fit bientôt appercevoir; & l'ayant laissé durer pendant quatre semaines, ce mélange se changea en une liqueur vineuse, qui donna, au moyen d'une distillation convenable & de la rectification dont elle fut
N°. 3. suivie, un fort bon esprit de vin.

V. Cet esprit de vin que j'avois ainsi tiré des parties de la fleur de tilleul qui étoient demeurées après la distillation, m'engagea à essayer si la fleur toute fraîche du tilleul, par la simple addition de l'eau nette, sans le mélange d'aucune substance qui y produisît la fermentation, pourroit se disposer d'elle-même à fermenter. Je remplis donc bien exactement de ces fleurs une bouteille de verre qui pouvoit contenir quatre à cinq quartes,

je les y pressai même un peu; puis j'y versai de l'eau nette distillée jusqu'à ce qu'elles en fussent toutes couvertes. Ensuite, après avoir couvert l'orifice de cette bouteille d'un simple papier, je la mis dans une chambre où la chaleur étoit entre le 65 & le 70e degré du Thermometre. Le mélange, après avoir reposé douze heures, commença à fermenter de lui-même; & après que cette fermentation eut duré quatre semaines, cette liqueur vineuse me donna par la distillation suivie de la rectification, un esprit de vin dont l'odeur étoit beaucoup plus agréable que celle du précédent. N°. 4.

VI. Alors je me proposai d'essayer ce qui résultoit des mêmes opérations faites sur les fleurs séchées à l'air. Pour cet effet j'en remplis de la même maniere une bouteille de pareille grosseur, je versai dessus de l'eau distillée, & je plaçai ce mélange dans une chambre au même degré de chaleur. La fermentation commença dans le même espace de tems; & au bout de quatre semaines, j'eus une liqueur vineuse qui, par la distillation & la rectification, donna pareillement un bel esprit de vin, mais dont l'odeur n'étoit pas aussi agréable que celle du précédent tiré des fleurs fraîches. Il N°. 5. est aisé d'inférer de là qu'il faudroit cueillir ces fleurs à la fois en grande quantité, & les conserver pour un même usage, si cela ne préjudicioit pas aux arbres; & qu'alors elles fourniroient une matiere dont on feroit un bon & agréable brandevin, qu'on pourroit préparer en tout tems, sans y joindre ni grain, ni aucune autre substance semblable.

VII. Les expériences précédentes me donnerent l'envie d'en faire de pareilles sur les feuilles de tilleul. Pour cet effet j'en fis cueillir en quantité, au commencement de Septembre, aussi fort courtes, & sans y laisser de queues. J'en fis sécher une partie en plein air, & je les gardai. Je pris une bonne portion de feuilles fraîches, je les distillai de la même maniere que les fleurs; & j'en tirai une eau dont l'odeur à la vérité n'étoit pas désagréable, mais qui n'approchoit pas de l'odeur de celle de la distillation des fleurs. J'employai, comme ci-dessus, une couple de cohobations sur des feuilles fraîches; ce qui ne me donna non plus aucune huile que je pûsse en séparer, quoique cette eau sentît beaucoup les feuilles. Je procédai avec N°. 6. ce qui étoit resté dans le vaisseau comme il a été rapporté §§. II & III au

ſujet des fleurs; & j'obtins de même, par une douce évaporation, un extrait douceâtre, dont l'odeur n'étoit pas déſagréable, où au bout de quelque tems ſe formerent des cryſtaux ſalins, que j'ai encore deſſein de ſou-
N°. 7. mettre à des épreuves. Cet extrait tiré des feuilles ayant été traité comme celui des fleurs §. IV. a pareillement donné, par la diſtillation & la rectifi-
N°. 8. cation, un bon eſprit de vin.

VIII. Il en fut auſſi des feuilles à peu près comme des fleurs, par rapport aux procédés énoncés dans les §§. V & VI. Les feuilles tant fraîches que ſeches, ſur leſquelles j'avois verſé de l'eau, ont commencé à fermenter au bout d'un court eſpace de tems. Et j'en ai tiré de même, par la diſtillation & la rectification, un fort bon eſprit de vin, mais dont
N°s. 9 & 10. l'odeur n'étoit pas auſſi agréable que celle de l'eſprit de vin tiré des fleurs.

IX. J'ai auſſi pris quatre onces des feuilles de tilleul ſéchées à l'air, & je les ai miſes en digeſtion avec une quantité ſuffiſante de l'eſprit de vin le plus rectifié; j'ai filtré la liqueur que j'en avois exprimée, j'ai procuré par la diſtillation l'abſtraction de l'eſprit ſuperflu, & j'ai trouvé que l'extrait qui en étoit demeuré, ſe ſéparoit en deux parties, dont l'une comme une réſine pure étoit au fond du vaiſſeau, recouverte d'un peu de ſubſtance fluide comme du miel, que je ſéparai de la partie réſineuſe en y verſant de l'eau tiede; & l'ayant de nouveau épaiſſie à la chaleur, elle devint comme un
N°s. 11 & 12. miel purifié, ayant auſſi le goût douceâtre.

X. Il étoit queſtion de paſſer aux fruits du tilleul, que je ne pus me procurer qu'à la fin d'Octobre. En ayant raſſemblé une quantité ſuffiſante, je trouvai que chaque capſule renfermoit un ou tout au plus deux grains, ou ſemences, dont la groſſeur étoit celle d'un fort grain de chanvre, & qu'on avoit de la peine à les ſéparer de leur enveloppe. Ces grains ſont couverts d'une eſpece de croûte mince, qui contient un noyau huileux dont le goût
N°s. 13 & 14. reſſemble à celui de l'amande. J'en fis l'objet des expériences ſuivantes.

XI. Je fis médiocrement piler dans un mortier de fer deux onces de cette ſemence de tilleul bien nettoyée; je les mis auſſi ſous une forte preſſe où elles furent comprimées à la maniere ordinaire; & cela me donna à la vérité quelque peu d'huile exprimée, mais qui n'alloit pas au

delà de vint grains. Je fis presser une autre quantité pareille de ces graines à chaud, & cela produisit encore moins d'huile. Le goût de cette huile approchoit de celui de l'huile d'amande fraîchement exprimée; mais elle ne se durcit point comme celle qu'on tire des graines de Cacao, qui au froid devient une espece de beurre: au contraire elle conserva toujours sa fluidité, comme le fait l'huile d'amande. Nos. 15 &

XII. Je fis ensuite griller de ces graines de tilleul, de la même maniere qu'on grille celles de Cacao quand on veut faire du Chocolat, c'est à dire, jusqu'à ce qu'elles deviennent d'un brun clair. Je les concassai ensuite de façon que l'écaille extérieure se détachoit aisément de l'intérieure, & qu'en secouant & soufflant on parvenoit à les nettoyer assez bien. Je les fis ensuite piler dans un mortier de fer jusqu'à ce qu'il s'en fit une pâte cohérente, que je fis fortement comprimer dans une presse chaude; & cela me donna une bonne quantité d'huile, plus grande que celle qu'avoient fourni les graines non roties; mais cette huile, comme celle dont il a été fait mention au §. XI, ne prenoit point la consistance du beurre, comme celle de Cacao, & demeuroit toujours fluide comme l'huile d'amande. Cela fait qu'un Chocolat préparé de cette graine de No. 17.
tilleul ne peut jamais durcir comme celui du Cacao, & qu'il devient plutôt rance.

XIII. Je pris encore deux onces de cette graine de tilleul, je les fis griller, je séparai les écailles de la façon indiquée dans le §. précédent, je les fis piler dans un mortier chaud jusqu'à une pâte cohérente, & j'en tirai une espece de Chocolat, qui a bien quelque ressemblance avec celui du Cacao, mais qui ne laisse pas d'en différer beaucoup quant à la consistance, à l'odeur & au goût. J'en fis deux portions; j'inférai dans Nos. 18 & 1
l'une trois dragmes de sucre pilé, ce qui ne la rendit pas fort différente de l'autre, à un peu de douceur près que lui donnoit ce sucre; en l'enveloppant dans un simple papier, elle le graissoit beaucoup, ce qui n'arrive point avec le Chocolat ordinaire.

XIV. J'ai procédé de la même maniere avec des amandes douces, en y ajoutant du sucre, ou sans en ajouter; & j'en ai fait de même une

espece de Chocolat, mais encore plus mou & plus graisseux que le précédent. Je lui trouve pourtant le goût meilleur. On peut en juger par ces
Nos. 20 & 21. échantillons. (*)

XV. Je présente aussi une pâte faite de graines de Cacao, en procédant des différentes manieres susdites, tant avec du sucre que sans sucre,
Nos. 22 & 23. afin qu'on puisse en observer les différences. Si avec cela on compare les fraix nécessaires pour recueillir la graine du tilleul, la séparer de ses écorces &c. avec le prix du Cacao, (pour ne pas parler des amandes douces, qui sont à beaucoup meilleur marché,) je crois qu'on aura peine à se résoudre à faire du Chocolat de graines de tilleul plutôt que de Cacao. Il est pourtant vrai que les différentes parties du tilleul, spécialement les fleurs & les feuilles, peuvent être utilement appliquées à des usages économiques; ainsi je ne doute point que cela ne puisse conduire dans la suite à quelques autres travaux intéressans, auxquels je me propose de revenir dans la suite.

(*) Les Numéros indiqués à la marge se rapportent à ces divers échantillons que M. *Marggraf* a fait voir à l'Académie, à mesure qu'il lisoit son Mémoire.



SUR

SUR
LE FROTTEMENT
entant qu'il rallentit le mouvement.

PAR M. LAMBERT.

§. 1.

On reconnoit généralement que pour juger de l'effet d'une machine il ne suffit pas de la considérer simplement dans son état d'équilibre, mais que le frottement qu'elle souffre dans ses différentes parties doit nécessairement entrer en ligne de compte. Ce n'est cependant que vers la fin du siecle passé qu'on a commencé à en examiner les effets, tant par la théorie que par l'expérience. Je ne retracerai pas l'histoire de ce qu'on a fait à cet égard. Il suffira ici d'observer qu'on s'est ordinairement borné à déterminer de combien dans chaque machine il faut augmenter la force mouvante pour qu'elle commence à vaincre le frottement. On a cru assez généralement que l'effet du frottement étoit le même, ou demandoit la même augmentation de la force mouvante, quelle que pût être la vitesse du mouvement de la machine. C'étoit cependant là ce qu'on pouvoit croire de plus paradoxe. Aussi Mr. *de Musschenbroeck* s'en douta bien, & les expériences qu'il fit au moyen de son *Tribometre* lui firent voir le contraire, du moins de la façon dont il envisageoit la chose. Car du reste ces expériences ne sont pas ce qu'il a fait ou imaginé de mieux.

§. 2. Mais considérons d'abord la chose en elle-même. Il me paroit évident que les parties des machines exposées au frottement reçoivent continuellement de petits chocs dans les particules éminentes de leur surface. Chacun de ces petits chocs contribue à s'opposer au mouvement & à le rallentir, à proportion que l'inégalité de la surface, la pression & la vitesse sont plus grandes. Quelques-unes des particules éminentes sont déprimées,

d'autres font froiffées, & c'eft de là que réfulte le double effet du frottement que perfonne n'ignore, c'eft que le frottement *polit* la furface & l'*ufe*.

§. 3. Voici donc ce que je crois pouvoir établir. Que la furface qui eft frottée parcoure l'élément de l'efpace dx, elle rencontre un certain nombre d'obftacles, & ce nombre eft proporrionel à dx. Chaque obftacle diminue la viteffe à proportion qu'elle eft plus grande. Cela fait immédiatement de la théorie du choc des corps. Ainfi nommant la viteffe $= c$, on aura

$$- a\,dc = c\,dx.$$

§. 4. Cette formule eft la méme que celle qu'on trouve pour la réfiftance des fluides, que l'on peut également déduire de la théorie du choc des corps. Auffi la différence entre la réfiftance des fluides, & celle qui réfulte du frottement des corps, ne me paroit pas être fort grande. Car dans l'un & l'autre cas il y a des particules déplacées & écartées. Toute la différence qu'il y a c'eft que dans le frottement les particules, pour être déplacées, demandent plus d'effort & diminuent la viteffe plus confidérablement.

§. 5. L'analogie que je viens d'établir entre le frottement & la réfiftance des fluides, me difpenfe d'expofer ici toutes les formules qu'on peut déduire de la formule générale

$$- a\,dc = c\,dx.$$

Je m'en rapporterai donc fimplement au Mémoire que j'ai lu à l'Académie en 1765, & qui fe trouve dans le Volume de cette année. Il s'agira principalement d'en appliquer les réfultats à quelques expériences, afin de voir comment elles s'accorderont avec cette théorie.

§. 6. Les expériences dont je ferai ufage fe trouvent depuis 1751 dans un petit mais excellent Ouvrage allemand de Mr. *Schober*, qu'il intitule: Verfuch einer Theorie von der Uebertwucht, qu'on pourroit peut-être traduire par *Effai d'une théorie de la prépondérance.* Cet Ouvrage ren-

ferme, outre une bonne théorie, un assez grand nombre de très belles expériences, dont le but est de faire voir comment la force accélératrice de la gravité est diminuée tant par des contrepoids que par l'inertie & par le frottement, entant que l'effet du frottement, ou est très petit, ou peut être regardé, sinon comme indépendant de la vitesse, du moins comme y étant sensiblement proportionel. Mr. *Schober* applique sa théorie à la plus grande partie de ses expériences avec assez de succès. Aussi Mrs. *Kæstner* & *Karsten* n'ont-ils pas manqué d'en tirer parti dans leurs élémens de Mathématiques. Car dans ces sortes de recherches les expériences bien entendues & bien exécutées ne sont pas encore fort fréquentes, & on doit savoir bon gré à Mr. *Schober* d'avoir publié celles qu'il a faites.

§. 7. Mr. *Schober* cependant soupçonne que l'opinion assez généralement reçue sur la quantité constante du frottement n'est pas trop juste, parce que l'action de la force mouvante cessant ou étant arrêtée tout d'un coup, le mouvement des parties se rallentit très sensiblement & enfin tout rentre dans le repos. Il ajoute que la machine étant une fois en mouvement, il faut assez peu de force pour le continuer, mais qu'il laisse cette discussion à quelque grand théoréticien. Mais quoique suivant cela Mr. *Schober* renonce à ces recherches, il ne laisse pas de rapporter les expériences qu'il a faites là-dessus, & qui sont très bien imaginées. Elles sont destinées à servir de confirmation à la théorie, & c'est rendre justice à Mr. *Schober* que de les y employer. Voici donc d'abord les expériences.

§. 8. Qu'on se figure quatre roues dentées & engrenant dans leurs pignons. Celle d'en-bas a 72 dents, son pignon en a 12. La seconde a 64 dents, son pignon 8. La troisieme a 56 dents, son pignon 8. La quatrieme a 48 dents, son pignon 6. A l'essieu de ce dernier pignon se trouvoit affermie une platine circulaire ou un disque de plomb, de 4 pouces de diametre & de $4\frac{1}{4}$ lignes d'épaisseur, pesant 4 livres $14\frac{3}{4}$ onces, poids de Cologne. A l'essieu de la roue d'en-bas étoit affermi un cylindre dont la circonférence étoit de $1\frac{14}{100}$ pied de Paris. C'est à ce cylindre qu'on appliqua les poids qui devoient faire tourner les roues & le disque. M. *Schober*

y appliqua encore une clochette, qui devoit ſonner toutes les fois que le poids en devidant le fil faiſoit faire un demi-tour au cylindre, & par conſéquent 3 tours à la ſeconde roue, 24 tours à la troiſieme, 168 tours à la quatrieme, ou enfin 1344 tours au diſque. C'eſt ainſi qu'il étoit fort facile de compter les ſecondes de tems que le cylindre employoit pour chaque demi-tour, tandis que la machine continuoit ſon jeu. Mr. *Schober* répéta l'expérience quatre fois en employant des poids de 15, 20, 25 & 30 livres. Voici maintenant les réſultats.

Demi-tours du cylindre.	Poids de 15 livres.	Poids de 20 livres.	Poids de 25 livres.	Poids de 30 livres.
1	385″	294″	241″	213″
2	163	125	104	93
3	122	98	87	75
4	117	87	75	64
5	109	78	66	56
6	105	71	61	52
7	103	67	56	49
8	102	63	54	46
9	100	60	50	45
10	101	58	48	43
11	100	56	47	41
12	99	55	46	43*

Il y a apparence que le dernier nombre 43 doit être 40; peut-être qu'il y a là une faute d'impreſſion.

§. 9. Comme dans chaque demi-tour du cylindre le poids deſcendoit de $\frac{57}{100}$ d'un pied, on voit que pour chacune de ces deſcentes le nombre de ſecondes étoit & fort grand & fort inégal. Le poids deſcendoit donc fort lentement. Il devoit d'abord vaincre l'inertie du diſque de plomb. Et s'il n'y avoit point eu de frottement, cela n'auroit pas empêché le poids de deſcendre d'un mouvement uniformément accéléré, en ſorte que pour les quatre premiers demi-tours du cylindre il n'eût fallu que le double du tems que demandoit le premier demi-tour. Mais le frottement empêcha cette accélération uniforme. On voit, tout au contraire, que la

vitesse de la rotation du cylindre étoit asymptotique, & qu'après les 6 premiers tours ou les 12 premiers demi-tours elle devint sensiblement constante dans toutes les quatre expériences.

§. 10. Or comme l'effet du frottement revient à celui de la résistance des fluides, on voit que ce cas est entierement analogue à celui de la descente d'un corps dont la gravité spécifique n'est gueres plus grande que celle du fluide dans lequel il descend, à commencer du repos. Et comme ici il ne s'agit que de comparer le tems avec l'espace parcouru, nous pourrons nous en tenir aux formules

$$c : C = \cos 2\omega,$$

$$x = a. \log. \operatorname{cosec} 2\omega,$$

$$\tau = \frac{a}{C}. \log. \cot \omega,$$

que j'ai données dans le Mémoire *sur la résistance des fluides* cité ci-dessus.

§. 11. Dans ces formules le tems τ se compte du commencement de la descente, de même que l'espace parcouru x. Ensuite c est la vitesse qui répond à un tems quelconque τ, & C est la vitesse terminale, ou qui répond à un tems infini. Enfin a est une constante qui dépend des circonstances particulieres des expériences, & des unités qu'on met pour base.

§. 12. Comme donc le tems τ doit être compté du commencement, & que Mr. *Schober* ne rapporte que les intervalles du tems employé pour chaque demi-tour du cylindre, on voit qu'il faut successivement prendre les sommes de ces intervalles. C'est ce qui nous donne la Table suivante.

	15 livr.	20 livr.	25 livr.	30 livr.
x	τ	τ	τ	τ
1	385″	294″	241″	213
2	548	419	345	306
3	670	517	432	381
4	787	604	507	445
5	896	682	573	501
6	1001	753	634	553
7	1104	820	690	602
8	1206	883	744	648
9	1306	943	794	693
10	1407	1001	842	736
11	1507	1057	889	777
12	1606	1112	935	817

§. 13. Or afin de m'aſſurer s'il n'y a pas dans ces expériences des irrégularités trop conſidérables, je conſtruiſis les nombres de cette Table en prenant les x comme des abſciſſes ſur la droite AB, & en faiſant les ordonnées égales aux nombres τ. C'eſt de cette façon que j'obtins autant de points pour les quatre lignes courbes AD, AE, AF, AG, & je vis que ces courbes avoient une courbure aſſez uniforme & réguliere, & que ſi dans les expériences il y avoit quelque irrégularité elle ne pouvoit être que très petite & de peu de conſéquence.

Pl. I. Fig. 1.

§. 14. J'entrepris donc d'appliquer les formules

$$c : C = \text{coſ}\, 2\omega,$$

$$x = a.\, \text{log. coſec. } 2\omega,$$

$$\tau = \frac{a}{c}\, \text{log. cot}\, \omega,$$

à la premiere expérience. Il s'agiſſoit de déterminer la conſtante a & la viteſſe terminale C. On voit bien qu'il falloit y parvenir par approximation. Pour cet effet la Table me fit voir que dans cette expérience le poids alloit acquérir une viteſſe telle que le cylindre fît un demi-tour environ en 100 ſecondes de tems. Enſuite, je pouvois par conſtruction déterminer à très peu près le point de la courbe AD où la viteſſe étoit la moitié de c.

C'eſt ce que j'obtins par le moyen des tangentes. Ce point répondoit à très peu près à l'abſciſſe $x = 2$. Or ayant de cette façon $c = \frac{1}{2} C$, j'avois $\omega = 30°$, & comme à $x = 2$ répond $\tau = 548$, il n'étoit pas difficile de déterminer les valeurs a, $\frac{a}{C}$ & ainſi C. Or cette valeur de C étant un peu différente de la valeur $C = \frac{1}{100}$ que j'avois miſe pour baſe, je continuai de déterminer le tout plus exactement au moyen des interpolations.

§. 15. De cette maniere & en employant les logarithmes tabulaires je trouvai

$$x = 15,78. \log. \text{coſec}\, 2\omega,$$

$$\tau = 1518. \log. \cot \omega.$$

Ainſi, par ex. lorſqu'il s'agit de trouver le tems τ qui répond à $x = 8$, on a

$$\frac{8}{15,78} = 0,50696 = \log. \text{coſec}\, 2\omega,$$

donc

$$\log. \sin 2\omega = 9,49304,$$

$$2\omega = 18°.\ 8',$$

$$\omega = 9.\ 4,$$

$$\log. \cot \omega = 0,7970,$$

ce logarithme étant multiplié par 1518 donne

$$\tau = 1210''.$$

Calculant de cette façon les valeurs de τ répondantes à $x = 1, 2, 3 \ldots 12$, ces valeurs pourront être comparées à celles que donne l'expérience, comme on le verra dans cette Table.

x	τ par expér.	τ calculé.	diff.
1	385	365	— 20
2	548	528	— 20
3	670	663	— 7
4	787	783	— 4
5	896	896	+ 0
6	1001	1003	+ 2
7	1104	1108	+ 4
8	1206	1210	+ 4
9	1306	1310	+ 4
10	1407	1410	+ 3
11	1507	1508	+ 1
12	1606	1606	+ 0

On voit que les différences ſont très petites & qu'il n'y a que lès deux premieres qui ſoient plus conſidérables. Cela peut être attribué à ce que dabord le mouvement eſt fort lent. Car alors les moindres irrégularités dans le frottement deviennent perceptibles & arrêtent le mouvement.

§. 16. Pour trouver la véritable valeur de a, il faut dans les deux équations

$$x = 15,78. \log. \operatorname{coſec} 2\omega$$

$$\tau = 1518 \log. \cot \omega$$

introduire les logarithmes hyperboliques, & par conſéquent multiplier les coëfficiens par 0,43429 - - - -, ce qui donne

$$x = 6,853. \log. \operatorname{coſec} 2\omega,$$

$$\tau = 659,3. \log. \cot \omega,$$

& ainſi

$$a = 6,853,$$

$$C = 0,01039.$$

§. 17. Comme on a en général

$$2e^{x:a} = e^{+\tau C:a} + e^{-\tau C:a},$$

on

on aura, en ſubſtituant les valeurs a, C,

$$2e^{x:6,853} = e^{+\tau:659,3} + e^{-\tau:659,3}$$

ce qui pour le mouvement initial donne

$$x = \frac{\tau^2 C^2}{2a} = 0,000007876.\tau^2.$$

§. 18. Or comme l'unité pour la meſure de la deſcente eſt un demi-tour du cylindre, c'eſt à dire $\frac{57}{100}$ pied de Paris, en multipliant 0,000007876 par 0,57, on aura en parties décimales du pied de Paris

$$a = 3,91,$$
$$C = 0,00593,$$
$$x = 0,000004489.\tau^2.$$

Or pour l'action de la gravité naturelle on a

$$x = 15,096.\tau^2.$$

Donc la gravité naturelle eſt à la gravité rélative qui dans cette expérience fit deſcendre le poids, comme 15,096 à 0,000004489, ou comme 1 à 0,0000002974.

§. 19. Pour la ſeconde expérience je trouvai, en employant les logarithmes tabulaires,

$$x = 50,85 \text{ log. coſec } 2\omega,$$
$$\tau = 2252 \text{ log. cot } \omega,$$

& par conſéquent la Table ſuivante.

x	τ par expér.	τ par le calcul.	diff.
1	294	297	+ 3
2	419	423	+ 4
3	517	521	+ 4
4	604	606	+ 2
5	682	683	+ 1
6	753	754	+ 1
7	820	820	0
8	883	883	0
9	943	944	+ 1
10	1001	1002	+ 1
11	1057	1058	+ 1
12	1112	1114	+ 2

Ici les différences sont encore plus petites que dans la premiere expérience, & en diminuant le coëfficient 2252 de 3 ou 4 unités elles deviennent encore plus petites.

§. 20. Or en introduisant les logarithmes hyperboliques on a

$$x = 22,08 \ \log. \operatorname{cosec} 2\omega,$$

$$\tau = 978,1 \ \log. \cot \omega,$$

& ainsi

$$a = 22,08 = 12,59 \text{ pieds},$$

$$C = 0,02257 = 0,01286 \text{ pied},$$

ce qui pour le mouvement initial donne

$$x = \frac{\tau^2 . C^2}{2a} = 0,00001131 . \tau^2$$

ou bien en parties décimales du pied de Paris

$$x = 0,000006447 . \tau^2 .$$

Ainsi la gravité rélative dans cette expérience est $= 0,000006447$, tandis que la gravité naturelle est $15,096$, ce qui donne le rapport de 1 à $0,0000004270$.

§. 21. Pour la troiſieme expérience je trouvai, en employant les logarithmes tabulaires,

$$x = 53\tfrac{1}{3}.\ \log.\ \text{coſec.}\ 2\omega,$$

$$\tau = 1944.\ \log.\ \cot\omega,$$

& par conſéquent la Table ſuivante.

x	τ exp.	τ calc.	diff.
1	241	250	+ 9
2	345	356	+ 11
3	432	441	+ 9
4	507	510	+ 3
5	573	575	+ 2
6	634	634	0
7	690	690	0
8	744	743	− 1
9	794	793	− 1
10	842	842	0
11	889	890	+ 1
12	935	935	0

Ici donc il n'y a que les trois premieres différences qui ſoient un peu plus conſidérables, ce que j'attribue encore à ce que le mouvement initial étant fort lent, les irrégularités dans le frottement deviennent plus ſenſibles. Cependant comme dans cette expérience les premieres différences ſont poſitives, il ſemble que la rotation du diſque avoit d'abord été moins retardée que dans la premiere expérience.

§. 22. En introduiſant les logarithmes hyperboliques, les deux équations pour cette expérience ſont

$$x = 23,16\ \log.\ \text{coſec}\ 2\omega,$$

$$\tau = 844,3\ \log.\ \cot\omega,$$

ce qui donne

$$a = 23,16 = 13,20\ \text{pieds},$$

$$C = 0,02743 = 0,01563\ \text{pied},$$

& par conſéquent pour le mouvement initial

$$x = \frac{\tau^2 . C^2}{2a} = 0{,}00001624 . \tau^2,$$

ou bien en parties décimales du pied de Paris

$$x = 0{,}000009257 . \tau^2.$$

Ainſi la gravité rélative dans cette expérience étoit $= 0{,}000009257$, tandis que la gravité naturelle eſt $= 15{,}096$; ce qui donne le rapport de 1 à 0,0000006132.

§. 23. Enfin je trouvai pour la quatrieme expérience

$$x = 50{,}85 . \log . \operatorname{cosec} 2\omega,$$

$$\tau = 1654 . \log . \cot \omega,$$

& par conſéquent la Table ſuivante.

x	τ exp.	τ calc.	diff.
1	213	218	+ 5
2	306	310	+ 4
3	381	383	+ 2
4	445	446	+ 1
5	501	502	+ 1
6	553	554	+ 1
7	602	603	+ 1
8	648	649	+ 1
9	693	693	0
10	756	736	0
11	777	777	0
12	817	818	+ 1

Encore ici les deux premieres différences ſont les plus conſidérables, comme dans les trois expériences précédentes. La raiſon en eſt la même, c'eſt que dans les mouvemens lents les effets du frottement ſont plus irréguliers. C'eſt ce que j'ai conſtamment obſervé dans les bouſſoles, & ſurtout dans celles qui ne ſont pas fort aimantées, & qui par cette raiſon font leurs oſcillations fort lentement. Quelquefois leur mouvement, au lieu de s'accélé-

rer, ſe rallentit pour vaincre un obſtacle que le frottement leur oppoſe, & après l'avoir vaincu il recommence à s'accélérer au point qu'il ſemble n'avoir rien perdu. C'eſt ainſi qu'une boule rallentit ſon mouvement lorſqu'elle rencontre quelque élévation où elle doit monter; mais ce mouvement recommence à s'accélérer lorſqu'elle redeſcend.

§. 24. Mais pour revenir à notre expérience, il reſte encore à introduire les logarithmes hyperboliques dans nos deux équations. C'eſt ce qui les change en

$$x = 22{,}08.\ \log.\ \operatorname{cosec} 2\omega,$$

$$\tau = 718{,}3\ \log.\ \cot \omega.$$

De là on tire

$$a = 22{,}08 \quad = 12{,}59 \text{ pieds},$$

$$C = 0{,}03074 = 0{,}01752 \text{ pied},$$

& ainſi pour le mouvement initial

$$x = \frac{\tau^2 . C^2}{2a} = 0{,}000021403.\tau^2,$$

ou bien en parties décimales du pied de Paris,

$$x = 0{,}000012185.\tau^2.$$

Ainſi la gravité rélative dans cette expérience eſt $= 0{,}000012185$, tandisque la gravité naturelle eſt $= 15{,}096$, ce qui donne le rapport de 1 à 0,0000008702.

§. 25. On voit donc que les formules

$$x = a.\ \log.\ \operatorname{cosec} 2\omega,$$

$$\tau = \frac{a}{C}.\ \log.\ \cot \omega,$$

expriment dans les quatre expériences de Mr. *Schober* l'accélération du mouvement auſſi exactement qu'on pouvoit s'y attendre, & qu'ainſi la théorie de la réſiſtance des fluides s'applique parfaitement bien à la réſiſtance qui réſulte du frottement. On voit auſſi que les différences entre la théorie

& les expériences sont plus petites à mesure que le mouvement est plus accéléré, & que ces différences ne sont anomales que lorsque le mouvement est encore fort lent.

§. 26. Il nous reste à comparer entr'elles les quatre expériences. Mais faute de données je ne pourrai pas faire cette comparaison fort complètement. On sait que pour mettre une machine en mouvement il faut un certain degré de force pour contrebalancer le frottement. Je désignerai cette force par un poids $= b$. Et cette quantité pour une même machine est constante, à moins que les parties de la machine ne s'usent ou ne s'alterent avec le tems.

§. 27. Mais si en augmentant la force motrice il en résulte une plus grande pression & ainsi un frottement plus fort, il est clair que le poids b doit être augmenté d'une quantité, que je désignerai par $n(P - b)$, où P dénote le poids égal à la force entiere, & n une partie de $(P - b)$, de sorte qu'en général $n(P - b)$ est une fonction de P, qui se détermine par l'arrangement de la machine.

§. 28. Ce qui étant établi, la partie de la force qui met la machine en mouvement est exprimée par

$$p = P - n(P - b) - b = (P - b) \cdot (1 - n).$$

Et c'est de cette partie que dépend l'accélération du mouvement, du moins dans les premiers instans.

§. 29. Or dans les expériences de Mr. *Schober* il y a deux causes qui rallentissent cette accélération. L'une c'est l'inertie des roues & des pignons, & surtout celle du disque de plomb, dont l'effet est fort considérable; car son poids est de $4\frac{59}{64}$ livres $= \frac{315}{64}$ livres. Et si le poids P, suspendu au cylindre, étoit immédiatement appliqué à l'essieu qui fait tourner le disque, sa distance du centre ne pourroit être que de $\frac{114}{100} \cdot \frac{7}{44} \cdot \frac{1}{2688}$ $= \frac{19}{2200.128}$ pied. Or le demi-diametre du disque étant $= \frac{1}{6}$ pied, il s'ensuit que la gravité rélative du poids P est

$$\gamma = 15{,}096 \cdot \frac{19.19.P}{P.19.19 + 35.32.2200.2200},$$

ou bien

$$\gamma = \frac{15,096. P}{P + 15016066}.$$

§. 30. Or comme dans ces expériences le poids P ne va pas au delà de 30 livres, on voit aiſément qu'on peut omettre ce poids dans le dénominateur de cette fraction, ce qui donne plus briévement

$$\gamma = 0,00000100532. P.$$

Si donc le poids P n'avoit à vaincre que l'inertie du diſque, il auroit la gravité rélative γ, & deſcendroit avec une viteſſe uniformément accélérée, en ſorte que ſa chûte dans la premiere ſeconde ſeroit de 0,00000100532.P pied.

§. 31. Quant à l'inertie du rouage, je ne ſaurois l'évaluer faute de données. Mais l'effet en devoit être une diminution à très peu près proportionelle au poids P, de ſorte que nous pourrons faire

$$\gamma = 0,00000100532. mP$$

où m eſt une fraction d'une valeur à très peu près conſtante.

§. 32. Cette gravité auroit donc lieu ſi le frottement n'y mettoit un double obſtacle. D'abord la partie efficace du poids P ſe réduit à $p = (P - b).(1 - n)$, & cela change cette gravité en

$$\gamma = 0,00000100532. m.(P - b).(1 - n)$$

qui ne laiſſeroit pas néanmoins de produire un mouvement uniformément accéléré. Mais comme le frottement s'oppoſe encore en raiſon du quarré de la viteſſe, comme dans la réſiſtance des fluides, cela change l'accélération, en ſorte que les courbes AD, AE, AF, AG, au lieu d'être des paraboles de la forme

$$x = 0,00000100532. m.(P - b).(1 - n).\tau^2,$$

deviennent aſymptotiques.

§. 33. Mais comme elles ne s'écartent que peu à peu de la nature parabolique, cela fait que pour les premiers inſtans on peut leur ſubſtituer

des paraboles. C'eſt auſſi ce que j'ai fait ci-deſſus en déterminant la gravité rélative pour chacune des quatre expériences. Voilà donc ce qui, en ſubſtituant les valeurs de P, nous fournit les quatre équations ſuivantes:

$$0,000001005 32.m.(15 - b).(1 - n) = 0,000004489, \quad (\S.16.)$$
$$0,000001005 32.m (20 - b).(1 - n) = 0,000006447, \quad (\S.20.)$$
$$0,000001005 32.m (25 - b).(1 - n) = 0,000009257, \quad (\S.22.)$$
$$0,000001005 32.m (30 - b).(1 - n) = 0,000012185, \quad (\S.24.)$$

d'où l'on tire

$$m.(15 - b).(1 - n) = 4,47$$
$$m.(20 - b).(1 - n) = 6,41$$
$$m.(25 - b).(1 - n) = 9,21$$
$$m.(30 - b).(1 - n) = 12,12.$$

Fig. 2. §. 34. Soient maintenant les abſciſſes AP, AQ, AR, AS proportionelles aux poids $P = 15, 20, 25, 30$, & les ordonnées PD, QE, RF, SG proportionelles aux gravités γ répondantes. La courbe $DEFG$ exprimera les rapports entre P & γ, en ce que γ doit être en raiſon de $(P - b).(1 - n)$ ou bien

$$\gamma = 0,000001005 32.m.(P - b).(1 - n).$$

§. 35. Or ſi dans cette équation n étoit conſtante, γ croitroit dans le rapport de $(P - b)$, & par conſéquent la ligne GD ſeroit droite. La Figure fait voir qu'elle ne l'eſt pas, mais que cependant la partie EG ne s'écarte pas ſenſiblement de la droite TEG. La valeur de n eſt donc variable, en ſorte qu'elle approche aſſez vite d'une quantité conſtante. Voilà donc ce qui fait que dans les trois dernieres expériences la partie des poids requiſe pour vaincre le frottement eſt $= AT$, ce qui revient à environ 9 livres.

§. 36.

§. 36. De cette maniere la partie des poids qui produisoit le mouvement dans ces trois expériences étoit

Exp. 2. $TQ = 20 - 9 = 11$,

3. $TR = 25 - 9 = 16$,

4. $TS = 30 - 9 = 21$,

& c'est à ces poids que les gravités rélatives QE, RF, SG sont à très peu près proportionelles.

§. 37. Si donc nous faisons

$$SG = 0,0000126,$$

nous aurons

$$RF = 0,0000096,$$
$$QE = 0,0000066.$$

§. 38. Or la valeur $\frac{1}{a}$ étant la mesure absolue de la résistance, elle doit avoir été dans ces trois expériences à très peu près constante, puisque le poids requis pour vaincre le frottement l'est de même. Aussi les valeurs de a trouvées ci-dessus pour ces trois expériences étant

$a = 12,59$ pieds (§. 20.)

$a = 13,20$ (§. 22.)

$a = 12,59$ (§. 24.)

on voit que ces valeurs different assez peu entr'elles. Je poserai donc pour plus de briéveté $a = 12\frac{1}{2}$ pieds.

§. 39. Comme donc on doit avoir

$$2a\gamma = CC,$$

on aura pour la valeur de C

Exp. 2. $C = \sqrt{(25.QE)} = 0,01285$ pied

3. $C = \sqrt{(25.RF)} = 0,01549$

4. $C = \sqrt{(25.SG)} = 0,01789$.

Or nous avons trouvé ci-dessus

Exp. 2. $C = 0{,}01286$ pied
3. $C = 0{,}01563$
4. $C = 0{,}01752$.

Ainsi ces valeurs ne different gueres entr'elles.

§. 40. La premiere expérience fait en tout cela une exception assez considérable. La valeur de a est $= 3{,}91$, ce qui suppose une résistance beaucoup plus grande. La vitesse terminale C est $= 0{,}00593$, & par conséquent beaucoup plus petite qu'elle ne seroit en comparaison des trois autres expériences, mais pourtant plus grande que la valeur de $a = 3{,}91$ ne semble l'exiger, puisque ces deux valeurs

$$a = 3{,}91$$
$$C = 0{,}00593$$

donnent la gravité rélative

$$\gamma = PD = 0{,}000004489,$$

qui fait que le point D tombe beaucoup au-dessus de la droite FG. Ainsi cette gravité rélative auroit été plus grande qu'elle n'auroit dû être comparativement aux trois autres expériences. Il n'y a gueres moyen d'expliquer ce phénomene autrement qu'en admettant que dans la premiere expérience quelque cause accidentelle a arrêté & rallenti le mouvement de la machine au commencement, mais que cette cause a cessé peu à peu à mesure que la vitesse alloit en augmentant. Voici ce qui me porte à juger de cette maniere.

Fig. 1. §. 41. Les courbes AD, AE, AF, AG different d'abord infiniment peu de la parabole, & ne commencent à s'en écarter sensiblement qu'après la premiere révolution du cylindre. Voilà ce qui nous met en état d'évaluer la lettre γ au moyen du tems employé pour la premiere demi-révolution, pendant laquelle les poids descendoient de 0,57 pied. Or ce tems étoit dans les quatre expériences de 385, 294,

241, 213 secondes. Divisant donc 0,57 par les quarrés de ces tems, les quotiens nous donneront l'espace parcouru dans la premiere seconde, & par conséquent les gravités rélatives.

Exp. 1. $\gamma = 0,000003846$ pied.

2. $\gamma = 0,000006594$

3. $\gamma = 0,000009812$

4. $\gamma = 0,000012780$.

On voit donc que dans la premiere expérience la gravité rélative, au lieu d'être $\gamma = 0,000004489$, n'étoit que $\gamma = 0,000003846$, & ainsi beaucoup plus petite. Or la premiere de ces valeurs ayant été déduite des abscisses & des ordonnées de la courbe AD beaucoup plus éloignées du sommet A, il s'ensuit que cette courbe differe, pour ainsi dire, d'elle-même, ce qui ne peut être attribué qu'à quelque cause accidentelle qui peu à peu cessa de produire son effet.

§. 42. Il y a cependant une autre considération à laquelle il convient de nous arrêter. A proprement parler, la ligne GD n'est pas dans toute la rigueur géométrique une ligne courbe, mais un polygone, qui commence quelque-part en B, qui s'éleve fort brusquement au-dessus de AS, & dont les côtés deviennent & même assez vite si petits que pour peu que la vitesse soit considérable elle affecte la continuité d'une ligne courbe.

§. 43. Qu'on mette un corps sur un plan incliné. Si d'abord l'inclinaison est très petite, ce corps restera en repos sans glisser, puisque le frottement de la base y met obstacle. On conçoit qu'il y a un angle d'inclinaison $= \kappa$, où la force qui tend à faire descendre le corps est en équilibre avec le frottement. Il semble donc qu'en augmentant cet angle tant soit peu, le corps doit commencer à glisser avec une lenteur infinie. Cependant cela n'arrive jamais. Car le corps, ou reste en repos, ou s'il glisse, c'est toujours avec une vitesse qui n'est rien moins qu'infiniment petite. Il y a là toujours une espece de saut de la vitesse $= 0$ à une vitesse finie. La raison en est que l'inégalité des surfaces n'est pas un objet du

calcul des quantités *continues* mais des quantités *discretes*. Les particules éminentes forment autant d'unités numériques, quoique de différente valeur. Ces unités ne se confondent que lorsque la vitesse est assez grande pour qu'elles puissent être regardées comme infiniment petites. Ce n'est qu'alors que le calcul des quantités continues peut avoir lieu. Voilà donc ce qui fait qu'il reste indécis, de quelle maniere la ligne GD doit être continuée au-delà de D, & que peut-être déjà en D elle commence à être anomale.

Fig. 1.

§. 44. Du reste c'est faire l'éloge des expériences de Mr. *Schober* que de dire que les anomalies qui s'y trouvent sont toutes fort petites. Car en examinant de la même façon quelques autres expériences, comme par ex. celle que Mr. *Musschenbroeck* rapporte dans le §. 349. de son *Essai de Physique*, non seulement on ne voit pas comment il en a déterminé les résultats, mais en admettant ces résultats il s'ensuivroit que les vitesses augmentent dans une plus forte raison que le frottement. C'est tout le contraire de ce qui devoit s'ensuivre, puisque le frottement croit comme le quarré de la vitesse. J'ai vu encore d'autres expériences où les vitesses C seroient à très peu près proportionelles au quarré des poids P, qu'on regardoit comme la mesure du frottement, au lieu qu'il eût fallu trouver $CC = 2a\gamma$, c'est à dire le quarré de la vitesse terminale en raison directe de la gravité rélative γ, & en raison inverse de la mesure absolue du frottement, qui est $= \frac{1}{a}$. J'en infere qu'il est très difficile de bien faire ces sortes d'expériences, surtout lorsqu'il s'agit d'en déduire les loix du frottement, ou d'examiner celles qu'on déduit de la théorie. Les mouvemens lents n'y sont d'aucun usage, parce que les petites irrégularités y produisent des anomalies trop sensibles. Et si en général le mouvement est rallenti par une cause accidentelle quelconque, cela influe dans toute la suite de l'observation.

§. 45. Il convient cependant de faire encore mention des expériences de Mr. *Meister* dans le premier Volume des Nouveaux Commentaires

de la Société R. de Gœttingue, qui vient de paroître. Ces expériences me paroissent être faites avec beaucoup de soin de quatre manieres differentes & plusieurs ont été répétées plus d'une fois, tant immédiatement que quelque tems après. Mr. *Meister* ne détaille pas à la vérité toutes les circonstances. Il se borne à indiquer les tems & les espaces parcourus, sans en donner cependant les mesures absolues. Comme dans sa premiere machine la résistance de l'air pouvoit en rallentir le mouvement, je passerai d'abord aux expériences faites avec la seconde machine, où un poids fit tourner une poulie en devidant le fil auquel il étoit suspendu, & qui se détacha entierement aussitôt que le poids fut descendu autant qu'il devoit descendre. Le premier jour M. *Meister* trouva

espaces	tems
46	29,0
40	26,5
35	23,5
30	21,5
25	19,5
20	17,8
15	15,2
10	12,5
5	9,0
1	3,0

§. 46. Afin d'examiner d'abord s'il y a dans ces nombres quelque régularité, je regardai les espaces comme des abscisses & les tems comme les ordonnées d'une ligne courbe, & en construisant cette courbe je vis qu'elle devoit nécessairement passer au-dessus des points trouvés pour les ordonnées répondantes aux abscisses ou aux espaces 25, 30, 30, & que les ordonnées répondantes aux espaces 1, 5 étoient pareillement un peu irrégulieres. Du reste ces différences étoient assez petites & au-dessous d'une unité.

§. 47. J'entrepris donc d'y appliquer les formules (§. 10.) & je trouvai qu'en employant les logarithmes tabulaires il falloit faire

les espaces $x = \frac{1}{0,0075} \cdot \log. \operatorname{cosec.} 2\omega$

les tems $\tau = \frac{1}{0,00215} \cdot \log. \cot. \omega$,

ce qui me donna

x	τ calc.	τ exp.	diff.
46	28, 8	29, 0	— 0, 2
40	26, 5	26, 5	*
35	24, 5	23, 5	+ 1, 0
30	22, 4	21, 5	+ 0, 9
25	20, 1	19, 5	+ 0, 6
20	17, 8	17, 8	*
15	15, 1	15, 2	— 0, 1
10	13, 1	12, 5	+ 0, 6
5	8, 5	9, 0	— 0, 5
1	3, 8	3, 0	+ 0, 8

§. 48. Mr. *Meister* répéta les mêmes expériences le second jour plus d'une fois. Je pris donc le terme moyen du résultat de chacune, & je vis qu'il suffisoit d'augmenter les tems τ, trouvés dans le précédent §, dans le rapport de 53 à 58, pour avoir les résultats suivans:

x	τ calc.	τ exp.	diff.
46	31, 6	32, 0	— 0, 4
40	29, 0	28, 8	+ 0, 2
35	25, 9	26, 3	— 0, 4
30	23, 6	24, 1	— 0, 5
25	22, 1	21, 6	+ 0, 5
20	19, 5	19, 2	+ 0, 3
15	16, 5	16, 1	+ 0, 4
10	14, 3	13, 2	+ 1, 1
5	9, 3	9, 0	+ 0, 3
1	4, 2	3, 0	+ 1, 2

Il n'y a donc ici que l'ordonnée $\tau = 13,2$ & $\tau = 3$, qui soit considérablement plus petite que celles que donne le calcul. C'est encore ce qu'il faut attribuer à la lenteur du mouvement, que le moindre obstacle rend fort irrégulier.

§. 49. Je me dispenserai d'appliquer le calcul aux autres expériences que Mr. *Meister* a faites avec la même machine. Les résultats ne different qu'en ce que l'effet du frottement varia par différentes causes extérieures, p. ex. la chaleur, l'humidité &c. que Mr. *Meister* n'a pas laissé de rapporter. Tout ce qui s'ensuit en général c'est qu'il faut écarter les expériences qui different trop considérablement de toutes les autres, & que de celles-ci il faut prendre les termes moyens qui répondront à ce qu'il y a de plus constant & de plus régulier dans le frottement, sans cependant faire entierement abstraction des causes extérieures & accidentelles, qui ne laissent pas de survenir, du moins de tems en tems. Il est clair que la force motrice qu'on applique à la machine doit toujours suffire, même dans les cas où ces causes accidentelles s'y opposent le plus.

§. 50. Quant aux expériences que Mr. *Meister* a faites avec sa troisieme machine, elles demandent encore d'être examinées par la construction, chacune séparément. J'en ai fait l'essai pour la premiere de ces expériences, qui m'a paru être la plus anomale. Voici ce que j'ai trouvé:

x	τ constr.	τ exp.
1	2,0	2,0
3	3,9	3,2 *
5	5,0	5,0
7	6,1	6,2
9	6,8	6,6
11	7,6	7,5
13	8,4	8,4
15	9,0	9,0
17	9,5	12,0 *
19	9,9	15,0 *

On voit par là que la seconde & *surtout* les deux dernieres de ces expériences different très considérablement de ce que demande la régularité de l'accroissement du tems. Or en retenant les ordonnées τ trouvées par la construction, j'ai vu que les tems τ croissent à très peu près comme les racines quarrées des espaces, ce qui indique que l'effet du frottement dû à la vitesse ne doit pas avoir été fort considérable, probablement encore par

quelque cauſe accidentelle. Car dans quelques autres expériences que Mr. *Meiſter* a faites avec la même machine il n'en a pas été de même.

§. 51. Dans les expériences que Mr. *Meiſter* a faites avec ſa 4me machine je trouve qu'en général les tems requis pour parcourir l'eſpace $= 10$ ſurpaſſoient du double & même du triple les tems requis pour parcourir l'eſpace $= 5$. Or cela ne ſauroit être à moins que l'effet du frottement ne croiſſe en plus forte raiſon que le quarré de la viteſſe. Mais outre que Mr. *Meiſter* rapporte lui-même différentes cauſes qui peuvent avoir renforcé l'effet du frottement, il me ſemble que ces mêmes cauſes y ont influé encore d'une autre façon. Mr. *Meiſter* a renouvellé ſes expériences pour chacun des eſpaces 1, 2, 3 - - - - 10 ſéparément, ce qu'il ne pouvoit faire que ſucceſſivement. Or de ſes expériences il réſulte en général, qu'à meſure qu'il les répéta de ſuite le frottement diminua. Si donc p. ex. il a commencé par l'eſpace $= 10$, il devoit trouver le tems τ plus long que s'il avoit commencé par quelqu'autre eſpace. La différence n'eſt pas ſi petite, puiſque pour un même eſpace $= 10$ les tems différoient depuis $34\frac{1}{2}$ juſqu'à 63. Je fais donc entierement abſtraction de ces expériences, & je reviens à rendre juſtice à M. *Schober* ſur ce qu'il a eu l'attention de noter les eſpaces & les tems employés pour chaque demi-révolution du cylindre, ſans ſe voir obligé de remonter la machine pour chacune des 12 demi-révolutions ſéparément. (§. 8.) C'eſt là préciſément ce que demandent les loix de la continuité, de l'uuiformité & de l'égalité des circonſtances dans les expériences.



SUR

G
F
Fig. 2.
E
D
A B T P Q R S

D
E
F
G
Fig. 1.
A B

SUR

LA FLUIDITÉ

DU SABLE, DE LA TERRE ET D'AUTRES CORPS MOUS, rélativement aux loix de l'Hydrodynamique.

PAR M. LAMBERT.

§. 1.

Les expériences & la théorie qui feront le fujet de ce Mémoire, regardent le pilotage & la folidité du foudement des ouvrages d'architecture, & contribueront en même temps à répandre du jour fur quelques queftions embarraffantes.

§. 2. Il y a longtems qu'on s'eft étonné de ce qu'un petit coup de marteau fait plus d'effet que n'en produit un poids d'une groffeur confidérable, lorfqu'il s'agit d'applatir du plomb, ou d'enfoncer un clou, ou de fendre & de caffer un corps &c. Mr. *de Camus*, dans fon Traité des forces mouvantes publié en 1722 & réimprimé en 1724, rapporte plufieurs expériences qu'il a faites pour déterminer ces effets du choc en les comparant avec ceux qu'il produifit au moyen de la fimple preffion des poids. Quoique ces expériences foient affez peu exactes, parce que M. *de Camus*, au lieu de mefurer les effets, s'eft contenté de les eftimer, elles ne laiffent pas de faire voir que la différence entre le choc & la fimple preffion eft très confidérable. C'eft ainfi par ex. que dans la 10me Propofition du troifieme Chapitre il trouve, *qu'un poids de* $1\frac{1}{4}$ *livre tombant de huit pouces de haut fait autant d'effort pour comprimer ou écrafer un corps ou folide, qu'un poids de* 200 *livres pofé fans chûte.* La différence entre $1\frac{1}{4}$ & 200 livres eft fans contredit très confidérable, & d'autant plus qu'une chûte de 8 pouces de haut ne produit pas une fort grande viteffe.

§. 3. M. *de Camus* crut pouvoir mesurer l'effet des chocs par ces sortes de comparaisons. A cet égard il n'est pas le premier qui ait eu cette idée. On est naturellement porté à croire que le choc peut être évalué par des poids, & c'est sur ce pied que le P. *Mersenne* & *Descartes* & ensuite *Leibnitz* ont cru pouvoir établir quelque loi générale, en regardant l'effet du choc comme égal au produit de la masse & de la vitesse ou du quarré de la vitesse. Les disputes occasionnées par ces évaluations sont trop connues pour que je m'y arrête ici, & j'en ai déjà parlé autre-part. Ainsi je dirai simplement que dans ces disputes on a cherché de part & d'autre à confirmer par des expériences le sentiment qu'on avoit embrassé, & que parmi ces expériences il y en avoit plusieurs qui étoient assez mal arrangées pour qu'on n'en ait pu tirer aucune conséquence légitime & générale. J'aurai occasion d'en parler dans la suite. Je commence par celles que j'ai faites moi-même, dans l'intention de les établir pour base de la théorie.

§. 4. Je n'employai d'abord que du sable, que j'avois criblé pour l'avoir bien fin. Je le versai dans un vase & j'en applanis la surface. Ensuite je pris un parallélipipede de bois de buis, qui au moyen d'une charniere pouvoit être replié. En un mot c'étoit un pied de Paris, tel qu'on en achete. Comme j'en ferai usage dans les expériences suivantes, je l'appellerai simplement le pied ou le parallélipipede de buis. La base étoit de 15 lignes quarrées, & en le repliant elle se doubloit. Le poids en étoit de $1\frac{3}{32}$ once, & la pesanteur spécifique de 93 à 94 livres, poids de Berlin, pour le pied cubique. Je plaçai ce parallélipipede doucement sur le sable, afin de voir jusqu'où il s'enfonceroit, après que je l'eus chargé de différens poids. Voici les résultats.

Ce parallélipipede pesant demi-onces	s'enfonça lignes
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{2}{3}$
4	1
5	$1\frac{1}{2}$
6	2
7	$2\frac{1}{2}$
8	$2\frac{1}{2}$
9	3
10	$3\frac{1}{2}$
14	5
18	6

D'après ces nombres j'ai construit la premiere Figure où les abscisses marquent les poids, & les ordonnées les lignes de l'enfoncement répondant. On voit qu'à quelques petites anomalies près les ordonnées aboutissent à une ligne droite, & qu'ainsi *les enfoncemens sont simplement en raison des poids.* Pl. II. Fig. 1.

§. 5. Là-dessus je repliai le parallélipipede pour en doubler la base, & en répétant ces expériences je trouvai les enfoncemens répondans aux mêmes poids deux fois plus petits. Cela me fit voir *que les enfoncemens sont en raison réciproque des bases.* Je répétai ces expériences avec d'autres parallélipipedes & je trouvai ces conséquences très bien confirmées, aussi longtems que j'employai le même sable. Mais lorsque je changeai de sable, les parallélipipedes s'enfoncerent plus ou moins, suivant que le sable étoit plus ou moins fin, ou que les grains de sable étoient plus ou moins arrondis. Cela me fit voir que dans la formule que je voulois établir par ces expériences il y entroit un coëfficient qui, pour une même espece de sable, étoit constant, mais qui varioit suivant les différens sables que j'employois.

§. 6. J'établis donc que les enfoncemens sont en raison directe des poids & en raison réciproque des bases, & que le coëfficient qui doit rédui-

E 2

re ces rapports à l'égalité, se détermine par la nature du sable qu'on emploie.

§. 7. Les enfoncemens dont je viens de parler, sont l'effet de la chûte du parallélipipede, depuis la surface du sable jusqu'à la profondeur où il s'enfonce. Cette profondeur cependant n'est pas celle où le parallélipipede fait équilibre avec le sable, parce que celle-ci n'en est que la moitié. Car si par ex. dans la derniere expérience du §. 4. le parallélipipede pesant 18 demi-onces s'enfonce de *6* lignes en tombant depuis la surface, il ne s'enfonça point du tout lorsque je commençai à le placer en sorte que sa base étoit 3 lignes au-dessous de la surface du sable. Ainsi ce parallélipipede pesant 18 pouces fait équilibre avec le sable lorsqu'il s'y trouve enfoncé de 3 lignes.

§. 8. Dans tout cela il y a bien des choses qui font entrevoir une parfaite ressemblance entre la fluidité du sable & celle des liquides. Car encore dans les liquides un parallélipipede spécifiquement plus léger, sera en équilibre lorsque la profondeur à laquelle il y est enfoncé est en raison directe de son poids & en raison réciproque de sa base & de la gravité spécifique du liquide.

§. 9. A cet égard donc on peut attribuer au sable une espece de gravité spécifique, entant qu'il fait équilibre aux corps qui y sont enfoncés à une certaine profondeur. C'est ainsi que dans le sable dont j'ai fait usage dans les expériences du §. 4, le parallelipipede reste en équilibre lorsqu'il y est enfoncé à la profondeur de 3 lignes (§. 7). Or sa base étant de 15 lignes quarrées (§. 4) la partie enfoncée du parallélipipede est de 45 lignes cubiques. C'est donc autant que si un volume égal de sable, en vertu des loix de l'Hydrostatique, faisoit équilibre au poids du parallélipipede qui est de 18 demi-onces. Car c'est moyennant ce poids que le parallélipipede peut être censé avoir chassé de leur place ces 45 lignes cubiques de sable. Or ces 45 lignes cubiques sont à un pied cubique, comme ces 18 demi-onces à 37324,8 livres. Ainsi à l'égard de sa force hydrostatique ce sable est équivalent, quant à l'effet, à un liquide dont un pied cubique pese-

roit au-delà de 37000 livres. Voilà donc l'évaluation de la force hydroſtatique du ſable que j'ai employé dans les expériences du §. 4.

§. 10. Je crois n'avoir pas beſoin d'avertir qu'en comparant de cette façon le ſable à un liquide cette comparaiſon admet certaines reſtrictions. Ainſi par ex. un corps peut être enfoncé dans le ſable beaucoup plus qu'il ne faut pour qu'il y ait équilibre. Il reſtera dans cet état, tandis que s'il étoit trop enfoncé dans un liquide il remonteroit & ſe remettroit dans l'équilibre après différentes oſcillations. C'eſt à cette différence qu'il convient d'avoir égard, & c'eſt auſſi en quoi la fluidité du ſable diffère de celle des liquides. Le ſable s'oppoſe à l'enfoncement comme les liquides, mais il n'eſt pas aſſez fluide pour faire remonter ce qui y eſt enfoncé au-delà du point où il fait équilibre.

§. 11. Après ce que je viens de dire ſur l'état d'équilibre qui peut avoir lieu dans le ſable, je paſſerai à examiner ce qui ſe fait dans les enfoncemens en n'y employant que ce que je viens de nommer la force hydroſtatique du ſable (§. 9). Soit donc D la ſurface du ſable, AB un corps cylindrique ou priſmatique. Suppoſons que ce corps tombe dans le ſable de quelque hauteur $= H$, & qu'il s'enfonce juſqu'en C. Soit encore $AE = b$ la partie qui doit être au-deſſous de la ſurface du ſable pour qu'il y ait équilibre. Si donc le corps en s'enfonçant eſt parvenu à la profondeur AD, qui eſt moindre que AC, il y aura encore quelque reſte de viteſſe. Soit cette viteſſe due à la hauteur $= h$, & faiſons $AD = \xi$, nous aurons, comme pour les liquides, Fig 2

$$b\,dh = (b - \xi)\,d\xi,$$

$(b - \xi) : b$ étant la force retardatrice du mouvement. L'intégrale de cette formule eſt

$$bh = b\xi - \tfrac{1}{2}\xi\xi + \text{Conſt.}$$

§. 12. Or pour $\xi = 0$, on a $H = h$, donc

$$bh = bH + b\xi - \tfrac{1}{2}\xi\xi,$$

ce qui pour $h = 0$, donne

$$\xi = AE = b + \sqrt{(bb + 2bH)}.$$

§. 13. Si donc le corps ne tombe que depuis la ſurface du ſable D, on a $H = 0$, & par conſéquent $\xi = 2b$, c'eſt à dire, la profondeur à laquelle le corps, tombant depuis la ſurface, s'enfonce, eſt double de celle à laquelle il faut le placer pour qu'il y ait ſimplement équilibre. Et c'eſt auſſi, comme je l'ai dit (§. 7.), ce que mes expériences m'ont fait voir.

§. 14. Mais pour examiner la formule $\xi = b + \sqrt{(bb + 2bH)}$ dans les cas où H n'eſt pas $= 0$, je pris le même ſable & le même parallélipipede que j'avois employés dans l'expérience du §. 4; & après avoir chaque fois applani la ſurface du ſable, j'y laiſſai tomber le parallélipipede de la hauteur de 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 12 pouces, & je trouvai les enfoncemens répondans de $\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{2}$, 3^2, $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{3}$, 6, $6\frac{1}{2}$, 9 lignes. Or en faiſant dans la formule $b = \frac{1}{4}$, elle devient

$$\xi = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{(1 + 8H)}$$

& donne les valeurs renfermées dans la Table ſuivante.

H	ξ calc.	ξ exp.
$0'''$	$\frac{1}{2}'''$	$\frac{2}{3}'''$
12	$2\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{2}$
24	4	$3\frac{2}{3}$
36	$4\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$
48	$5\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{6}$
72	$5\frac{3}{4}$	6
144	$8\frac{3}{4}$	9

§. 15. Il ne m'étoit gueres poſſible de continuer ces expériences avec le même ſable, vu que je n'en avois pas aſſez pour en remplir un vaſe plus large. J'en pris donc d'autre qui étoit moins fin, & y laiſſant tomber le même parallélipipede de la hauteur de 0, 1, 2, 3, 4, 5 pieds, je trouvai les enfoncemens répondans de $\frac{1}{2}$, 7, 10, 12, 14, $15\frac{1}{2}$ lignes. Il étoit aſſez difficile de meſurer ces enfoncemens avec quelque exactitude,

la surface du sable s'élevant à l'entour du parallélipipede. Faisant cependant $b = \frac{1}{6}$, la formule se change en $\xi = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{(1 + 12H)}$, & donne les valeurs suivantes

H	ξ calc.	ξ exp.
0'''	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
144	$7\frac{1}{10}$	7
288	10	10
432	$12\frac{1}{6}$	12
576	14	14
720	$15\frac{2}{3}$	$15\frac{1}{2}$

§. 16. Comme dans ces dernieres expériences le parallélipipede tombant de 5 pieds de haut s'enfonça de $15\frac{1}{2}$ lignes, tandis que b n'est que $\frac{1}{6}$ ligne, on n'aura qu'à diviser $15\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{6}$, & le quotient 93 indiquera que le parallélipipede enfoncé de $15\frac{1}{2}'''$ fait équilibre à son poids pris 93 fois, & ainsi à un poids de $1\frac{3}{32}$ fois $93 = 101\frac{3}{4}$ onces. Car $b = \frac{1}{6}$ ligne est la profondeur à laquelle le sable fait équilibre au parallélipipede lorsqu'il n'est chargé d'aucun poids (§. 11), & le poids doit être augmenté en raison simple de l'enfoncement (§. 4, 7).

§. 17. Les expériences que je viens de rapporter, répondent à la théorie autant que je pouvois le souhaiter. Je n'ai pas cru en devoir rester là. On voit sans peine que le parallélipipede en s'enfonçant perd successivement la vitesse qu'il avoit acquise en tombant, en sorte qu'à la profondeur $= \xi$ il a encore la vitesse qu'il pourroit acquérir en tombant librement d'une hauteur $= h$; tandis que sa vitesse initiale est celle qui est due à la hauteur $= H$. Or la formule (§. 12.)

$$bh = bH + b\xi - \tfrac{1}{2}\xi\xi$$

nous donne

$$H = \frac{bh - b\xi - \frac{1}{2}\xi\xi}{b}.$$

Ainsi les valeurs b, ξ étant prises à volonté, on peut toujours déterminer la hauteur H de laquelle la vitesse initiale dépend.

§. 18. Suppoſons donc les quantités h, ξ données, il s'agit de trouver la profondeur ξ', à laquelle le parallélipipede s'enfoncera lorſqu'à la profondeur ξ ſa viteſſe répond à la hauteur h. La formule générale (§. 12) nous donne

$$\xi' = b + \surd(bb + 2bH).$$

Subſtituant donc dans cette formule la valeur

$$H = \frac{bh - b\xi + \frac{1}{2}\xi\xi}{b}.$$

nous aurons

$$\xi' = b + \surd(bb + 2bh - 2b\xi + \xi\xi).$$

§. 19. Cette formule s'abrege en faiſant

$$\xi = b + x, \quad \& \quad \xi' = b + x'$$

de ſorte que x exprime la profondeur au-deſſous de celle où le ſable fait équilibre au parallélipipede. Subſtituant donc ces valeurs nous aurons

$$x' = \surd(2bh + xx).$$

§. 20. Je viens de ſuppoſer qu'à la profondeur $\xi = b + x$ la viteſſe du parallélipipede ſoit celle qui eſt due à la hauteur h. Or il eſt entierement indifférent de quelle part lui vient cette viteſſe. Ainſi nous pourrons également ſuppoſer qu'elle ſoit communiquée au parallélipipede par un choc, comme cela ſe fait dans le pilotage. Le réſultat en eſt toujours qu'il s'enfoncera juſqu'à la profondeur $\xi' = x' + b = b + \surd(2bh + xx)$.

§. 21. Nous voici donc en état de déterminer l'enfoncement répondant à un nombre quelconque de chocs conſécutifs. Examinons d'abord le cas le plus ſimple, en mettant pour baſe que d'abord le parallélipidede ſoit enfoncé juſqu'à la profondeur $= b$, où le ſable lui fait équilibre, & que chacun des chocs lui communique un même degré de viteſſe. Nous aurons donc d'abord

$$x = 0 \quad \& \text{ ainſi } \quad x' = \surd 2(bh).$$

Enſuite

Ensuite

$$x = \sqrt{(bh)} \qquad \& \text{ ainsi } \quad x' = \sqrt{(2bh)}$$
$$x = \sqrt{(2bh)} \quad - \; - \; - \quad x' = \sqrt{(3bh)}$$

&c.

Donc les enfoncemens croîtront comme les racines quarrées des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5 &c.

§. 22. Cette égalité des chocs, & des vitesses qui en résultent, dépend simplement de ce qu'on laisse tomber sur le parallélipipede un même poids & d'une même hauteur. Je me suis servi pour cet effet d'un marteau mobile autour de l'extrémité du manche, & que je pouvois abaisser à mesure que le parallélipipede s'enfonçoit. Voici maintenant les expériences que j'ai faites.

§. 23. Je pris le même parallélipipede dont je m'étois servi dans les expériences précédentes, mais du sable moins fin, quoique criblé. Appuyant le marteau sur le parallélipipede, je l'approchai doucement de la surface du sable, & le laissant s'enfoncer librement je vis qu'il s'enfonça de 4 lignes, & qu'à deux lignes de profondeur le sable lui fit équilibre. Je laissai le parallélipipede à cette profondeur, en le tenant légerement appuyé de la main. J'y fis tomber le marteau de la hauteur de 3 pouces, & j'observai combien le parallélipipede s'enfonçoit d'avantage à chaque coup de marteau. Cet enfoncement se trouva être successivement de 3, $4\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{3}$, $6\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{4}$, $8\frac{2}{3}$, $9\frac{1}{4}$, $9\frac{3}{4}$, $10\frac{1}{3}$, 11, $11\frac{1}{2}$ lignes, suivant l'ordre des 12 coups de marteau. Je dois remarquer que les secousses que le sable & le vase reçurent de ces coups, remirent la surface du sable de niveau, de sorte que l'enfoncement pouvoit être assez facilement mesuré après les deux premiers coups de marteau. Or par ce que je viens d'établir, les enfoncemens doivent être en raison des racines quarrées du nombre des coups de marteau. Faisant donc ce nombre $= n$, j'ai trouvé que je pouvois faire

$$x = \tfrac{10}{3} . \sqrt{n}.$$

Voici la comparaiſon

n	x calc.	x exp.	diff.
1	3, 3	3	+ 0, 3
2	4, 7	$4\frac{1}{4}$	+ 0, 4
3	5, 8	$5\frac{1}{3}$	+ 0, 5
4	6, 7	$6\frac{1}{2}$	+ 0, 2
5	7, 7	$7\frac{1}{2}$	+ 0, 2
6	8, 2	$8\frac{1}{4}$	0
7	8, 8	$8\frac{2}{3}$	+ 0, 1
8	9, 1	$9\frac{1}{4}$	— 0, 1
9	10, 0	$9\frac{3}{4}$	+ 0, 2
10	10, 5	$10\frac{1}{3}$	+ 0, 1
11	11, 1	11	0
12	11, 5	$11\frac{1}{2}$	0

§. 24. Je répétai la même expérience en laiſſant tomber le marteau de la hauteur de 4 pouces. Voici le réſultat comparé au calcul.

n	x calc.	x exp.	diff.
1	3, 8	$3\frac{1}{2}$	+ 0, 3
2	5, 3	$5\frac{2}{3}$	— 0, 3
3	6, 4	$6\frac{3}{4}$	— 0, 3
4	7, 6	$7\frac{1}{2}$	+ 0, 1
5	8, 5	$8\frac{1}{2}$	0
6	9, 3	$9\frac{1}{3}$	0
7	10, 0	10	0
8	10, 7	$10\frac{2}{3}$	0
9	11, 3	$11\frac{1}{3}$	0
10	12, 0	12	0

La ſeconde colonne eſt calculée au moyen de l'équation

$$x = 3,78.\sqrt{n}.$$

§. 25. Voyant ainſi que ces deux expériences répondoient à la théorie (§. 20) autant que je pouvois le ſouhaiter, je m'occupai à les comparer enſemble, rélativement à la chûte du marteau, qui étoit de 3 & de 4 pouces. Or les valeurs de h étant, tout au moins à très peu près, proportionelles à ces hauteurs, les formules (§. 21) indiquent que les enfoncemens doivent être proportionels aux racines quarrées de h, & par conſé-

quent aussi de la chûte du marteau. Or il se trouve que les coëfficiens dans les deux équations

$$x = \tfrac{10}{3}. \sqrt{n}$$
$$x = 3,78. \sqrt{n}$$

sont à très peu près dans le rapport de $\sqrt{3}$ à $\sqrt{4}$. Car

$$\sqrt{4} : \sqrt{3} = 3,78 : 3,27 \quad \text{au lieu de } 3\tfrac{1}{3}.$$

Ainsi la différence est une bagatelle, dont il n'est gueres possible de tenir compte dans ces sortes d'expériences.

§. 26. Je répétai encore cette expérience en employant un fil de laiton de la longueur de 10 pouces, & de $1\frac{3}{4}$ lignes de diametre, pesant 370 grains, poids de Berlin. Ce fil tout seul s'enfonça de 3 lignes dans le sable, & de 10 lignes lorsqu'il étoit chargé du poids du marteau, de sorte qu'à 5 lignes de profondeur le sable lui fit équilibre. Je le laissai à cette profondeur, & le marteau y tomba de la hauteur de 4 pouces. Je continuai l'expérience jusqu'au 24[me] coup de marteau. Voici le résultat comparé avec le calcul au moyen de l'équation

$$x = \tfrac{17}{2}. \sqrt{n}$$

n	x calc.	x exp.	diff.
1	8, 5	8'''	+ 0, 5
2	12, 0	12	0
3	14, 7	15	— 0, 3
4	17, 0	$16\frac{1}{2}$	+ 0, 5
5	19, 0	$18\frac{1}{2}$	+ 0, 5
6	20, 8	$20\frac{1}{2}$	+ 0, 3
7	22, 5	22	+ 0, 5
8	24, 0	24	0
9	25, 5	$25\frac{1}{2}$	0
10	26, 9	27	— 0, 1
11	28, 2	$28\frac{1}{2}$	— 0, 3
12	29, 4	30	— 0, 6
16	34, 0	$34\frac{1}{2}$	— 0, 5
20	38, 0	$37\frac{1}{2}$	+ 0, 5
24	41, 6	41	+ 0, 6

§. 27. Dans cette expérience chaque enfoncement devoit être mesuré, parce que le fil de laiton n'étoit pas divisé en pouces & lignes comme le pied ou le parallélipipede employé dans les expériences précédentes. Cela m'empécha de pousser la mesure jusqu'à des $\frac{1}{3}$ & des $\frac{1}{4}$ de ligne. Et de là vient que les différences entre le calcul & l'expérience sont presque toujours d'une demi-ligne. Mais comme elles sont indifféremment positives & négatives, elles ne sont d'aucune conséquence. Je vais donc encore comparer le coëfficient de l'équation

$$x = \frac{17}{2} . \sqrt{n}$$

avec celui de la précédente expérience (§. 24)

$$x = 3,78 . \sqrt{n}.$$

La chûte du marteau ayant été la même, ces coëfficiens sont simplement en raison de la racine quarrée de b, & par conséquent en raison réciproque de la racine quarrée des bases, les poids, y compris celui du marteau, ayant été à très peu près les mêmes. Or le diametre du fil de laiton est de $\frac{7}{4}$ ligne, donc l'aire de sa base de 2,41 lignes. Et la base du parallélipipede étoit de 15 lignes quarrées (§. 4). Cela donne à très peu près

$$\sqrt{(15)} : \sqrt{(2,41)} = 5 : 2$$

&

$$5 : 2 = \frac{17}{2} : 3,40 \quad \text{au lieu de } 3,78,$$

ce qui differe environ d'une $\frac{1}{10}$ partie, ou dans le rapport de 9 à 10, différence qui peut très bien provenir de quelque inégalité des coups de marteau, ou même de quelques grains de sable, qui par leur position plus ou moins embarrassée pouvoient retarder ou faciliter l'enfoncement. Car en répétant la même expérience j'ai toujours vu que les succès étoient plus ou moins différens.

§. 28. Avant que de passer à quelques autres expériences, j'ajouterai ici quelques réflexions sur la vitesse que le choc communique à un corps enfoncé dans le sable. Les trois expériences que je viens de rapporter, confirment ce que j'avois établi au §. 22, savoir que le marteau tombant d'une même hauteur, communique au parallélipipede un même degré de vi-

teſſe, quel que puiſſe être l'enfoncement dans le ſable. Il s'agit donc d'examiner juſqu'à quel point cette viteſſe peut être déterminée par les loix connues du choc des corps. Ces loix ne regardent ordinairement que les corps qui ont une élaſticité parfaite & ceux qui en ſont entierement privés. Cela fait qu'elles ne paroiſſent pas être applicables au cas dont il s'agit. Car encore que le marteau étant d'acier puiſſe être regardé comme élaſtique, le parallélipipede de bois de buis l'eſt dans un moindre degré. J'ai auſſi remarqué dans ces expériences, que le marteau ne rebondiſſoit ordinairement qu'après que le parallélipipede étoit déjà enfoncé de pluſieurs lignes. C'eſt qu'alors il ne s'enfonçoit plus beaucoup, au lieu qu'aux premiers coups de marteau le parallélipipede cédoit plus facilement, & le marteau, au lieu de rebondir, pouvoit ſuivre le mouvement du parallélipipede, qui, pour avoir eu 10 à 12 fois moins de maſſe, devoit, pour peu qu'il fût élaſtique, avoir après le choc plus de viteſſe que le marteau n'en avoit acquis en tombant. En tout cela il n'y a rien encore qui ne ſoit fort naturel & fort conforme aux loix du choc.

§. 29. J'ai dit encore au §. 22. que pour communiquer au parallélipipede le même degré de viteſſe, le même marteau ou poids devoit tomber d'une même hauteur. *Je ſais bien qu'on établit communément qu'il ſuffit* que le poids ſoit en raiſon réciproque de la hauteur d'où il tombe. Mais cet énoncé eſt un peu trop général & trop peu déterminé. Il s'enſuivroit que la hauteur de la chûte étant infiniment petite, le poids devroit être infiniment grand, ce qui, dans le cas dont il s'agit, n'a pas lieu, parce qu'encore que la chûte du poids ſur le parallélipipede ſoit nulle, ce poids n'a pas beſoin d'être infiniment grand pour qu'il enfonce le parallélipipede d'une quantité quelconque donnée. Dans ce cas le poids conjointement avec celui du parallélipipede s'enfonce par la ſimple action de la peſanteur, & ſans que le choc y contribue, puiſqu'il ne ſe fait point de choc.

§. 30. Voici d'abord le calcul pour ce cas où le poids dont on charge le parallélipipede enfoncé juſqu'à une certaine profondeur p, l'enfonce

encore d'avantage par la ſimple action de la gravité, & ſans choc. Il ne s'agit que de déterminer la conſtante dans la formule générale (§. 11.)

$$bh = b\xi - \tfrac{1}{2}\xi\xi + \text{Conſt.}$$

Or dans cette formule on a $\xi > p$, & b eſt la profondeur à laquelle le ſable fait équilibre au parallélipipede chargé du poids donné, & non pas au parallélipipede tout ſeul. Mais h doit être $= 0$, lorſque $\xi = p$. Cela donne

$$bh = b(\xi - p) - \tfrac{1}{2}(\xi\xi - pp),$$

équation qui détermine la valeur de h pour un enfoncement ξ quelconque. Or à la fin h doit être $= 0$, parce que le parallélipipede perd entierement ſa viteſſe. Nous avons donc

$$0 = b(\xi - p) - \tfrac{1}{2}(\xi\xi - pp)$$

ce qui donne les deux valeurs

$$\xi - b = \pm (p - b).$$

La premiere de ces valeurs, en prenant le ſigne poſitif, donne $\xi = p$, c'eſt à dire, la profondeur initiale du parallélipipede. La ſeconde valeur, en prenant le ſigne négatif, donne

$$\xi = 2b - p$$

& c'eſt la profondeur terminale. On voit qu'elle eſt d'autant plus grande que la profondeur initiale p eſt plus petite, & qu'elle devient $= 2b$ lorſque $p = 0$, ou que l'enfoncement ſe fait depuis la ſurface du ſable (§ 13). Obſervons encore, à l'égard du ſable, que p ne ſauroit être pris $> b$. Cela feroit $\xi < b$, & le parallélipipede remonteroit. Or j'ai déjà dit que la fluidité du ſable ne s'accorde avec celle des liquides qu'entant qu'il rallentit l'enfoncement (§. 10).

§. 31. Si le parallélipipede ſe trouve préciſément enfoncé juſqu'à la profondeur où le ſable lui fait équilibre, il s'enfoncera encore d'avantage dès qu'on le charge de quelque poids. S'il eſt moins enfoncé, il s'enfoncera d'avantage par ſon propre poids. Mais s'il eſt plus enfoncé, alors

pour l'enfoncer d'avantage il faut que le poids dont on le charge foit plus grand que celui qui fuffit pour que le fable lui faffe équilibre. Il n'en eft pas de même du choc, dont l'effet eft toujours tel que le parallélipipede s'enfonce d'avantage.

§. 32. Soit la maffe du marteau ou du corps dont la chûte fur le parallélipipede produit le choc, $= M$. La maffe du parallélipipede $= m$, la viteffe de la maffe M avant le choc foit $= V$, celle du parallélipipede avant le choc $= 0$, après le choc $= c$. Nous aurons

$$c = \frac{(1+\mu) \cdot M \cdot V}{M + m}.$$

Dans cette formule on a pour les corps non-élaftiques $\mu = 0$, pour les corps parfaitement élaftiques $\mu = 1$, & pour les corps qui n'ont pas une parfaite élafticité μ eft une fraction > 0 & < 1, qu'il faut dans chaque cas particulier déterminer par l'expérience.

§. 33. Mais pour donner à cette formule plus de généralité, fuppofons la viteffe du parallélipipede, avant le choc, $= v$, & nous aurons fa viteffe, après le choc,

$$c = \frac{(1+\mu) M V + (m - \mu M) v}{M + m}.$$

§. 34. Soit maintenant, comme ci-deffus, b la profondeur à laquelle le fable fait équilibre au parallélipipede. Suppofons que le parallélipipede n'eft encore enfoncé qu'à la profondeur p; il pourra s'enfoncer d'avantage quand encore fa viteffe à la profondeur p eft $= 0$. Mais fuppofons qu'il ait la viteffe $= v$, & que dans le même inftant, au moyen du choc, cette viteffe fe change en

$$c = \frac{(1+\mu) M V + (m - \mu M) v}{M + m},$$

§. 35. Cela pofé, voici les deux cas qui peuvent avoir lieu.

I°. Si la maffe M en tombant fur le parallélipipede rebondit après le le choc, & qu'on l'empêche d'y retomber une feconde fois, alors la valeur de la lettre b eft celle qui répond fimplement au poids du parallélipipede.

II°. Mais ſi la maſſe M ne rebondit pas, de ſorte qu'elle reſte & continue de peſer ſur le parallélipipede, alors la valeur de b doit être priſe plus grande en raiſon de la maſſe m à la ſomme des maſſes $m + M$. En échange il ſemble que dans ce dernier cas la valeur de μ eſt ou très petite ou $= 0$, tandis que dans le premier elle ſera $= 1$ ou approchera du moins fort de l'unité. Mais quoi qu'il en ſoit, il nous ſuffira de laiſſer ces valeurs de b & de μ indéterminées.

§. 36. Ainſi, à la profondeur donnée $= p$, la viteſſe du parallélipipede eſt $= v$, & après le choc $= c$. C'eſt avec cette viteſſe que le parallélipipede continue de s'enfoncer en ſorte qu'à la profondeur $= \xi$ la viteſſe qui lui reſte eſt due à la hauteur $= h$, & qu'on a (§. 11.)

$$bh = b\xi - \tfrac{1}{2}\xi\xi + \text{Conſt.}$$

Soit a la hauteur de la chûte qui produit la viteſſe $= c$, & il eſt clair qu'en faiſant $\xi = p$, il faut que h ſoit $= a$. Cela donne

$$bh = ba + b(\xi - p) - \tfrac{1}{2}(\xi\xi - pp).$$

§. 37. Faiſons maintenant $h = 0$, pour avoir la profondeur entiere à laquelle le parallélipipede s'enfonce, & cette profondeur ſera

$$\xi = b + \sqrt{(2ba + (b - p)^2)}.$$

§. 38. Subſtituons aux viteſſes V, v, c les hauteurs A, α, a, & nous aurons (§. 34.)

$$\sqrt{a} = \frac{(1 + \mu)M \cdot \sqrt{A} + (m - \mu M)\sqrt{\alpha}}{M + m}$$

valeur qui peut être ſubſtituée dans l'équation

$$\xi = b + \sqrt{(2ba + (b - p)^2)}$$

que nous venons de trouver.

§. 39. Le cas le plus ordinaire étant celui où $\alpha = 0$, ce qui rend le choc plus efficace, nous aurons pour ce cas

$$\sqrt{a} = \frac{(1 + \mu) \cdot M}{M + m} \cdot \sqrt{A}$$

ce

ce qui donne

$$\xi = b + V\left(2b\left(\frac{1+\mu}{M+m}\right)^2 M^2 . A + (b-p)^2\right).$$

§. 40. Si donc dans ce cas il ne se fait point de choc, on aura $A = 0$, & par conséquent

$$\xi = 2b - p$$

précisément comme nous l'avons trouvé ci-dessus (§. 30). On voit donc comment dans cette formule générale (§. 39), l'effet du choc se joint à celui de la simple pression, qui résulte du poids.

§. 41. Comme cette formule comprend les cas du pilotage, il ne sera pas hors de propos de l'y appliquer plus particulierement : m est le poids du pieu, M celui du mouton, & A la hauteur de laquelle on le laisse tomber. Or comme il faut toujours faire remonter le mouton, cela demande du tems & les forces d'un certain nombre d'ouvriers. C'est d'après ces forces qu'il faut estimer le produit MA rélativement au tems qu'ils y emploient. A cet égard le nombre d'ouvriers étant donné, la quantité MA est constante; car il leur faut autant de tems pour faire monter la masse M par la hauteur A, qu'il leur en faut pour élever la masse vM à la hauteur $A : v$. Jusques-là donc il n'y a rien à gagner. Mais voyons quel sera l'effet.

§. 42. Soit donc $MA =$ Const. $= C$, & la formule se change en

$$\xi = b + V\left[2b(1+\mu)^2 . \frac{MC}{(M+m)^2} + (b-p)^2\right].$$

Dans cette formule la partie variable est

$$\frac{M}{(M+m)^2}$$

& nommément la masse M. Or ξ augmente à mesure que cette quantité augmente. Ainsi il ne s'agit que de voir si cette quantité

$$\frac{M}{(M+m)^2}$$

peut être un *maximum*. Nous aurons donc

$$o = \frac{dM}{(M + m)^2} - \frac{2M \cdot dM}{(M + m)^3}$$

ce qui donne

$$M = m.$$

§. 43. *Donc* M, *de même que* ξ, *devient un* maximum *lorsque le poids du mouton est égal à celui du pieu qu'il doit enfoncer.* Je dis un *maximum;* car en faisant $M = m \pm z$, on a

$$\frac{M}{(M + m)^2} = \frac{m \pm z}{(2m \pm z)^2} = \frac{1}{4m} - \frac{zz}{4m(2m \pm z)^2}.$$

Ainsi, soit qu'on prenne z positive ou négative, le quotient est toujours plus petit que lorsqu'on fait $z = o$.

§. 44. Dans ce calcul j'ai fait abstraction du tems que le mouton emploie à tomber. Ainsi la conséquence n'est à proprement parler applicable qu'aux cas où le tems qu'on emploie pour faire remonter le mouton est beaucoup plus long, comme cela arrive lorsqu'on remonte le mouton au moyen d'une machine, & non à force de bras, comme cela se fait dans les machines à piloter ordinaires, où le mouton monte à peu près aussi vite qu'il tombe. Je ne décide pas si ce dernier cas est fort différent du premier. Je dis simplement qu'il n'est pas compris dans le calcul que je viens de faire. Je me bornerai donc à dire, *que dans les cas où le mouton monte beaucoup plus lentement qu'il ne tombe, l'effet est le plus avantageux quand le poids du mouton est égal à celui du pieu qu'il doit enfoncer.* C'est alors qu'avec un même nombre d'ouvriers & dans un même intervalle de tems le pieu s'enfonce le plus.

§. 45. On savoit généralement parlant de tout tems, qu'il doit y avoir un certain rapport entre le poids du mouton & celui des pieux. Rien n'étoit plus facile que de s'appercevoir que c'étoit perdre du tems & des forces que de vouloir enfoncer un petit clou au moyen d'un marteau pesant plusieurs quintaux & qui écraseroit tout. Et réciproquement on savoit que c'étoit perdre du tems & ne point faire assez usage de ses forces que de vouloir enfoncer un pieu pesant plusieurs quintaux en y frappant de la main

ou avec un marteau pesant quelques onces. De là rien de plus facile que d'éviter ces deux excès dans la disproportion entre la force & l'effet. On se rapprocha assez facilement du milieu, & comme pour enfoncer des pieux d'un pied d'épaisseur les coups de marteau n'étoient d'aucun effet, on mit en œuvre des moutons pesant 5, 10 ou plus de quintaux. On fit même une différence entre mouton & mouton, pour les proportionner plus ou moins au poids & à la masse du pieu qu'il s'agissoit d'enfoncer. Tout cela se fit parce qu'on s'y vit comme obligé, sans cependant en entrevoir clairement la raison. Ce qu'il restoit donc à faire c'étoit de déterminer au juste le rapport entre la masse du mouton & celle du pieu. Nous venons de voir que ce rapport est celui d'égalité, & il me semble qu'en général & sans le favoir on s'en approche fort dans la pratique, tant dans l'usage des moutons que dans celui des marteaux de différente grandeur.

§. 46. Je passerai maintenant à considérer les cas où le corps qu'il faut enfoncer est pointu, ou de figure conique ou pyramidale. Soit ce corps AB, la surface du sable D, $AE = b$, $AD = \xi$, h la hauteur qui répond à la vitesse du coin lorsqu'il est enfoncé jusqu'en ξ. La force retardatrice du sable sera $= (b^3 - \xi^3) : b^3$ & ainsi on aura Fig. 1.

$$dh = \frac{b^3 - \xi^3}{b^3} . d\xi$$

ce qui donne

$$hb^3 = b^3 \xi - \tfrac{1}{4}\xi^4 + \text{Const.}$$

§. 47. Si donc le coin pour s'enfoncer dans le sable tombe de la hauteur $= H$, on aura $h = H$, lorsque $\xi = 0$, & par conséquent

$$b^3 h = b^3 H + b^3 \xi - \tfrac{1}{4}\xi^4$$

ce qui pour l'enfoncement total, ou $h = 0$, donne

$$\xi^4 - 4b^3\xi = 4b^3 H.$$

§. 48. Si le coin pour s'enfoncer ne tombe que depuis la surface du sable on a $H = 0$, & ainsi

$$\xi = b . \sqrt[3]{4}.$$

§. 49. Réciproquement, on a en général

$$H = h - \xi + \tfrac{1}{4}\xi^4 : b^3$$

ce qui eſt la hauteur de laquelle le coin doit tomber pour qu'à la profondeur ξ il ait encore la viteſſe qui répond à la hauteur h.

§. 50. Cette viteſſe pouvant également être communiquée au coin par un choc, nous n'avons qu'à poſer $= \xi'$ la profondeur à laquelle le coin pénétrera, & nous aurons

$$\dot{\xi}^4 - 4b^3\dot{\xi} = 4b^3h - 4b^3\xi + \xi^4$$

de ſorte que h, ξ étant données on trouve ξ'.

§. 51. Suppoſons, comme ci-deſſus (§. 38), que le choc ſe faſſe par la chûte d'une maſſe $= M$, de la hauteur A, & ſoit m la maſſe du coin, nous aurons

$$\sqrt{h} = \left(\frac{1+\mu}{M+m}\right) . M . \sqrt{A}$$

& ainſi

$$\dot{\xi}^4 - 4b^3\dot{\xi} = 4b^3 . \left(\frac{1+\mu}{M+m}\right)^2 . M^2 . A - 4b^3\xi + \xi^4$$

ce qui en général veut dire

$$\Phi\xi' = B + \Phi\xi$$

où Φ dénote une même fonction de ξ', & de ξ.

§. 52. Si donc on a d'abord $\xi = 0$, on aura ſucceſſivement

$$\Phi\xi' = B$$

$$\Phi\xi'' = 2B$$

$$\Phi\xi''' = 3B$$

&c.

& pour le n^{me} choc

$$\Phi\overset{n}{\xi} = nB,$$

ce qui veut dire

$$\overset{n}{\xi^4} - 4b^3\overset{n}{\xi} = 4nb^3A \cdot M^2\left(\frac{1+\mu}{M+m}\right)^2.$$

Dans cette formule les chocs ſont ſuppoſés égaux.

§. 53. Je fis une pyramide de bois longue de 2 pouces; la baſe étoit un rectangle de 7 lignes de longueur & de $4\frac{5}{7}$ lignes de largeur. Ayant chargé ce coin du même marteau dont je me ſuis ſervi ci-deſſus, je trouvai que le ſable lui fit équilibre lorſqu'il étoit enfoncé de $8\frac{1}{2}$ lignes $= b$. Voici le réſultat de l'expérience que j'ai faite en laiſſant toujours tomber le marteau de la hauteur de 3 pouces.

n	ξ	$\xi - b$	Conſtr.	diff.
0	$8\frac{1}{2}'''$	0	0	0
1	12	4, 5	5, 3	0, 8
2	15	6, 5	7, 0	0, 5
3	$16\frac{1}{2}$	7, 5	8, 3	0, 8
4	$17\frac{1}{2}$	9, 0	9, 3	0, 3
5	$18\frac{1}{4}$	9, 7	10, 1	0, 4
6	19	10, 5	10, 8	0, 3
7	$19\frac{1}{2}$	11, 0	11, 4	0, 4
8	$20\frac{1}{4}$	11, 7	11, 9	0, 2
9	$20\frac{3}{4}$	12, 3	12, 4	0, 1
10	$21\frac{1}{4}$	12, 7	13, 0	0, 3
11	$21\frac{3}{4}$	13, 2	13, 5	0, 3
12	$22\frac{1}{5}$	13, 7	13, 9	0, 2
13	$22\frac{2}{3}$	14, 2	14, 3	0, 1
14	23	14, 5	14, 6	0, 1
15	$23\frac{1}{3}$	14, 8	14, 8	0, 0
16	$23\frac{2}{3}$	15, 2	15, 0	0, 2
17	24	15, 5	15, 3	0, 2

Les nombres de la pénultieme colonne ſont ceux que j'ai trouvés en conſtruiſant la courbe

$$\xi^4 - 4b^3\xi \backsim n;$$

par là je me diſpenſai de réſoudre 17 équations du quatrieme degré. Les différences de la derniere colonne ſont preſque toutes poſitives, de ſorte

qu'en changeant tant soit peu le coëfficient dont je devois me servir pour proportionner la construction aux nombres que donna l'expérience, ces différences auroient été encore plus petites.

§. 54. Je répétai cette expérience en enfonçant un clou fort pointu dans du bois de sapin le long des fibres longitudinales, au moyen du même marteau que j'y laissai tomber de la hauteur de 4 pouces. En voici le résultat.

Nombre des coups n	Enfoncemens lignes ξ
1	1, 9
2	3, 0
3	3, 7
4	4, 2
5	4, 5
6	4, 8
7	5, 0
8	5, 2
9	5, 4
10	5, 6
11	5, 7
12	5, 9
13	6, 0
24	7, 0
37	8, 0
52	9, 0
68	10, 0
96	11, 0
134	12, 0

§. 55. Or en faisant $\xi - b = x$ l'équation (§. 52.) se change en

$$x^4 + 4bx^3 + 6b^2x^2 = \varrho n.$$

Et comme l'expérience donne

$$\text{pour} \quad n = 13 \qquad x = 6$$
$$n = 134 \qquad x = 12$$

nous aurons

$$\varrho = 260$$
$$b = 1,688$$

& par conféquent

$$x^4 + 6,752x^3 + 17,094x + 260n,$$

ce qui pour chaque ligne d'enfoncement donne

x	n calc.	n exp.	diff.
1	——	——	——
2	0, 5	1	— 0, 5
3	1, 6	2	— 0, 4
4	3, 7	3, 6	+ 0, 1
5	7, 3	7	+ 0, 3
6	——	13	——
7	21, 4	24	— 2, 6
8	33, 3	37	— 3, 7
9	49, 9	52	— 2, 1
10	71	68	+ 3
11	98	96	+ 2
12	——	134	——

Les différences font, généralement parlant, affez petites pour que le moindre défaut dans la mefure des enfoncemens ait pu les produire. Mais la valeur $b = 1,688$, trouvée par le calcul, eft plus grande que celle que l'expérience me donna immédiatement; car le clou chargé fimplement du poids du marteau ne s'enfonça gueres plus que de $\frac{1}{4}$ ligne.

§. 56. Jé répétai la même expérience en enfonçant le même clou dans du plomb, au moyen du même marteau que j'y laiffai tomber de la hauteur de 4 pouces. Voici le réfultat, comparé avec le calcul fait moyennant l'équation

$$x^4 + 16,86\,x^3 + 106,64\,x = 127n.$$

x	n calc.	n exp.	diff.
1	1	1	0
2	4, 5	6 —	— 1, 5
3	11, 7	11	+ 0, 7
4	——	24	——
5	42, 5	48	— 5, 5
6	61, 1	80	— 10, 9
7	105, 7	113	— 7, 3
8	——	152	——

§. 57. Vers la fin de l'expérience le clou commença à se plier, ce qui, joint à ce que vers la fin il eût fallu diviser une ligne en 30 ou 40 parties pour juger si en effet l'enfoncement avoit augmenté d'une ligne, peut très naturellement avoir produit les différences qui se trouvent entre le calcul & l'expérience. Du reste encore ici la valeur de b, trouvée par le calcul, est $= 4''', 216$ & par conséquent encore plus grande que dans l'expérience précédente. Mais outre que le clou n'étoit pas pointu dans la rigueur géométrique il s'en faut de beaucoup que le bois & le plomb, quoique fort mous, puissent, à l'égard de la fluidité, être comparés au sable. Aussi n'ai-je fait les deux dernieres expériences que pour voir jusqu'à quel point la formule (§. 52.) y seroit applicable. Les deux Tables (§§. 55. 56.) font voir que la différence entre le calcul & les expériences est assez petite pour pouvoir être regardée comme nulle. Ainsi il n'y a que la lettre b & le coëfficient ϱ qui semblent avoir une valeur & une signification un peu différentes de celles qu'ils ont à l'égard du sable & des liquides.

§. 58. Ce que je puis dire à ce sujet c'est que les corps mous, tels que le plomb, peuvent plus ou moins être comprimés & par là être condensés, & cette condensation peut avoir lieu indépendamment de la profondeur des particules au-dessous de la surface. Ce sont les forces de cohésion qui entrent ici en ligne de compte, & dont la loi n'est pas encore suffisamment connue. Du reste en enfonçant un clou dans du plomb, l'enfoncement se fait toujours d'autant plus difficilement qu'il y a plus de particules à déplacer.

§. 59.

§. 59. Les mêmes remarques se présentent à faire à l'égard du terrain marécageux, qui peut plus ou moins différer du sable, quoique toujours beaucoup moins que n'en different le bois & le plomb. Les expériences que j'ai rapportées dans ce Mémoire, me semblent mériter d'être faites en grand. On peut à cet égard se servir des occasions qu'offre le pilotage, surtout dans un terrain égal, parce qu'il suffit d'avoir attention à ce que le mouton tombe toujours d'une même hauteur, ce qui n'est pas difficile pour peu que la machine à piloter soit arrangée en conséquence. Les moyens de mesurer l'enfoncement du pieu sont également fort simples & faciles, parce qu'il suffit de le diviser en pieds & pouces, en notant les divisions avec de la craie. On voit sans peine que ces sortes d'expériences, faites avec quelque soin, aboutiroient à nous donner des mesures justes de la solidité du terrain. C'est ainsi par ex. qu'on pourroit évaluer le poids que pourra porter un pieu enfoncé à une certaine profondeur, sans que ce poids dont il seroit chargé, l'enfonçât d'avantage. Par là on détermineroit le nombre des pieux, leur épaisseur & la profondeur à laquelle il faudroit les enfoncer pour qu'ils pussent porter un édifice ou quelqu'autre ouvrage d'architecture d'un poids donné. Et comme le terrain marécageux & spongieux, à force de pilotis qu'on y enfonce, se resserre, & contribue par là à augmenter la force des pieux, il est clair que c'est encore là un article qui mériteroit d'être examiné par des expériences faites avec soin, & dans le but de répandre du jour sur la théorie de la solidité du terrain & de la stabilité des ouvrages d'architecture.

§. 60. J'ajouterai encore quelques considérations sur le cas où le corps qui s'enfonce est sphérique. C'est le cas des bombes & des boulets de canon. Soit donc la boule A enfoncée jusqu'en D, & que sa vitesse réponde à la hauteur $= h$. Que le terrain fasse équilibre lorsque la boule est enfoncée jusqu'en E, de sorte que $AE = b$. Faisons $AD = \xi$, la force retardatrice pour l'enfoncement ξ sera Fig. 4.

$$= 1 - \frac{3D\xi^2 - 2\xi^3}{3Db^2 - 2b^3}.$$

De là nous aurons

$$\mathrm{d}h = \mathrm{d}\xi - \frac{3D\xi^2 - 2\xi^3}{3Db^2 - 2b^3} \cdot \mathrm{d}\xi$$

& en intégrant

$$h = \xi - (D\xi^3 - \tfrac{1}{2}\xi^4) : (3Db^2 - 2b^3) + \text{Conſt.}$$

§. 61. Soit $h = H$ lorſque $\xi = 0$, on aura

$$h = H + \xi - (D\xi^3 - \tfrac{1}{2}\xi^4) : (3Db^2 - 2b^3).$$

§. 62. Pour appliquer cette formule à des cas particuliers il y a deux cas qu'il faut diſtinguer. Car h peut devenir $= 0$, ou avant que la boule ſoit entierement enfoncée, ou après qu'elle l'eſt déjà. Dans le premier cas, on trouvera l'enfoncement total en faiſant ſimplement $h = 0$. Cela donne

$$0 = H + \xi - (D\xi^3 - \tfrac{1}{2}\xi^4) : (3Db^2 - 2b^3)$$

d'où l'on tire

$$0 = \xi^4 - 2D\xi^3 + (6D - 4b)b^2\xi + (6D - 4b)b^2H.$$

§. 63. En laiſſant tomber une boule de plomb dans du ſable, j'ai trouvé qu'elle s'enfonçoit de la moitié de ſon diametre lorſqu'elle tomboit de la hauteur de 50 de ſes diametres. Poſant donc $D = 1$, $H = 50$, $\xi = \frac{1}{2}$, on trouve $b = \frac{1}{40}$. Cette valeur, de même que celle de D, étant ſubſtituée, on a

$$H = -271{,}2\,\xi^4 + 542{,}4\,\xi^3 - \xi.$$

Voici donc comment la boule s'enfonce à meſure qu'elle tombe d'une plus grande hauteur.

ξ	H	volume.
0, 1	0, 42	0, 028
0, 2	3, 71	0, 104
0, 3	14, 25	0, 216
0, 4	27, 37	0, 352
0, 5	50, 35	0, 500
0, 6	71, 44	0, 648
0, 7	118, 78	0, 784
0, 8	165, 83	0, 896
0, 9	216, 71	0, 926
1, 0	270, 20	1, 000

§. 64. Dans cette Table la premiere colonne marque l'enfoncement en parties décimales du diametre de la boule; la seconde la hauteur de la chûte en diametres de la boule & leurs parties centésimales; la troisieme indique le volume de la partie enfoncée de la boule, le volume entier étant exprimé par l'unité. J'ai ajouté cette troisieme colonne, parce que dans les disputes sur les forces vives on a cru pouvoir démontrer, & par la théorie & par l'expérience, que ces forces sont proportionelles aux cavités formées par l'enfoncement, & par conséquent aux nombres de la troisieme colonne. Ainsi ces nombres devoient encore être proportionels aux nombres répondans de la seconde colonne. Mais on voit qu'il y a une énorme différence.

§. 65. L'équation que nous venons de trouver ne s'étend qu'aux cas où $\xi < D$, c'est à dire où la boule ne s'enfonce qu'en partie. Mais si elle tombe d'une plus grande hauteur, en sorte qu'après s'être entierement enfoncée elle ait encore assez de vitesse pour s'enfoncer d'avantage, alors il faut commencer à déterminer cette vitesse, ou la hauteur due à cette vitesse. Cela se fait en posant dans l'équation (§. 61.)

$$h = H + \xi - (D\xi^3 - \tfrac{1}{2}\xi^4) : (3Db^2 - 2b^3)$$

$\xi = D$. Par là on obtient

$$h' = H + D - \frac{D^4}{2bb(3D - 2b)}$$

ce qui est la hauteur due à la vitesse que la boule a encore lorsqu'elle commence à être entierement enfoncée.

§. 66. Cette viteſſe ſe perd uniformément. Car la boule étant entierement enfoncée, la force retardatrice commence à être conſtante

$$= 1 - \frac{D^3}{(3D - 2b)bb} = - \frac{D^3 - 3Db^2 + 3b^3}{3Db^2 - 2b^3},$$

ce qui, pour un plus grand enfoncement ξ, donne en général

$$h = h' - \frac{D^3 - 3Db^2 + 2b^3}{3Db^2 - 2b^3} \cdot (\xi - D).$$

§. 67. Pour trouver l'enfoncement total il faut faire $h = 0$, ce qui donne

$$0 = h' - \frac{D^3 - 3Db^2 + 2b^3}{3Db^2 - 2b^3} \cdot (\xi - D)$$

ou bien

$$\xi = D + \frac{h'(3Db^2 - 2b^3)}{D^3 - 3Db^2 + 2b^3}.$$

§. 68. Je ne puis rapporter ici qu'une ſeule expérience faite en grand près de *Strasbourg* par Mr. *du Moutier*. Ce Capitaine d'Artillerie fit dreſſer verticalement une piece de canon de 24 livres de balle, & chargée d'abord de 12 livres, enſuite de 16 livres de poudre. La premiere fois le boulet reſta dans l'air pendant 51 ſecondes de tems, l'autre fois il employa 53″ pour monter & redeſcendre. L'une & l'autre fois en retombant il s'enfonça d'environ 28 pouces en terre, à une diſtance de 300 & de 367 toiſes du canon.

§. 69. J'entens que le boulet étoit de fer, ce qui fait que ſon diametre eſt à très peu près $\frac{9}{20}$ pied de Paris. Je poſerai encore ſa gravité ſpécifique 5365 fois plus grande que celle de l'air & je ferai la chûte des corps, qui dans le vuide répond à une ſeconde de tems, = 15,096 pieds. Appliquant donc à ce cas les formules que j'ai données dans les *Mémoires de l'Académie* 1765, je trouve la viteſſe terminale, c'eſt à dire la plus grande que ce boulet puiſſe acquérir en tombant = 190,91 pieds; le tems de la montée dans la premiere expérience = 18″,9; le tems de la deſcente = 32″,1; la viteſſe initiale avec laquelle le boulet ſortit du canon = 1282,5 pieds par ſeconde; la viteſſe avec laquelle il retomba à

terre $=$ 188,8 pieds; la hauteur à laquelle le boulet monta $=$ 4621,2 pieds.

§. 70. Or ici il suffit de nous en tenir à la vitesse avec laquelle le boulet retomba à terre & qui est $=$ 188,8 pieds; ce qui donne la hauteur due à cette vitesse

$$H = 590,3 \text{ pieds} = 1312 \text{ diametres de la boule.}$$

Le boulet s'enfonça de 28 pouces, ce qui donne

$$\xi = \frac{140}{27} \text{ diam. de la boule.}$$

Posant donc le diametre $= 1$, & substituant ces valeurs dans les équations (§§. 67. 65.)

$$\xi = D + \frac{h'(3Db^2 - 2b^3)}{D^3 - 3Db^2 + 2b^3}$$

$$h' = H + D - \frac{D^4}{2bb(3D - 2b)}$$

nous en déduirons l'équation

$$0 = b^3 - \tfrac{3}{2}b^2 + \frac{1}{629,44}.$$

Cette équation a trois racines réelles & positives. La plus grande, qui est à très peu près $b = \frac{3}{2}$, est exclue, parce qu'elle feroit $b > D$. Les deux autres sont $b = 0,0329$ & $b = 0,0322$, de sorte que b est à très peu près $= \frac{1}{30}$ du diametre du boulet; ce qui dans un terrain mou, tel que seroit celui d'un champ labouré, peut très bien avoir lieu. Car pour le sable & des boulets de plomb j'ai trouvé $b = \frac{1}{40}$ (§. 64.)

§. 71. Si le même boulet, au lieu d'être tiré verticalement en haut, avoit été tiré contre terre à plomb, il se seroit enfoncé bien d'avantage. Car sa vitesse étoit $=$ 1282,5 pieds. La hauteur qui répond à cette vitesse est $=$ 27239 pieds $=$ 60531 diametres du boulet. Faisant donc

$$b = \frac{1}{30}$$

$$D = 1$$

$$H = 60531$$

on trouve (§. 65. 67.)

$$k' = 60379$$
$$\xi = 198.$$

Ainfi le boulet s'enfonceroit de 198 de fes diametres, ou de 89 pieds. Cet enfoncement croît ou décroît à très peu près comme le quarré de la viteffe. Si donc la viteffe n'eft que de 500 pieds par feconde, il ne s'enfoncera que de 20 pieds. Et fi la viteffe n'eft que de 400 pieds, il ne s'enfoncera que de 14 pieds. Or la viteffe des boulets qui viennent frapper les remparts n'eft gueres plus grande que de 400 pieds par feconde, vû que la réfiftance de l'air la diminue fort confidérablement. Voilà donc pourquoi on exige pour le parapet près de 20 pieds d'épaiffeur.

§. 72. Dans les calculs précédens j'ai fait abftraction de ce qu'on peut appeller la *réfiftance* du fable ou du terrain, entant qu'elle dépend du plus ou du moins de viteffe. La retardation du mouvement qui en réfulte eft fort petite en comparaifon de celle qui vient de ce que j'ai nommé ci-deffus (§. 9.) la force hydroftatique du fable ou du terrain. Mais elle peut entrer en ligne de compte lorfqu'un corps fe meut fous terre dans une direction plus ou moins horizontale, quoiqu'encore dans ce cas elle fe combine & fe confonde avec la force hydroftatique. Suppofons un boulet qui fous terre fe meuve horizontalement. Il eft clair qu'à mefure qu'il avance, il trouve de la terre à déplacer. Cela fe fait en ce qu'il fouleve la terre, & à cet égard l'effort qu'il doit faire dépend de fa profondeur au-deffous de la furface du terrain où il fe meut. Il foulevera plus facilement la terre qu'il touche par en haut que celle qu'il touche par en bas. Cette derniere fera en partie déprimée, & ne pouvant pas céder elle oblige le boulet à courber fon chemin & à remonter vers la furface. Cette courbure peut encore être regardée comme un effet de la force hydroftatique, d'autant plus qu'elle a encore lieu dans les liquides.

§. 73. Une bombe de 10″, 63 du pied de Rhin, & 4078 fois plus pesante qu'un même volume d'air, fut jettée sous un angle de 45 degrés. Elle retomba à terre à une distance de 1650 pieds de Rhin. On la trouva enfoncée de $13\frac{1}{2}$ pouces sous terre, & à 35 pouces de distance horizontale de l'endroit où elle avoit commencé à s'enfoncer. Le chemin qu'elle parcourut sous terre étoit une ligne courbe, qui à la fin avoit une direction entierement horizontale. Cette courbure est simplement un effet de la force hydrostatique du terrain, qui étoit celui d'un champ labouré & sablonneux.

§. 74. En ajoutant aux $13\frac{1}{2}$ pouces d'enfoncement le diametre de la boule 10,63, on a l'enfoncement total $\xi = 24''{,}13$, qui par conséquent est $= 2{,}27$ diametres de la bombe.

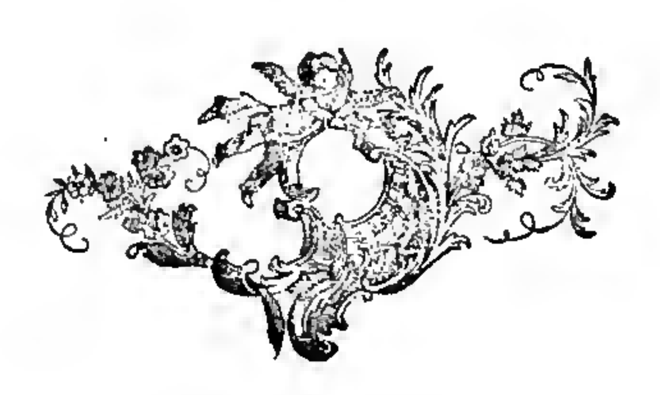
§. 75. Or par la théorie de la résistance de l'air je trouve que cette bombe tomba à terre sous un angle d'incidence de $48\frac{1}{3}$ degrés, avec une vitesse de 212 pieds de Rhin par seconde. Cela donne la vitesse verticale $=$ 159 pieds, & la hauteur due à cette vitesse est $=$ 401 pieds $=$ 453 diametres de la boule. Faisant donc

$$\xi = 2{,}27$$
$$H = 453$$
$$D = 1$$

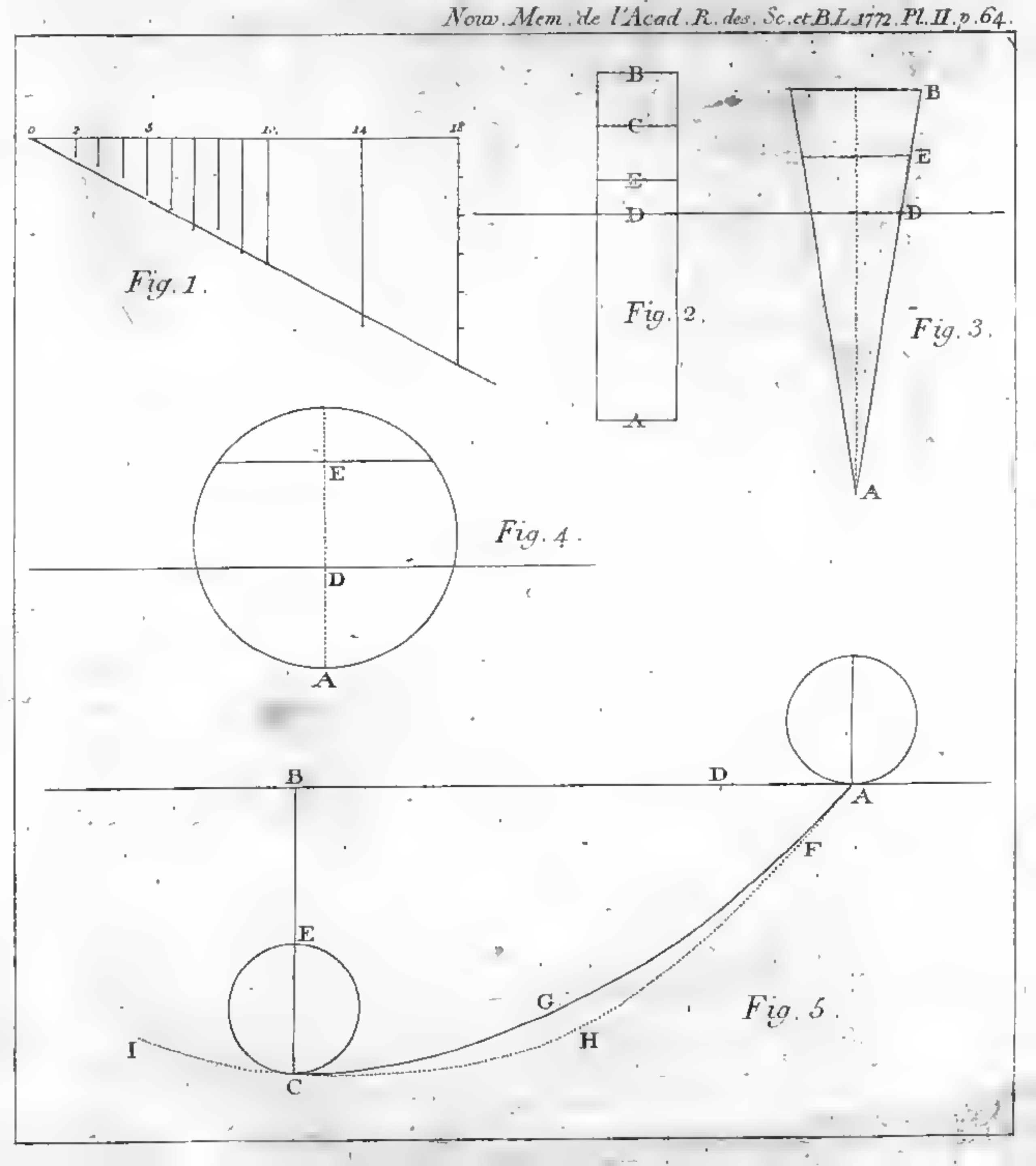
on trouve $b = \frac{1}{28}$. Cette valeur peut très bien avoir lieu dans un terrain labouré, mou & sablonneux.

§. 76. Soit AB la surface du terrain, $BD = 35$ pouces, Fig 5.
$BE = 13\frac{1}{2}$ pouces, $DA = EC$ le diametre de la bombe $=$ 10,63 pouces, on aura $BD = 45{,}6$ pouces, $BC = 24{,}1$ pouces. La bombe commença à toucher la terre en A, & le point A parcourut la courbe AC. L'angle d'incidence en A, qui étoit de $48\frac{1}{3}$ degrés, devoit diminuer un peu pendant que la bombe entroit en terre. Or je trouve que la courbe AC est à très peu près parabolique. Car en

divisant $2BC = 48,2$ par $AB = 45,6$ le quotient $1,057$ est la tangente de l'angle DAF, ce qui fait cet angle $= 46°. 36'$, un peu plus petit que n'étoit l'angle d'incidence. Cependant en regardant de plus près le chemin que la bombe avoit parcouru sous terre, il m'a paru être plus courbé, de sorte qu'au lieu d'être une parabole AGC, c'étoit une autre courbe AHC; ce qui peut très bien provenir de la résistance du terrain. Il arrive encore quelquefois que la bombe, après s'être d'abord enfoncée, commence à remonter vers I, lorsque dans le point le plus bas C elle n'a pas encore perdu toute sa vitesse.



SUITE


0
2
5
10
14
18
Fig. 1.
B
C
E
D
Fig. 2.
A
B
E
D
Fig. 3.
A
E
Fig. 4.
D
A
B
D
A
F
E
G
Fig. 5.
H
I
C

SUITE DE L'ESSAI D'HYGROMÉTRIE

PAR M. LAMBERT. (*)

Après m'être aſſuré par des obſervations de pluſieurs années de la longueur qu'il faut donner aux cordes de boyaux pour que de la plus grande humidité à la plus grande ſécherelle de l'air elles ne faſſent qu'un tour, je commençai en 1771 à faire trois hygrometres correſpondans de la même corde que dans mon premier Eſſai j'ai appellée la corde mince, & qui a $\frac{38}{100}$ ligne de diametre. Je nommerai ces hygrometres *G*, *H*, *I*, afin de les diſtinguer des ſix hygrometres dont j'ai fait uſage dans mon premier Eſſai d'Hygrométrie. Je laiſſai ces hygrometres pendant pluſieurs mois à côté l'un de l'autre & je vis qu'ils continuoient d'avoir la même marche.

Au mois de Mars 1771 j'envoyai l'hygrometre *G* à Mr. le Prélat *de Felbiger*, à Sagan, qui prend beaucoup d'intérêt à tout ce qui regarde les obſervations météorologiques, & qui tout récemment a fait appliquer au clocher de ſon Abbaye un conducteur électrique, pour mettre l'égliſe à couvert des coups de foudre auxquels elle avoit été expoſée ci-devant.

Ce Prélat avoit déjà reçu de Mr. *Titius*, Profeſſeur de Mathématiques à Wittemberg, un hygrometre dont la corde devoit faire quatre tours du plus humide au plus ſec. Il ne tarda pas à en comparer la marche avec celui que je venois de lui envoyer. Ces deux hygrometres ſe trouverent correſpondans. L'hygrometre de Mr. *Titius* avoit une ſpirale dont quatre tours étoient diviſés en 360 degrés, & afin de ne point confondre les tours, Mr. *Titius* y avoit attaché un fil par les deux bouts, en ſorte que l'aiguille tournant en arriere, le fil ſe dévidoit de la corde. Mon hygrometre ne faiſant qu'un ſeul tour n'avoit qu'un ſimple cercle diviſé en 360 de-

(*) Voyez Anc. Mém. T. XXV. p. 68.

grés. Ainſi dans l'un & l'autre hygrometre le zéro de la diviſion marque la plus grande humidité, le 180me indique l'humidité moyenne, & la plus grande ſéchereſſe de l'air va jusqu'au 360me degré.

Ces deux hygrometres correſpondoient, à quelques degrés près dont tantôt l'un tantôt l'autre avançoit, & cette correſpondance continue encore à préſent. J'ignore comment M. *Titius* a déterminé le zéro de ſon hygrometre. Mais pour ce qui regarde le point de la plus grande ſéchereſſe il propoſoit un air échauffé au 30me degré du Thermometre de Mr. de Réaumur. Quant à moi je me ſuis borné à déterminer les degrés extremes par une ſuite d'obſervations de pluſieurs années. Ainſi ces deux hygrometres ſe trouvoient correſpondans par un ſimple hazard. Il y a dans chaque année des jours où différentes marques extérieures font connoître la ſécheresſe & l'humidité extremes. Les jours les plus ſecs ſe rencontrent ordinairement au mois de Mai après pluſieurs jours ſereins & après que les vents de terre ont ſéché les rues, les champs & les marais. Le tems le plus humide a lieu ordinairement au commencement & quelquefois vers la fin de l'hyver. C'eſt alors que l'humidité entre dans les maiſons & s'attache aux murs au point qu'elle eſt ſenſible. On peut aſſez bien régler un hygrometre conformément à ces degrés extremes, pour juger enſuite des degrés intermédiaires. Si dans les années ſuivantes on trouve un tems encore plus ſec ou plus humide, il eſt toujours facile d'en tenir compte & de rectifier l'échelle faite d'après les premieres obſervations. C'eſt au moins ce qu'on peut faire de mieux jusqu'à ce qu'on ait trouvé deux degrés de ſéchereſſe & d'humidité conſtans pour la diviſion de l'échelle des hygrometres.

Ayant appris de Mr. le Prélat *de Felbiger* qu'il fait faire à Sagan des obſervations météorologiques trois fois par jour, j'en fis de même à Berlin, afin de pouvoir enſuite comparer la marche de l'hygrometre à Sagan avec les deux que j'avois gardés chez moi. Le 20 Nov. 1771 je plaçai l'hygrometre *I* dans une chambre que je ne fis point chauffer & pour l'autre *H* je le laiſſai dans la chambre où je ſuis ordinairement, qui fut chauffée tous les matins jusqu'au 24 Mars 1772, où le beau tems commençoit à rendre la cha-

leur du fourneau superflue. Je marquai chaque jour les degrés de ces hygrometres. Je communiquai tous les mois ces obſervations à Mr. le Prélat *de Felbiger*, & je reçus les ſiennes en échange. Les premieres obſervations firent d'abord voir que les variations de l'humidité à Sagan & à Berlin étoient fort analogues, & je trouvai enſuite qu'il en étoit de même dans les mois ſuivans. Je m'attachai ſurtout à comparer enſemble les degrés obſervés les matins, qui ſont, pour ainſi dire, le réſultat des variations journalieres, cauſées ſurtout par l'action du Soleil pendant le beau tems, & par les vapeurs qui s'élevent pendant la nuit. On trouvera à la fin de ce Mémoire trois Tables. La premiere contient les degrés de l'hygrometre *I*, que j'avois placé dans la chambre qui ne fut point chauffée. La ſeconde Table marque les degrés de l'hygrometre *H* que j'ai laiſſé dans le poële chaud où je me tiens pour l'ordinaire. Enfin la troiſieme renferme les obſervations faites à Sagan avec l'hygrometre *G* que j'avois envoyé à Mr. le Prélat *de Felbiger*. On voit par ces Tables, que la variation totale de ces hygrometres eſt fort différente. Car elle fut pour l'hygrometre

I	de	— 21	degrés jusqu'à	289
H	de	191	- - -	268
G	de	70	- - -	280.

Ainſi l'hygrometre *I* varia de 310 degrés, l'hygrometre *H* de 77 & l'hygrometre *G* de 210.

Cette différence doit principalement être attribuée aux circonſtances où ces hygrometres ſe trouverent. L'hygrometre *A* étoit, pour ainſi dire, expoſé immédiatement à l'air extérieur. La chambre ne fut point chauffée pendant l'hyver. Par conſéquent point de chaleur qui eût pu le tenir plus au ſec. Une fenêtre étoit preſque toujours ouverte, & perſonne n'y entroit; j'y allois ſeulement obſerver les degrés de l'hygrometre ou pour d'autres occupations de peu durée. Il n'en fut pas de même de l'hygrometre *H*. La chambre fut tenue chaude pendant tout l'hyver. Les fenêtres étoient alors fermées, & pendant l'été il n'y en avoit qu'une que je laiſſois ouverte de jour. Tout cela devoit néceſſairement retenir l'hygrometre *B* plutôt au-deſſus qu'au-deſſous des degrés de ſécheresſe moyenne. Auſſi cet hy-

grometre ne participant que très peu aux variations de l'air extérieur, furtout pendant les mois d'hyver, n'indiquoit, pour ainfi dire, que les veftiges de ces variations. L'hygrometre *C* de Sagan tint à peu près le milieu entre les hygrometres *A*, *B*. Il fut placé dans un corridor dont l'une ou l'autre porte étoit prefque toujours ouverte.

Pour voir maintenant d'un coup d'œil l'analogie entre la marche de l'hygrometre *I* à Berlin & de l'hygrometre *G* à Sagan, je l'ai deffinée dans une Figure fuivant une même échelle. Cette marche fut, à deux ou 3 degrés près abfolument la même pendant les 10 derniers jours du Mois de Novembre 1771. Après cela l'hygrometre de Berlin tourna confidérablement plus vers l'humide que celui de Sagan. Cela dura jufqu'à la fin de Mars, où l'hygrometre de Berlin commença à être prefque toujours plus fur le fec que celui de Sagan. Vers le mois de Septembre ils commencerent à fe rapprocher, en forte que tantôt l'un tantôt l'autre fe tint plus fur le fec, & au mois de Novembre celui de Berlin commença à fe tenir conftamment plus fur l'humide, comme il l'avoit fait l'hyver précédent depuis le 10 Déc. 1771 jufqu'au 1 Avril 1772.

Ces différences entre les hygrometres de Sagan & de Berlin n'empêcherent point que leurs variations particulieres ne fuffent fort femblables, à l'exception de quelques anomalies où ces hygrometres par des caufes accidentelles varioient en fens contraire, ou fe dévançoient l'un l'autre d'un ou de deux jours.

On voit encore que la caufe qui vers la fin de Février avoit rendu l'air à Berlin extrêmement humide, n'influa que fort peu fur l'hygrometre de Sagan. C'étoit un vent du Sud, qui nous amena une forte pluie & un tems fort humide. Il paroit que ce vent dominoit beaucoup moins à Sagan.

Les variations hygrométriques étant donc fort analogues à Berlin & en Siléfie, je ne doute pas qu'elles ne le foient dans un plus grand diftrict de pays. Mais je n'ai point là-deffus d'obfervations détaillées. Cependant M. *Brander*, célebre Méchanicien d'Augsbourg, me mande que Mr. *Mafchenbauer*, Directeur du Bureau d'adreffe de cette ville, obferve l'hygrometre, & en publie les réfultats dans une feuille hebdomadaire. Ses hygrometres

font de ficelle & s'allongent quand le tems devient plus fec. Il en a trouvé la longueur

pour la plus grande féchereffe	43^{p}.	8^{p}.	4^{l}	34^{p}.	7^{p}.	0^{l}
pour la plus grande humidité	41.	5.	0	32.	9.	6
& par conféquent la variation	2.	3.	4	1.	9.	6

Ainfi la variation pour l'un ou l'autre de ces hygrometres eft comme 37 à 39.

Mr. *Mafchenbauer* trouva fes hygrometres le plus au fec le 28 Juin 1772. A Berlin cela n'arriva que le 29 après midi, où l'hygrometre *I* marqua le 291me degré. Cette féchereffe arriva donc à Berlin un jour plus tard qu'à Augsbourg. A Sagan l'hygrometre avoit marqué le degré le plus fec le 20 Juin, mais le 28 & le 29 il marqua un tems moins fec.

La plus grande humidité à Augsbourg fut obfervée le 13 Décembre 1771. Nous avions pareillement à Berlin une humidité très forte, qui s'attacha aux murs dans les maifons, le 12 Décembre au foir où l'hygrometre fe tint fur le 74me degré. Cependant cette humidité, quoique fort grande, fut furpaffée par celle du 29 Février 1772, où l'hygrometre *A* fe trouva fur le 21me degré au-deffous de zéro. Avec tout cela l'humidité du 12 Décembre à Berlin peut toujours être regardée comme parallele à celle du 13 Déc. à Augsbourg, de forte qu'à cet égard on peut dire qu'elle fut antérieure à Berlin d'un jour entier, tandis que tout au contraire ce fut à Augsbourg que la plus grande féchereffe fut antérieure d'un jour. La pofition des deux villes, tant à l'égard des mers qu'à l'égard des vents, fait qu'en tout cela il n'y a rien qui ne foit fort naturel.

Comme donc les degrés extremes d'humidité & de féchereffe fe rencontrent à un jour près à Augsbourg & à Berlin, il y a apparence qu'il en fera de même des autres variations confidérables. Car quant aux petites variations qui ne font que journalieres, il eft naturel de conclure qu'elles iront d'autant plus fouvent en fens contraire, que les deux endroits qu'on veut comparer, font plus éloignés l'un de l'autre. J'ai cependant prié

Mr. *Brander* de vouloir bien me faire avoir deux mois entiers des obſervations de Mr. *Maſchenbauer*, & nommément les mois de Décembre 1771 & de Juin 1772, ce qu'il a eu la bonté de faire. Mr. *Maſchenbauer* a diviſé l'échelle de ſon hygrometre en 200 degrés, dont 100 ſe comptent vers le ſec, & les autres 100 vers l'humide. J'ai tiré d'après les obſervations des matins une courbe à double trait au mois de Décembre & de Juin, qui marque la marche de l'hygrometre d'Augsbourg. On voit par là d'un coup d'œil que cet hygrometre tourna vers l'humide depuis le 1 juſqu'au 13 Décembre, à la petite exception près qu'il y a entre le 9 & le 10 Décembre. Cette exception fut plus grande à Berlin, & encore plus grande à Sagan. Depuis le 13 Décembre juſqu'au 23 les hygrometres avancerent & reculerent, celui d'Augsbourg fort uniformément, celui de Berlin & de Sagan d'abord avec plus de viteſſe, enſuite plus lentement & avec moins d'uniformité. Depuis le 23 juſqu'au 31 l'hygrometre de Sagan varia fort peu; celui de Berlin avança d'abord vers le ſec, mais moins vite que celui d'Augsbourg, qui enſuite recula de deux jours plutôt & plus fortement. La variation pendant ce mois fut à peu près la même.

Il en eſt tout autrement au mois de Juin, où la variation de l'hygrometre d'Augsbourg eſt très conſidérable en comparaiſon de ceux de Berlin & de Sagan. Il y a pourtant quelque analogie, ſi on compare les *maximum* & les *minimum*, entre ces trois hygrometres. Voici comment je crois que cette comparaiſon doit être faite.

	Augsbourg	Berlin	Sagan
Minimum	le 3	le 4	le 4
Maximum	le 5	le 5	le 5
Minimum	le 6	le 7	le 7
Maximum	le 8	le 9	le 10
Min.	le 9	le 10	
Max.	le 11	le 11	
Min.	le 12	le 12	le 12
Max.	le 17	le 16	le 15
Min.	le 19	le 18	le 19
Max.	le 20	le 19	le 20
Min.	le 22	le 22	le 23
Max.	le 24	le 25	le 25
Min.	le 25	le 25	le 26
Max.	le 28	le 29	le 29

Du 9 au 11 Juin l'hygrometre de Sagan avoit une variation de moins, & le 27 celui de Berlin en avoit une de plus. Il ſemble que le ſol élevé d'Augsbourg contribue à rendre les variations en été plus fortes.

Les obſervations d'une ſeule année ne ſont gueres ſuffiſantes pour déterminer ce qu'il peut y avoir de régulier dans la variation annuelle de l'humidité de l'air. Les années 1771, 1772 y ſont peut-être les moins propres. L'année 1771 étoit une des plus humides que nous ayons eues depuis longtems; & l'année 1772, depuis le mois d'Avril juſqu'à la fin du mois d'Octobre, amena un tems ſec, qui n'étoit que très rarement interrompu par quelque pluie abondante. J'ai pris pour chaque mois la ſomme des degrés de l'hygrometre *A* dans la premiere Table, & en la diviſant par le nombre des jours j'ai obtenu les termes moyens pour chaque mois. Les voici.

1771.	Nov.	- - - 155	1772.	Mai	- - - 241
	Déc.	- - - 145		Juin	- - - 267
1772.	Janv.	- - - 140		Juillet	- - - 252
	Févr.	- - - 129		Août	- - - 238
	Mars	- - - 136		Sept.	- - - 239
	Avril	- - - 233		Oct.	- - - 222
				Nov.	- - - 195

On voit par là que le mois de Novembre 1771 étoit de près de 40 degrés plus humide que le même mois en 1772. A en juger par toutes les circonſtances, les termes moyens ſeront, pour le mois le plus ſec 270, & pour le mois le plus humide 110.

J'ajouterai encore les termes moyens tirés de la troiſieme Table, qui renferme les obſervations faites à Sagan. Et comme je viens de recevoir encore le tableau de la marche de l'hygrometre de Mr. le Profeſſeur *Titius* à Wittemberg, je n'ai pas manqué d'en faire la comparaiſon avec ceux de Berlin & de Sagan. J'ai vu d'abord que l'échelle n'étoit pas la même, mais que le nombre des degrés différoit bien au-delà du double, l'hygrometre de Wittemberg ayant varié depuis le 58me degré juſqu'au 604me. J'ai donc pris les termes moyens pour chaque mois, & en les comparant à ceux que

donne la premiere Table j'ai trouvé que le zéro de mon hygrometre devoit correſpondre au degré — 150 de l'hygrometre de Mr. *Titius*, & que le 360me degré du mien devoit correſpondre au 788me du ſien, de ſorte que l'hygrometre de M. *Titius* parcourt 938 degrés pendant que le mien fait le tour entier de 360 degrés. Le rapport eſt à très peu près comme 13 à 5, de ſorte que 13 degrés de l'hygrometre de M. *Titius* équivalent à 5 du mien. Du reſte cette comparaiſon peut très bien n'être pas tout à fait exacte. Elle ſe fonde ſur ce que le tems ſec de l'été eſt à peu près au même degré à Wittemberg & à Berlin, & que réciproquement le tems humide de l'hyver eſt à peu près également humide dans ces deux endroits. Ce dernier énoncé eſt plus ſujet à caution que le premier, ſurtout lorſqu'on ne veut comparer que les degrés obſervés pendant quelques ſemaines. Mais comme j'ai fait la comparaiſon pour 13 mois conſécutifs, l'un portant l'autre, j'ai lieu de croire qu'elle ſera aſſez juſte. Elle l'eſt encore aſſez pour le but que je me propoſe & qui eſt que moyennant cette réduction l'analogie de la marche des hygrometres à Sagan, à Wittemberg & à Berlin ſe voie mieux que ſi je laiſſois les degrés de celui de Wittemberg deux ou trois fois plus grands que ceux des hygrometres de Sagan & de Berlin. La quatrieme Table renferme les degrés de l'hygrometre de Wittemberg réduits d'après ceux que Mr. *Titius* a obſervés chaque jour le matin. Pour comparer ces degrés avec ceux de la premiere & de la troiſieme Table, il faudroit les deſſiner dans la même Figure, ce qui rendroit la Figure trop chargée & trop confuſe. J'ai cependant deſſiné la courbe qui repréſente la marche de l'hygrometre de Wittemberg depuis le 8 Janvier juſqu'au 19 Février, où cela pouvoit ſe faire ſans confuſion à cauſe de la différence aſſez conſidérable qu'il y avoit alors entre l'humidité des trois endroits. Or on voit que malgré cette différence la marche des trois hygrometres ne laiſſa pas de conſerver un parallélisme très marqué. Il s'en faut de beaucoup que ce parallélisme ſoit auſſi viſible dans les nombres de la premiere, troiſieme & quatrieme Table, qu'il l'eſt dans la Figure. Car en ne comparant ces nombres qu'en gros on ſeroit porté à croire qu'il n'y a aucun rapport entre la marche des trois hygrometres. Dans la Figure ce rapport ſaute d'abord aux yeux. Voici maintenant les degrés moyens de

ces

ces trois hygrometres pour chaque mois, c'eſt à dire les quotiens qui réſultent de la diviſion de la ſomme des degrés obſervés par le nombre des obſervations ou des jours.

	Mois.	Berlin	Wittemberg	Sagan
1771	Novembre	155	169	164
	Décembre	145	141	175
1772	Janvier	140	112	200
	Février	129	106	199
	Mars	136	178	212
	Avril	233	232	238
	Mai	241	243	226
	Juin	263	265	265
	Juillet	252	253	234
	Août	238	248	248
	Septembre	239	242	239
	Octobre	222	224	222
	Novembre	195	213	220
	Somme	2588	2626	2842
	Degré moyen	199	202	219

Il réſulte de cette Table que l'hyver à Sagan a été conſidérablement moins humide qu'à Berlin & à Wittemberg. Ce n'eſt pas que je croie qu'il y ait eu moins de pluie; mais les inondations furent dans les deux derniers endroits d'une plus longue durée qu'à Sagan, le ſol de Sagan étant beaucoup plus élevé que celui de Berlin & de Wittemberg. Ainſi l'hyver de 1771 à 1772 à Sagan approche plus de l'état moyen qui doit réſulter de la comparaiſon d'un grand nombre d'années, que le même hyver à Berlin & à Wittemberg. En récompenſe l'automne, qui étoit à peu près également ſeche dans les trois endroits, l'étoit néanmoins beaucoup plus que dans une année ordinaire. C'étoit une des plus belles automnes que nous euſſions eues depuis longtems. Auſſi les nouvelles publiques font foi qu'il en a été de même dans des pays fort éloignés, ce qui fait encore voir que les grandes variations qui arrivent dans l'humidité de l'air s'étendent dans un grand diſtrict de l'hémiſphere que nous habitons. Pl. III.

Comme les années précédentes je me suis borné à marquer les degrés extremes du sec & de l'humide, je suppléerai au défaut d'observations non interrompues par celles qui se trouvent rapportées dans le N°. 381 des Transactions de la Société Royale des Sciences de Londres. Elles sont de Mr. *Crucquius*, qui observa pendant les années 1721, 1722, 1723 le poids d'une petite éponge imprégnée de sel ammoniac. Voici pour ces trois années les termes moyens pour chaque mois.

Janv.	86	Juillet	61.
Févr.	82	Août	65.
Mars	76	Sept.	69.
Avril	68	Oct.	74.
Mai	63	Nov.	82.
Juin	61	Déc.	85.

Ces trois années different assez peu l'une de l'autre, de sorte que ces termes moyens approchent fort de ceux qui résulteroient d'une plus longue suite d'observations. Ils expriment le poids de l'éponge. Cela fait que pour compter les degrés de l'humide vers le sec, il faut les soustraire du terme moyen du mois de Janvier, qui est le plus grand. Nous aurons donc

Janv.	0	Juillet	25
Févr.	4	Août	21
Mars	10	Sept.	17
Avril	18	Oct.	12
Mai	23	Nov.	4
Juin	25	Déc.	1

Ces nombres croissent & décroissent à très peu près comme les degrés moyens de la chaleur, à cette exception près que les degrés extremes de la chaleur tombent 4 ou 5 semaines après les solstices, au lieu que les degrés extremes de l'hygrometre coïncident, ou peu s'en faut, avec ces points cardinaux de l'écliptique. Les termes moyens du thermometre de Mr. *Crucquius* pour chaque mois sont

Janv.	1083	Juillet	1137
Févr.	1085	Août	1140
Mars	1090	Sept.	1130
Avril	1180	Oct.	1114
Mai	1122	Nov.	1099
Juin	1134	Déc.	1090

C'étoit un thermometre à air, dont la dilatation 1070 répondoit au terme de la glace, & la dilatation 1510 au terme de l'eau bouillante.

Pour comparer d'autant plus facilement la marche de ce thermometre avec celle de l'hygrometre, j'ai dessiné l'une & l'autre dans une Figure. De cette maniere on voit d'un seul coup d'œil, que l'hygrometre dévance le thermometre, mais beaucoup plus au printems que vers l'automne. Les beaux jours qui ordinairement précédent l'équinoxe y contribuent efficacement. Et surtout en Hollande ce sont ces beaux jours du printems qu'il faut choisir lorsque du haut du clocher d'une ville on veut voir distinctement les villes & les villages des environs. Au contraire les beaux jours de l'automne amenent ordinairement la rosée de la nuit, les bruines & les brouillards des matinées. Pl. IV. Fig. 1.

Les ordonnées pour la courbe, tant de l'hygrometre que du thermometre sont une fonction de la longitude du Soleil de la forme

$$y = A + B \sin \lambda + C \cos \lambda + D \sin 2\lambda + E \cos 2\lambda + \&c.$$

On voit, par la Figure, que cette suite doit être fort convergente, & que pour trouver ces ordonnées à très peu près, on peut se contenter du terme

$$y = B. \sin \lambda$$

lorsqu'on prend le commencement des abscisses là où la courbe en montant coupe l'axe; ce qui, à l'égard de la courbe dessinée pour l'hygrometre, arrive fort près du jour de l'équinoxe du printems, le 23 ou 24 Mars. Cette formule représentera assez bien les variations annuelles moyennes de l'humidité. En supposant pour l'hygrometre A les degrés 110, 270

comme termes moyens répondans au 23 de Décembre & de Juillet, je trouve les termes moyens pour les mêmes jours de

Janv.	120	Juillet	260
Févr.	150	Août	230
Mars	190	Sept.	190
Avril	230	Oct.	150
Mai	260	Nov.	120
Juin	270	Déc.	110.

L'hygrometre de Mr. *Crucquius* ayant été fait d'une éponge il convient de voir comment ces sortes d'hygrometres correspondent avec ceux qui sont faits de cordes de boyaux. Je rapporterai les observations que j'ai faites là-dessus en 1752 à Coire dans le pays des Grisons. Au mois de Septembre de cette année je pris une éponge nette du poids de 210 grains. Après l'avoir imprégnée de sel de tartre le poids en fut augmenté jusqu'à 255. Je suspendis cette éponge à une de ces balances que j'ai décrites dans le 3[me] Volume des *Acta helvetica*, & qui indiquent le poids d'elles-mêmes. Je plaçai à côté un hygrometre dont la corde avoit 43 lignes de longueur & $\frac{2}{5}$ ligne de diametre. Voici les observations pour les heures du matin.

1752	Eponge.	Corde.	1752	Eponge.	Corde.	1752	Eponge.	Corde.
Sept. 30	255	220	Oct. 17	256	180	Nov. 3	247	208
Oct. 1		—	18	252	195	4	242	235
2		—	19	249	208	5	240	242
3	260	174	20	250	220	6	244	213
4	262	170	21	255	165	7	249	175
5	265	157	22	254	183	8	242	233
6	275	98	23	249	200	9	236	273
7	278	120	24	248	208	0	242	210
8	279	125	25	246	213	11	242	230
9	269	162	26	243	235	12	243	223
10	262	170	27	240	235	13	238	240
11	252	200	28	242	235	14	234	267
12	249	220	29	244	225	15	236	245
13	259	157	30	240	258	16	238	245
14	260	169	31	243	230	17	241	207
15	258	175	Nov. 1	241	233	18	244	200
16	260	168	2	245	217	19	247	190

On verra mieux dans la seconde Figure que par ces nombres jusqu'à quel point la marche de ces deux hygrometres étoit correspondante. La ligne pointée est pour l'éponge. Ses ordonnées sont prises sur l'échelle de derriere. L'autre courbe est pour la corde, & ses ordonnées sont prises sur l'échelle de devant. On trouve sans peine que l'hygrometre à éponge seche & s'humecte avec moins de vitesse. De là vient par ex. que le 6 & le 7 Novembre il alla encore vers l'humide tandis que la corde tournoit déjà vers le sec. De là vient encore que partout où la variation de l'humidité de l'air est subite, l'éponge n'indique qu'une partie de cette variation. On voit dans la Figure, que les inflexions de la courbe pointée sont toujours moins grandes que celles de la courbe dessinée pour la corde. Voici encore une autre preuve. Fig. 2.

En 1755 au mois d'Octobre je lavai cette éponge pour en faire sortir le sel & la poussiere dont elle étoit chargée. Je la suspendis de nouveau à la même balance, & j'en trouvai le poids de 540 grains. C'étoit le 28 Octobre 1755 à 11 heures & demie du matin. Le 29 à la même heure elle pesa encore 398 grains. Le 30 à la même heure son poids fut encore de 286 grains. Le 31 à 8 heures 20 minutes elle pesa 243 grains & à 2 heures 40 minutes après midi son poids fut de 232 grains. Cette éponge séchoit donc avec beaucoup de lenteur, quoique depuis le 28 Octobre qui étoit un jour couvert & en partie pluvieux, le tems se remît au beau, & que l'hygrometre à corde tournât vers le sec. Cela devoit accélérer le dessèchement de l'éponge, & néanmoins il fallut quatre jours de tems pour le produire. Du reste cette éponge étoit fort grosse, pesant $3\frac{1}{2}$ jusqu'à $4\frac{1}{2}$ dragmes. Si elle n'avoit pesé qu'une dragme, elle auroit eu plus de surface rélativement au volume, & cela auroit accéléré assez sensiblement les variations de son poids. On peut voir les expériences que j'ai faites à ce sujet, dans l'Essai d'hygrométrie qui se trouve dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1769. Avec tout cela la petite éponge que j'ai employée alors & qui pesoit 39 grains, demande un jour entier, même dans le tems le plus sec, pour perdre 53 grains d'humidité. C'est ce que me fit voir une expérience faite le 23 Juin 1772. Cette éponge hu-

meſtée avec de l'eau peſoit 88 grains; elle ſécha juſqu'au lendemain, où à une heure après midi ſon poids fut de 35 grains, de ſorte qu'elle perdit les 53 grains d'eau dont je l'avois imprégnée le jour précédent à 6 heures du matin. Voici l'expérience complette.

Tems.	Poids de l'éponge.	Poids de l'eau.	Hygrom. *A*	Therm. de Réaumur.
0^h. 0'	88	53	330	17,0
0, 41	85	50		
1, 46	81	46		
2, 27	78½	43½	328	17,7
2, 46	77½	42½	327	17,8
3, 17	76	41	328	18,0
4, 57	68	33	331	18,6
6, 14	62½	27½	334	18,9
7, 9	58½	23½	338	19,2
10, 3	48	13	347	19,2
10, 36	46½	11½	347	19,1
11, 6	44	9	347	19,2
11, 41	44	9	347	19,0
12, 8	43	8	347	19,0
13, 26	40	5	347	19,0
16, 16	37	2	345	19,0
23, 22	35½	1½	340	18,0
31, 6	35	0	347	20,0

Les cordes de boyaux demandent moins de tems pour acquérir ou perdre l'humidité. Cependant il faut toujours pour cela pluſieurs heures, ſurtout lorſqu'elles ne ſont pas très minces. Cela fait encore que l'humidité de l'air change en effet plus fortement que les hygrometres à corde ne l'indiquent. J'entens lorſque la variation eſt ſubite, ou lorſque l'air en peu d'heures de tems devient alternativement plus ſec & plus humide. Car dès qu'il s'agit de pluſieurs jours, alors l'hygrometre à boyau ſuit les variations de l'humidité de l'air, comme dans la Figure la courbe pour l'hygrometre à éponge ſuit celle que j'ai deſſinée pour l'hygrometre à corde. Il y auroit bien moyen de calculer les variations de l'humidité de l'air, celles de l'hygrometre étant données, mais il faudroit auparavant connoître la loi ſuivant laquelle les cordes de boyaux acquierent & perdent l'humidité. Or

cela n'eſt pas facile. J'ai donné dans le premier Eſſai des expériences qui pouvoient répandre quelque jour ſur cette matiere, mais ſans les pouſſer au point de pouvoir y appliquer quelque formule. Je vais donc expoſer quelques-unes de celles que j'ai faites depuis.

La difficulté de trouver deux points d'humidité qui ſoient fixes, me fit venir l'idée de chercher un de ces points dans l'eau même, c'eſt à dire de ſuſpendre une corde à boyau dans l'eau & de voir juſqu'à quel point elle ſe détortilleroit. Je vis d'avance qu'il n'étoit pas indifférent de donner à l'eau un degré de chaleur quelconque, mais qu'il falloit s'en tenir à un degré fixe, & qui approche fort du tempéré. Car ſi l'eau avoit une chaleur aſſez grande pour fondre la graiſſe qui reſte toujours encore dans les cordes, la corde pourroit ſe détortiller au point de perdre entierement la force qu'elle a de ſe tordre en ſéchant. J'ai trouvé à cet égard des phénomenes aſſez ſinguliers. Une corde de boyau de 18 lignes de longueur, coupée du même bout que j'ai nommé la groſſe corde dans mon premier Eſſai, ſe détortilloit de 1320 degrés dans l'eau qui n'avoit que 10 degrés de Réaumur de chaleur. Ce fut le 5 Mai 1772 à 5 heures du matin. En la ſuſpendant enſuite dans l'eau qui avoit 45 degrés de chaleur, elle tourna 40 degrés & plus vers le ſec. Je la retirai pourtant bientôt pour la laiſſer ſécher. Cela n'arriva pas le 8 Mai, où l'eau avoit plus de 60 degrés de chaleur. C'étoit alors une corde mince de $11\frac{3}{4}$ lignes de longueur. Elle ſe détortilloit dans l'eau tempérée de 885 degrés, & après l'avoir ſuſpendue dans l'eau chaude, elle fit en moins de deux minutes encore 3 ou 4 tours en ſe détortillant d'avantage, après quoi elle s'arrêta, ou ne tourna que très lentement. Je la retirai de l'eau, & je trouvai ſon diametre, qui d'abord n'étoit que de 0,38 lignes, groſſi de telle ſorte qu'il étoit de 0,7 lignes, c'eſt à dire preſque du double. En ſéchant elle ne fit qu'un tour de 540 degrés. A l'égard des cordes que je ſuſpendis dans l'eau tempérée, il y en avoit qui en ſéchant s'entortilloient au delà de ce dont elles ne s'étoient pas détortillées dans l'eau. D'autres revinrent au même point, & d'autres enfin reſterent en arriere. Il eſt clair que c'eſt dans les cordes elles-mêmes qu'il faut

chercher la cause de ces différens effets. L'état des cordes est naturellement un état forcé, & les cordiers ne se donnent gueres la peine de les tordre également dans toute leur longueur. J'en infere qu'une corde, après s'être détortillée dans l'eau, se remet en séchant dans un état d'équilibre qui, à plusieurs égards, vaut mieux que celui que le cordier l'avoit forcée de prendre.

Fig. 1. Voici maintenant comment j'ai fait ces sortes d'expériences. *ABC* est un fil de fer ou de cuivre jaune, auquel j'affermis en *B* avec de la cire d'Espagne une corde de boyau *BD*, à laquelle étoit pareillement affermi en *D* une aiguille *EF*. Le fil de fer *ABC* étoit courbé en *A*, *C*, en sorte qu'en le posant sur le bord du verre toute la corde *BD* étoit au-dessous de la surface de l'eau *GH* que j'y avois versée. De cette maniere la circonférence du verre pouvoit en *EF* être divisée en degrés, soit avec de l'encre, soit en y collant un papier. Mais ordinairement je me bornai à la diviser en quatre parties, c'est à dire de 90 en 90 degrés, & de marquer le tems où l'aiguille avoit fait chaque quart de tour. Pour compter d'autant plus facilement le nombre des tours j'attachai un fil de lin au fil de fer entre *AB*, & l'autre bout de ce fil fut attaché à l'aiguille entre *ED*. De cette maniere l'aiguille, en tournant, tourna ce fil tout autant de fois autour de la corde qu'elle fit de tours entiers, & il fut facile de les compter. C'est de la même maniere que Mr. le Professeur *Titius* arrangea ses hygrometres, dont les cordes étoient assez longues pour faire quatre tours du tems le plus humide au tems le plus sec.

Ces sortes d'expériences pouvoient servir à trouver de quelle maniere & combien de fois les cordes de différentes grosseur & longueur suspendues dans l'eau, chaude à un degré donné, tourneroient en se détortillant, & comment elles tourneroient en arriere, ou se tordroient, lorsqu'après les avoir retirées de l'eau, on les suspendroit pour les laisser sécher. Mais je voulois encore voir quel étoit le rapport entre les tours que fait une corde en séchant & le poids de l'humidité qui s'y trouve. Pour cet effet je pris une corde de boyau de $\frac{71}{100}$ ligne de diametre & de plus de 4 pouces de longueur.

gueur. J'attachai un fil de lin très mince par les deux bouts de la corde, en forte que ce fil fût assez long pour faire une dixaine de tours autour de la corde. Je suspendis cette corde dans l'eau, dont la chaleur n'étoit que de 9 degrés de Réaumur, & je marquai le tems qu'elle employa pour chaque tour que le bout d'en bas fit en se détortillant. Ce fut le 15 Novembre 1772 le matin à 8 heures 39 minutes que je commençai cette expérience. En voici le résultat

tems h. m.	Nombre de tours.
0. 0	0
0. 16	1
0. 25	2
0. 33	3
0. 41½	4
0. 52	5
1. 23	6
1. 53	6½
2. 26	7
4. 21	8
5. 21	8⅓

La corde avant que d'être suspendue dans l'eau ne pesoit que $3\frac{9}{10}$ grains, mais après l'avoir retirée de l'eau à 2 heures après midi elle pesoit $7\frac{7}{10}$ grains, & son diametre étoit $1\frac{1}{23}$ ligne. Elle avoit fait dans l'eau $8\frac{1}{3}$ tours. Je la suspendis à une balance, afin d'observer en combien de tems elle perdroit chaque $\frac{1}{10}$ grain d'humidité, & de combien elle retourneroit en arriere. Voici le détail de ces observations.

Tems.	Tours.	Poids.		Tems.	Tours.	Poids.
2'. 0'	8. 120	7, 7		3. 57	6. 170	5, 5
8	8. 110	7, 4		4. 5	6. 110	5, 4
14	8. 85	7, 3		12	6. 40	5, 3
18	8. 75	7, 2		18	6. 10	5, 2
23	8. 70	7, 1		24		5, 1
27	8. 60	7, 0		51	5, 120	4, 8
32	8. 50	6, 9		5. 4	5, 70	4, 7
37	8. 40	6, 8		18	5, 0	4, 6
42	8. 30	6, 7		35	4, 290	4, 5
47	8. 0	6, 6		53	4, 210	4, 4
52	7. 330	6, 5		6. 20	4. 140	4, 3
57	7. 290	6, 4		53	4. 90	4, 2
3. 4	7. 230	6, 3		7. 50	4. 10	4, 1
9	7. 180	6, 2		8. 44	4. 0	
15	7. 150	6, 1		9. 5	3. 340	4. 0
21	7. 95	6, 0		19. 0	3. 300	3, 95
31	6. 340	5, 9				
38	6. 300	5, 8				
44	6. 260	5, 7				
53	6. 190	5, 6				

On comprend ſans peine qu'il n'étoit gueres poſſible de déterminer préciſément le tems où la corde peſoit juſte un certain nombre de dixiemes parties de grain. D'un autre côté il n'étoit pas facile non plus de juger de combien de degrés le bout inférieur de la corde avoit tourné au delà d'un certain nombre de tours. Il pouvoit y en avoir plus ou moins. Ainſi il faut ſonger à compenſer l'un par l'autre. Pour cet effet j'aurai encore recours à la conſtruction, & je le ferois, ne fût-ce même que pour voir d'un coup d'œil ce qu'on ne déduiroit qu'avec moins de clarté des nombres que l'expérience a fournis. Ce que ces nombres font voir ſans peine, c'eſt que la corde à la fin perdit ſon humidité en ſorte qu'elle parvint à n'avoir plus que le poids qu'elle avoit avant que d'être ſuſpendue dans l'eau. On voit auſſi qu'au lieu que dans l'eau elle avoit fait $8\frac{1}{3}$ tours, en ſéchant elle ne parvint en ſe tordant qu'au $3\frac{5}{6}^{me}$ tour, de ſorte qu'elle reſta plus détortillée qu'elle n'avoit été avant d'être ſuſpendue dans l'eau. Je trouvai ſon diametre de $\frac{2}{11}$ ligne, & ſa longueur de $45\frac{3}{4}$ lignes, de ſorte qu'en

ſéchant elle s'étoit conſidérablement raccourcie, puiſqu'elle avoit 53 lignes de longueur lorſque je la retirai de l'eau.

Soit maintenant la droite *AB* diviſée en heures & en minutes de tems, j'ai conſtruit les deux courbes *CD*, *CM*. Les ordonnées de la premiere repréſentent le nombre de tours & de degrés qui en chaque moment reſtoient encore à faire. Les ordonnées de la ſeconde courbe déſignent le poids de l'eau qui reſtoit encore dans la corde. Les nombres de la Table donnoient à la premiere courbe une inflexion aſſez réguliere. Mais la ſeconde avoit une inflexion anomale que j'ai indiquée par des points près de *E*. Cette irrégularité vient probablement de la balance qui ne pouvoit pas avoir toujours la même poſition, parce qu'il falloit toujours y mettre & en ôter des dixiemes de grain. Quoi qu'il en ſoit, l'irrégularité qui en réſulte eſt facile à reconnoître & à corriger. C'eſt ce que j'ai fait en tirant la courbe conformément à ce que tous les autres points demandoient. Fig. 4.

Ces courbes font voir d'un coup d'œil que les tours que fit la corde en ſéchant ne ſont pas en raiſon ſimple du poids de l'humidité. L'humidité s'évapore toujours plus lentement, au lieu que la corde tourne d'abord avec une viteſſe uniformément accélérée, qui enſuite devient égale ou conſtante près du point d'inflexion de la courbe *CD*, & qui enfin ſe rallentit en ſorte que la courbe *CD* devient aſymptotique.

J'ai déjà remarqué dans mon premier Eſſai, qu'une corde toute mouillée doit perdre une partie de ſon humidité avant qu'elle puiſſe avoir l'élaſticité requiſe pour ſe tordre avec quelque viteſſe. Elle n'acquiert cette viteſſe que peu à peu. Il ſe peut même qu'après avoir été retirée de l'eau, elle ne commence à ſe tordre qu'au bout d'un certain tems. Dans cette expérience j'ai raccourci ce tems, parce qu'après avoir retiré la corde de l'eau je la couchai ſur un papier brouillard qui emporta d'abord l'humidité de la ſurface de la corde. De là vient que la courbe *CD* commence depuis le point *C* à s'abaiſſer vers l'axe *AB*, ce qui ne ſeroit pas arrivé ſi j'avois laiſſé l'humidité qui couvroit ſa ſurface.

La courbe CD étant en C parallele à l'axe AB, & baissant d'abord en raison du quarré du tems, l'équation pour une ordonnée quelconque peut être représentée par

$$y = \frac{a}{1 + b\tau^2 + c\tau^4 + \&c.}.$$

Dans cette expression τ dénote le tems, y une ordonnée quelconque, a l'ordonnée initiale. Il s'agit de déterminer les coëfficiens b, c, d &c. Pour cet effet j'ai mesuré les ordonnées d'heure en heure, & je les trouve

τ	y
0	1590
1	1380
2	880
3	490
4	225
5	110
6	60

Ces nombres peuvent être assez exactement exprimés par la formule

$$y = \frac{3180 \cdot \tau}{e^{\tau} - e^{-\tau}}.$$

Car on trouve

τ	y calc.	y exp.	diff.
0	1590	1590	0
1	1353	1380	— 27
2	878	880	— 2
3	476	490	— 14
4	233	225	+ 8
5	107	110	— 3
6	47	60	— 13

Ces différences entre le calcul & l'expérience sont assez petites & assez irrégulieres pour pouvoir être attribuées aux difficultés d'observer à quelques degrés près le nombre de tours que la corde fit en se tordant. Elles peuvent encore être diminuées en posant généralement

$$y = \frac{3180 n\tau}{e^{n\tau} - e^{-n\tau}}$$

& en déterminant n par l'expérience. Car ici ce n'est que par des cir-

constances particulieres que ce coëfficient n ne differe que très peu de l'unité. La formule générale

$$y : 2a = \frac{n\tau}{e^{n\tau} - e^{-n\tau}}$$

fait voir que la courbe CD reste toujours la même pour des cordes plus ou moins grosses. Car le tems $n\tau$ croît en raison du tems τ, & les ordonnées y sont proportionelles à l'ordonnée initiale a. Ainsi la courbe CD étant une fois construite, il n'y a qu'à changer d'échelle tant pour les abscisses que pour les ordonnées, pour l'appliquer à toutes sortes de cordes. Car on aura en général

$n\tau$	$y : 2a$
0	1, 00000
1	0, 85092
2	0, 55143
3	0, 29946
4	0, 14931
5	0, 06738
6	0, 02975

Voici maintenant encore quelques expériences.

Le 9 Mai 1772, je coupai de la corde mince un bout de $11\frac{3}{4}$ lignes en long & je le suspendis dans l'eau tempérée, depuis 2 heures 13 minutes après midi jusqu'à 7 heures du soir, où je le retirai pour le laisser sécher. J'observai le tems qu'il employa pour chaque quart de tour.

Dans l'eau. tems	degrés.	Dans l'air. tems	degrés.
h. m.		h. m.	
0. 0	— 40	0. 0	912
0. $5\frac{1}{2}$	+ 0	0. 9	900
0. 9	+ 90	0. 21	810
0. $11\frac{1}{4}$	+ 180	0. 27	720
0. $13\frac{1}{2}$	+ 270	0. $32\frac{1}{2}$	630
0. $15\frac{3}{4}$	+ 360	0. $37\frac{1}{2}$	540
0. 18	+ 450	0. $44\frac{1}{4}$	450
0. 21	+ 540	0. 53	360
0. 34	+ 630	1. $3\frac{1}{4}$	270
0. 50	+ 720	1. $23\frac{1}{2}$	180
0. 79	+ 810	10 Mai, matin	90
3. 47	+ 900		
5. 32	+ 912		

Cette corde devoit dans l'air retourner jusqu'au — 40me degré, ainsi elle resta en arriere de 90 + 40 = 130 degrés. Mais d'un autre côté elle étoit parvenue par là au degré d'élasticité qui lui est naturel, puisqu'elle se l'étoit donné elle-même. Il s'agissoit néanmoins de voir si l'expérience confirmeroit cette façon d'envisager la chose.

Pour cet effet je la suspendis de nouveau dans l'eau le 11 Mai suivant depuis les 6 heures 55 minutes du matin jusqu'à 2 heures 35 minutes après midi, où je la retirai pour la laisser sécher. Voici comment elle fit chaque quart de tour

Dans l'eau tems h. m.	Dans l'eau degrés	Dans l'air tems h. m.	Dans l'air degrés
0. 0	+ 80	0. 0	912
0. 5	90	0. 5	900
0. 9¼	180	0. 13	810
0. 12¾	270	0. 19	720
0. 16¾	360	0. 23½	630
0. 21	450	0. 29	540
0. 26½	540	0. 34	450
0. 33⅓	630	0. 42½	360
0. 44	720	0. 51	270
1. 2	810	1. 9	180
7. 40	912	2. 36	90
		5. 25	85
		&c.	

Ici donc la corde dans l'eau se détortilla jusqu'au même degré où elle étoit parvenue le 9 Mai, & encore dans l'air elle se remit au 85 degré, de sorte qu'il ne lui resta à parcourir encore que 5 degrés pour retourner au point où elle avoit été le matin. Ce jour-là le tems étoit couvert & se préparoit à la pluie qui le 12 Mai dura toute la journée.

Je répétai avec la même corde la même expérience le 16 Mai 1772 en la mettant dans l'eau depuis 2 heures 16 minutes après midi jusqu'à 7 heures 45 minutes du soir, où je la laissai sécher. La corde tourna de la maniere suivante:

Dans l'eau

tems h. m.	degrés
0. 0	130
0. $7\frac{1}{2}$	180
0. $11\frac{1}{2}$	270
0. $15\frac{1}{2}$	360
0. $19\frac{1}{2}$	450
0. $24\frac{1}{2}$	540
0. $30\frac{1}{4}$	630
0. 39	720
0. 53	810
1. 50	900
4. 9	912
5. 29	920

Dans l'air

tems h. m.	degrés
0. 0	920
0. 17	880
0. 26	810
0. 33	720
0. 47	540
1. 2	360
1. 32	180
2. 22	90
12. 15	70

Dans cette expérience la corde étoit d'abord elle-même plus humide que les deux premieres fois, néanmoins elle ſe décortilla dans l'eau à 8 degrés près au point où elle étoit parvenue dans les deux premieres expériences. Elle ſécha de 20 degrés plus que la premiere fois & de 15 degrés plus que la ſeconde. Ces différences ſont petites en comparaiſon du grand nombre de degrés que la corde avoit parcourus, dans chacune de ces expériences. Du reſte l'air fut de 40 à 50 degrés des hygrometres *A, B* plus humide le 16 Mai, qu'il ne l'étoit le 9 & 10 du même mois.

J'ai encore fait une expérience ſemblable le 4 & le 5 Mai avec un autre bout de la même corde, long de $11\frac{3}{4}$ lignes. Je le ſuſpendis dans l'eau le 4 Mai à 10 heures 13 minutes du matin, & le retirai le 5 Mai à 6 heures 34 minutes du matin pour le laiſſer ſécher. Voici comment il tourna.

Dans l'eau

tems h. m.	degrés
0. 0	0
0. 4½	90
0. 7	180
0. 9	270
0. 10½	360
0. 13	450
0. 15	540
0. 18	630
0. 21	675
0. 32	700
0. 42	760
0. 49	800
1. 7	860
1. 30	910
1. 54	940
2. 42	950
4. 7	960
20. 21	960 +

Dans l'air

tems h. m.	degrés
0. 0	960 +
0. 20	900
0. 29	810
0. 35	720
0. 41½	630
0. 47	540
0. 54	450
1. 1½	360
1. 11½	270
1. 29	180
2. 19	90
3. 24	45

Cette corde parcourut donc dans l'eau 960 degrés. Celle du 9 Mai parcourut 40 + 912 = 952 degrés. La différence eſt de 8 degrés, & pouvoit être bien plus grande. Car on voit bien qu'une corde d'un pouce environ de longueur ne peut gueres être coupée en ſorte qu'elle ait à une $\frac{1}{120}$ partie près la même longueur qu'une autre déjà coupée. Et quoiqu'elles ſoient coupées d'un même bout, il ne s'enſuit pas qu'elles ſoient également tordues. L'effet fait voir que cela n'étoit pas. Car en ſéchant, la corde du 9 Mai reſta en arriere de 130 degrés, celle du 5 Mai ne reſta en arriere que tout au plus de 45 degrés. Nous verrons enſuite ce qu'il y avoit d'anomal dans ces cordes lorſqu'elles ſe détortilloient dans l'eau, ſurtout la premiere fois. Il s'agit d'abord de revenir à notre formule pour en faire l'application au deſſéchement de ces cordes.

Fig. 5. J'ai conſtruit dans la cinquieme Figure les courbes dont les ordonnées repréſentent le deſſéchement de la corde employée le 9, le 11 & le 16 Mai 1772. Ces courbes ne coïncident pas, & c'eſt de quoi on peut alléguer une double raiſon. En premier lieu elles ſont conſtruites ſur une même

même échelle, & comme la corde n'a pas toujours parcouru un même nombre de degrés, cela fait que les ordonnées initiales ne ſont pas égales, & par conſéquent les autres ordonnées ne ſauroient l'être non plus. En ſecond lieu le moment où la corde, après avoir été retirée de l'eau & eſſuyée avec un papier gris, commençoit à tourner, ne pouvoit pas être obſervé exactement. Je ne puis pas dire non plus que la corde ait été chaque fois également eſſuyée. De là il ſuit que le point *A* n'eſt pas le vrai commencement des abſciſſes, ou que s'il l'eſt par ex. pour la courbe intermédiaire *CM*, il ne l'eſt pas pour les deux autres. Mais je dois d'abord dire que

CM eſt la courbe pour l'expérience du 9 Mai,

cm celle pour le 11 Mai,

dn celle pour le 16 Mai.

La courbe *CM* ne paroit pas non plus avoir la droite *AB* pour ſon axe, puiſqu'elle s'en approche beaucoup plus lentement que les deux autres. J'avois laiſſé la corde ſuſpendue pendant toute la nuit du 9 au 10 de Mai, de ſorte que la derniere obſervation fut faite le 10 le matin. Mais je ne ſaurois dire ſi le degré d'humidité de l'air n'a pas varié pendant la nuit. Ce que je trouve dans mes régitres météorologiques, c'eſt que l'hygrometre *H* qui le 9 dans la matinée marqua le 265me degré, marqua le ſoir le 280me, de ſorte que l'air devint plus ſec. Quoi qu'il en ſoit c'eſt aux deux autres courbes *cm*, *dn* que je m'en tiendrai principalement.

Comme le commencement des abſciſſes eſt incertain il nous faut une ordonnée de plus pour y appliquer la formule

$$y : 2a = \frac{n\tau}{e^{n\tau} - e^{-n\tau}}.$$

Cela n'empêche pas cependant que l'ordonnée *Ad* ne puiſſe être regardée comme à très peu près égale à l'ordonnée initiale. Car pendant les premieres minutes ces ordonnées ne varient que très inſenſiblement. Je regarde donc la longueur de l'ordonnée initiale comme donnée. Dans l'expérience du 16 Mai elle eſt = 850 degrés = *a*. Pour avoir encore deux au-

tres ordonnées je fais $n\tau = 1$, & $n\tau = 4$, & je trouve les ordonnées répoudantes

$$y = \frac{1700}{e - e^{-1}} = 723$$

$$y = \frac{6800}{e^4 - e^{-4}} = 254.$$

Or après avoir construit la courbe dn sur un plus grand papier, je trouve que l'ordonnée 723 répond à $27\frac{1}{2}$ minutes de tems pris sur l'abscisse AB. L'ordonnée 254 se trouva pareillement répondre à 1 heure 27 minutes ou 87 minutes. La différence $87 - 27\frac{1}{2} = 59\frac{1}{2}$ est égale à $\frac{3}{n}$, ce qui donne $n = \frac{1}{19\frac{5}{6}}$; de sorte que le tems de $19\frac{5}{6}$ minutes doit être regardé comme l'unité. Soustrayons encore ces $19\frac{5}{6}$ minutes des $27\frac{1}{2}$ minutes, il reste $7\frac{2}{3}$ minutes & c'est le tems qui s'écoula avant que la corde commençât à tourner. Nous aurons donc

$$y = \frac{1700\,(\tau - 7\frac{2}{3}) : 19\frac{5}{6}}{e^{(\tau - 7\frac{2}{3}) : 19\frac{5}{6}} - e^{-(\tau - 7\frac{2}{3}) : 19\frac{5}{6}}}.$$

En prenant les tems τ tels que l'expérience les donne, on trouvera par cette équation les valeurs de y, auxquelles il faut ajouter les 70 degrés qui ont été soustraits, & on aura

Tems h. m.	degrés calculés	degrés observés	diff.
0. 0	920	920	0
0. 17	890	880	+ 10
0. 26	810	810	0
0. 33	726	720	+ 6
0. 47	543	540	+ 3
1. 2	372	360	+ 12
1. 32	173	180	— 7
2. 22	83	90	— 7

Les différences sont ici plus petites que dans l'expérience rapportée ci-dessus.

De la même maniere j'ai trouvé pour l'expérience du 11 Mai

$$y = \frac{1654\,(\tau + 1{,}7) : 15{,}7}{e^{(\tau + 1{,}7) : 15{,}7} - e^{-(\tau + 1{,}7) : 15{,}7}}$$

& en ajoutant les 85 degrés qui ont été foustraits on a

Tems h. m.	degrés calculés	degrés obfervés	diff.
0. 0	911	912	— 1
0. 5	887	900	— 13
0. 13	802	810	— 8
0. 19	704	720	— 16
0. 23½	657	630	+ 27
0. 29	552	540	+ 12
0. 34	476	450	+ 25
0. 42½	365	360	+ 6
0. 51	279	270	+ 9
1. 9	167	180	— 13
2. 36	93	90	+ 3

Ici les différences font un peu plus grandes que dans l'expérience précédente, mais toujours affez petites pour laiffer indécis fi c'eft à la formule ou aux irrégularités de l'expérience elle-même qu'elles doivent être attribuées, d'autant plus que je n'ai marqué le tems qu'en minutes & demi-minutes. Ce que je puis remarquer à cet égard c'eft que la formule

$$y = \frac{2an\tau}{e^{n\tau} - e^{-n\tau}}$$

renfermant des quantités exponentielles, il n'y a gueres moyen d'appliquer à ces expériences quelque autre équation. La corde perd fon humidité en forte qu'enfin la quantité qui s'évapore dans un inftant donné doit devenir proportionelle à l'humidité qui y refte. Par là les courbes dn, CM, cm ont une courbe logarithmique pour afymptote. Elles feroient entierement logarithmiques fi l'humidité dans la corde étoit dès le commencement diftribuée en forte que la quantité qui s'évapore dans chaque inftant pût être proportionelle à la quantité qui refte, & que la corde pût tourner dans la même proportion. Mais comme d'abord la corde eft mouillée au point de n'avoir plus de force élaftique, cette force ne lui revient qu'à mefure qu'elle feche. D'abord l'élafticité s'accroit affez uniformément & cela fait que le mouvement qui en réfulte doit croître avec une viteffe accélérée. Cette viteffe cependant ne s'accroit que jufqu'à un certain point, puifque l'élafticité ne peut devenir plus grande qu'elle n'eft après que la corde eft

feche, & qu'à mefure qu'elle feche il faut plus de force pour qu'elle fe torde d'avantage. La corde ne peut non plus fe tordre qu'à mefure qu'elle perd fon humidité, & cela empêche encore qu'elle ne fe torde, comme fi l'élafticité étoit la feule caufe agiffante.

Fig. 4. La courbe CE dont les ordonnées repréfentent le poids de l'humidité qui refte, dans l'expérience du 15 Nov. 1772, paroit également avoir une logarithmique pour afymtote. Mais le commencement paroit plutôt être parabolique. La corde toute mouillée fe deffeche d'abord à la furface & peu à peu dans les parties intérieures, par ce que l'humidité fe retire vers la furface, d'où elle s'éleve dans l'air. J'ai fait voir dans mon premier Effai, que dans le deffechement d'une éponge la racine cubique de l'humidité qui refte eft à très peu près en raifon du tems, en forte que les tems étant équidifférens ces racines cubiques le font à très peu près auffi. Si donc la corde étoit auffi fpongieufe qu'une éponge, les racines quarrées de l'humidité qui refte feroient à très peu près proportionelles au tems, en forte que les tems étant équidifférens, ces racines quarrées le feroient à très peu près auffi. Or la corde n'approche en porofité d'une éponge que lorfqu'elle eft toute mouillée, en forte qu'en la tordant on peut faire fortir l'eau qu'elle contient dans fes interftices & furtout auffi dans les plis qu'on lui a donnés en la tordant. Il s'enfuit donc que c'eft tout au plus au commencement que la courbe CE peut être parabolique.

Confultons là-deffus l'expérience. Pour cet effet j'ai mefuré les ordonnées qui répondent à chaque heure entiere, & je trouve

Tems, heures	ordonnées
0	3, 80
1	2, 47
2	1, 47
3	0, 79
4	0, 44
5	0, 21

Comme ici les tems font équidifférens, nous n'aurons qu'à prendre les différences des ordonnées.

τ	z	Δz	$\Delta^2 z$
0	380		
1	247	— 133	
2	147	— 100	+ 33
3	79	— 68	+ 32
4	44	— 35	+ 33
5	21	— 23	+ 12

Comme donc les trois premieres *ſecondes différences* $\Delta\Delta z$ different ſi peu qu'on peut les regarder comme égales & par conſéquent comme conſtantes, il s'enſuit que pour les 4 premieres heures la courbe CE ne differe que très inſenſiblement d'une parabole dont l'équation ſe trouve être

$$z = 3{,}80 - 1{,}5 \cdot \tau + 0{,}16 \cdot \tau^2$$

où τ dénote des heures. Il faudra donc conclure que la courbe CE commence par être parabolique, mais que déclinant peu à peu de la parabole elle finit par être logarithmique. Cependant il ne s'enſuit pas que cette courbe ſoit compoſée d'une parabole & d'une logarithmique. La parabole ne permettroit pas qu'elle fût aſymtotique. C'eſt de deux ou pluſieurs courbes aſymtotiques qu'elle doit être compoſée. Je trouve qu'en la regardant ſimplement comme la différence de deux logarithmiques, ou qu'en faiſant

$$z = 7{,}04 \cdot (0{,}505)^\tau - 3{,}24\,(0{,}33)^\tau$$

cette équation ſatisfait à une bagatelle près aux nombres que donne l'expérience. Voici la comparaiſon.

τ	z calc.	z exp.	diff.
0	3, 80	3, 80	0, 00
1	2, 49	2, 47	+ 0, 02
2	1, 44	1, 47	— 0, 03
3	0, 79	0, 79	0, 00
4	0, 42	0, 44	+ 0, 02
5	0, 22	0, 21	— 0, 01

La premiere de ces logarithmiques peut être conſidérée comme la principale ou la vraie aſymtote de la courbe CE. C'eſt celle ſuivant laquelle l'humidité de la corde décroîtroit uniformément ſi elle étoit dès le commencement diſtribuée de la façon que le deſſéchement uniforme exige. Mais comme cela n'a pas lieu dès le commencement, la ſeconde logarithmique fait voir

de quelle maniere l'humidité approche de cet état de desséchement uniforme. Cela arrive d'abord près de la surface de la corde & peu à peu aussi dans les parties intérieures.

Voyons encore comment dans les expériences rapportées ci-dessus les cordes se détortilloient dans l'eau. Cela arriva dans les quatre expériences du mois de Mai, suivant les ordonnées des quatre courbes construites dans la
Fig. 6. sixieme Figure sur une même échelle. La courbe *Abc* est pour l'expérience du 4 Mai. Je l'ai tirée entre les points *bc* de deux manieres. L'une qui est pointée répond aux nombres que donne l'expérience. L'autre *bBc* que j'ai tirée d'un trait continu, répond à ce qu'il doit y avoir d'uniforme dans la courbure de cette courbe. Il est visible que la partie marquée par des points, quoique répondante à l'expérience, est anomale. Il faut donc que la corde, après s'être détortillée assez uniformément jusqu'à un certain point, ait ensuite trouvé un obstacle. Cet obstacle fit que pendant près de 10 minutes la corde resta presque immobile. Mais comme pendant ces 10 minutes elle ne laissa pas de devenir plus humide & de gonfler d'avantage, cet accroissement d'humidité enfin l'emporta en sorte que peu à peu, par un mouvement plus accéléré, la corde se trouva enfin tout autant détortillée que si cet obstacle n'avoit pas troublé sa marche. Cet obstacle ne consiste qu'en ce que la corde étoit ce qu'on peut appeller *nouée.* On n'a qu'à voir comment les cordes se font. Elles se raccourcissent à mesure qu'on les tord d'avantage. Ce raccourcissement cependant se fait plutôt par saut, que d'une façon continue, puisque ce n'est que de tems en tems que le cordier rapproche sa roue vers l'autre bout de la corde. C'est alors que la corde tend à se nouer & qu'au lieu de se tordre uniformément elle se tord par saut. La Figure fait voir que la corde employée dans l'expérience avoit besoin de 80 minutes de tems pour revenir à la régularité qu'elle avoit avant & après qu'il falloit qu'elle se *dénouât.*

Dans l'expérience du 9 Mai suivant, j'ai employé un bout de la même corde. La courbe *AdeD* fait voir comment elle se détortilloit dans l'eau cette premiere fois. Cette courbe de *d* en *e* est encore tirée de deux manieres, d'abord par des points conformément aux nombres

que donne l'expérience, ensuite par une ligne continue conformément à ce que la régularité dans la courbure de la courbe exige. Ce bout de corde étoit donc *noué* comme le premier. L'un & l'autre, après avoir été pendant 20 minutes dans l'eau, s'étoient détortillés jusqu'au point où il s'agissoit du *dénouement*. Cependant ce second bout se dénoua avec plus de facilité, & en moins de tems. On voit que les points en *d* s'éloignent beaucoup plus vite de l'axe *AH* qu'ils ne s'en éloignent en *b*, & en *e* ils coïncident de 20 minutes plutôt avec la courbe réguliere qu'ils ne coïncident en *c*. Cela veut simplement dire que les cordes ne se *nouent* pas également dans toute leur longueur. Il est même possible qu'on coupe d'assez longs bouts, qui ne sont point noués du tout. Cela dépend beaucoup des soins & de l'habileté du cordier.

Le 11 & le 16 Mai j'employai la même corde que j'avois employée le 9 Mai. La courbe *AF* est construite d'après l'expérience du 11 Mai, & la courbe *AG* pour celle du 16. Ces deux courbes sont entierement régulieres. Elles coïncideroient si la corde avoit au commencement été également seche. Mais le 16 Mai elle fut de 50 degrés plus humide. Cela fait que les ordonnées de la courbe *AG* sont plus courtes que celles de la courbe *AF*.

La régularité de ces deux courbes fait voir que la corde s'étoit si bien *dénouée* le 9 Mai où je la mis la premiere fois dans l'eau, qu'elle ne se *noua* plus en séchant, & que par conséquent elle n'avoit plus besoin de se *dénouer* de nouveau dans l'eau. Il est facile d'en tirer la conséquence, que pour avoir un bon hygrometre on fait bien de faire passer par l'épreuve du *dénouement* la corde qu'on veut employer.

J'ai encore tracé dans la quatrieme Figure la courbe *AF* dont les ordonnées expriment le détortillement de la corde employée dans l'expérience du 15 Novembre 1772 rapportée ci-dessus. La courbure est assez réguliere, de sorte que cette corde paroit avoir été sans *noeud*. Mais comme cette courbe en *F* s'éloigne encore assez considérablement de l'axe *AB*, cela marque que j'aurois pu laisser la corde encore plus longtems dans l'eau, & qu'elle se seroit détortillée encore d'avantage. Je ne le fis pas parce Fig

que je voulois employer le reste du jour pour observer le desséchement, tant par rapport au poids que par rapport au nombre de tours.

Toutes ces observations font voir que les cordes tournent avec une lenteur très considérable, de sorte qu'il faut des heures entieres avant que ces hygrometres indiquent de combien l'humidité de l'air a changé. Et comme cette lenteur de la marche dépend surtout de la grosseur des cordes, il arrive que deux hygrometres à corde de différens diametres, n'ont pas une marche entierement analogue, & si les variations de l'humidité de l'air sont subites, les cordes de différente grosseur les indiquent très différemment.

J'ajouterai encore quelques remarques sur le rapport entre les variations de l'hygrometre & de l'humidité de l'air. Pour que l'air soit humide, il ne suffit pas qu'il soit chargé de beaucoup de particules aqueuses, mais il faut que ces particules se coagulent en petites goutes, & que ces goutes s'attachent aux corps qu'elles touchent. A cet égard les hygrometres indiquent moins la quantité des particules aqueuses qui nagent dans l'air, que la disposition qu'elles ont à se coaguler & à s'attacher aux corps.

Nous avons vu ci-dessus que les hygrometres ont une variation annuelle en ce que pendant l'hyver les degrés d'humidité prédominent, tandis que pendant l'été ce sont les degrés de sécheresse. On peut leur attribuer encore une variation journaliere, parce que généralement parlant ils avancent vers le sec depuis le matin jusques vers les 2 ou 3 heures après midi, & qu'ils retournent vers les degrés d'humidité depuis le soir jusqu'au matin. C'est ce qu'on observe fort régulierement surtout quand l'état de l'atmosphere continue de rester le même.

A l'égard de cette variation annuelle & journaliere l'hygrometre a beaucoup d'affinité avec le thermometre, & la raison en est toute claire, c'est que *la chaleur seche en ce qu'elle accélere l'évaporation de l'humidité, & le froid rapproche les particules aqueuses que la chaleur avoit dispersées.*

Cette variation annuelle & journaliere de l'hygrometre peut être regardée comme réguliere, & à cet égard elle indique plutôt le tems qu'il fait que les changemens qu'il va subir. Mais s'il arrive que l'hygrometre

marche

marche en contresens, ou qu'en suivant sa marche réguliere il tourne & plus & plus vite que le changement du chaud & du froid ne l'exige, alors ses variations indiquent que l'état de l'air va changer.

Quand le tems tourne à la pluie, l'air commence quelque-part à devenir humide. Je dis *quelque-part;* car cela peut arriver près de la surface de la Terre, comme au-dessus des nuées, dans nos environs comme autre-part, & avec des degrés de vitesse très différens.

Si le tems est calme l'hygrometre n'indique que les changemens de l'air dans nos environs, & surtout ceux qui se font près de la surface de la Terre. Si donc c'est dans la basse région que l'air commence à devenir humide, l'hygrometre s'en ressent aussitôt. Au lieu d'avancer vers le sec depuis le matin jusqu'après midi, il reculera, ou du moins il n'avancera que très peu ou point du tout, & pendant la nuit il reculera au delà de son ordinaire. Dans ces cas l'hygrometre pronostique la pluie avec beaucoup de certitude, surtout lorsqu'il recule beaucoup & très vite. Pendant l'été sa marche réguliere est d'environ 20 degrés, dont il avance le matin & recule le soir. Je l'ai vu reculer de plus de 30 degrés du matin jusqu'après midi & encore de 20 degrés le lendemain. La pluie survint le premier jour & dura sans beaucoup d'interruption cinq jours de suite. Le cinquieme jour l'hygrometre avança de 11 degrés vers le sec pendant la nuit, c'est à dire en contresens de sa marche ordinaire, & le sixieme jour il avança encore de 61 degrés. Le tems se mit au beau & continua jusqu'à l'heure du midi du septieme jour, où l'hygrometre du matin à l'après midi retourna en arriere, c'est à dire en contresens de sa marche réguliere.

Si l'air commence à devenir humide dans ses régions supérieures, alors il est possible que la pluie tombe avant que l'hygrometre recule vers les degrés d'humidité. En ce cas il ne tourne que pendant qu'il pleut & même après la pluie. C'est que dans ce cas c'est la pluie qui amene l'humidité dans l'air inférieur, au lieu que dans le cas précédent l'humidité dévance la pluie.

Quand l'air n'est point calme, le vent nous amene l'humidité ou la sécheresse des autres pays, soit dans la région inférieure de l'air,

foit dans fes régions fupérieures. Si le vent inférieur vient du côté de la mer, c'eft ordinairement de l'humidité qu'il amene, & l'hygrometre ne tarde pas à l'indiquer. Le contraire arrive lorfque le vent inférieur vient du continent.

Quant aux vents fupérieurs, qu'on reconnoit au mouvement des nuées, ils n'influent pas immédiatement fur l'hygrometre, cet inftrument n'indiquant que les variations de l'air contigu & par conféquent de l'air inférieur. De là vient que les vents fupérieurs peuvent amener de la pluie, fans que l'hygrometre l'annonce par un mouvement retrograde. Mais auffi dans ces cas l'hygrometre fuivra fimplement fa marche réguliere, qui généralement parlant n'eft d'aucun ufage pour l'avenir.

I. TABLE.

Hygrometre *I* à Berlin.

	1771 Nov.	Déc.	1772 Janv.	Févr.	Mars.	Avril.	Mai.	Juin.	Juillet.	Août.	Sept.	Oct.	Nov.
1		163	133	163	−15	213	222	249	288	223	266	250	246
2		153	135	135	+10	243	219	262	270	230	276	213	229
3		144	143	128	122	254	258	256	270	227	272	229	250
4		151	114	147	145	268	260	247	213	237	260	198	209
5		162	138	166	134	257	220	249	218	241	266	208	216
6		182	134	167	128	253	247	243	225	246	207	208	210
7		186	135	176	123	241	250	227	229	256	237	243	208
8		182	149	181	116	236	250	245	251	262	244	266	141
9		178	156	118	111	202	288	259	242	254	254	288	210
10		158	135	109	119	217	278	250	240	277	221	252	228
11		128	141	117	116	227	276	263	245	274	246	266	138
12		124	108	132	137	267	268	252	254	254	274	243	180
13		97	85	144	142	243	250	265	236	254	274	233	195
14		143	128	132	143	244	236	267	236	254	273	243	208
15		153	158	125	147	237	232	274	246	256	266	222	198
16		168	158	127	146	233	228	272	232	249	257	218	158
17		165	165	150	140	230	233	258	250	253	246	187	188
18		163	157	146	131	260	236	264	261	220	216	220	152
19		143	156	145	122	253	240	286	264	218	244	198	132
20	155	143	153	147	113	251	230	276	272	220	216	232	
21	205	143	157	153	119	243	239	265	258	227	236	236	
22	200	132	135	152	156	248	238	264	256	246	216	192	
23	205	102	131	143	154	253	211	263	260	259	213	240	
24	166	115	132	129	175	250	238	273	271	236	231	256	
25	185	132	130	143	176	213	223	279	262	255	250	257	
26	156	133	130	147	177	238	228	268	261	264	238	184	
27	86	128	130	23	184	246	224	286	269	253	235	211	
28	80	131	129	24	170	246	236	270	250	251	232	216	
29	124	123	123	−21	183	240	237	279	255	262	178	189	
30	148	134	128	—	209	251	244	289	255	249	237	214	
31	—	128	137	—	199	—	247	—	252	259	—	229	

II. TABLE.

Hygrometre *H* à Berlin.

	1771	1772											
	Nov.	Déc.	Janv.	Févr.	Mars.	Avril.	Mai.	Juin.	Juillet.	Août.	Sept.	Oct.	Nov.
1		232	214	230	184	233	218	228	260	215	245	237	233
2		226	218	222	198	239	217	236	254	208	255	220	226
3		224	222	226	216	256	238	228	258	228	252	220	245
4		227	218	233	228	260	242	233	248	220	252	202	227
5		219	222	234	224	251	230	239	241	229	255	204	223
6		231	225	232	221	249	235	233	234	230	218	204	254
7		236	234	237	215	247	237	235	230	236	226	213	175
8		233	237	242	209	231	230	238	233	240	228	242	170
9		233	238	227	202	208	265	246	248	225	233	260	204
10		232	237	222	209	216	259	244	247	242	221	248	223
11		226	233	224	208	232	268	249	246	256	233	247	172
12		221	226	222	217	244	250	242	246	239	251	237	198
13		216	222	228	219	238	233	252	236	248	261	230	201
14		218	232	222	218	228	224	252	242	243	264	234	214
15		220	229	217	222	220	214	256	246	250	258	217	200
16		228	233	216	218	223	216	258	239	239	249	221	195
17		225	235	222	218	221	221	254	239	246	238	189	201
18		216	233	218	216	264	221	250	246	229	212	210	197
19		220	233	218	214	250	228	253	250	221	238	202	191
20	238	218	231	216	214	249	228	257	258	218	222	224	
21	242	224	228	223	212	242	230	249	234	228	232	220	
22	242	216	226	222	218	243	230	244	248	225	216	211	
23	244	212	227	218	216	243	217	243	252	239	217	223	
24	235	213	225	218	222	242	228	250	258	231	226	246	
25	241	217	226	218	217	202	227	253	252	239	242	243	
26	240	213	226	223	219	234	224	248	250	248	242	215	
27	227	216	221	190	231	238	217	250	257	244	228	216	
28	220	218	212	206	224	242	222	236	238	249	217	219	
29	220	211	217	191	221	240	233	250	242	255	210	202	
30	228	209	218	—	228	247	234	262	242	236	228	211	
31	—	212	222	—	222	—	235	—	238	242	—	225	

Comparaison de la marche du Baromètre à Berlin et à Sagan.

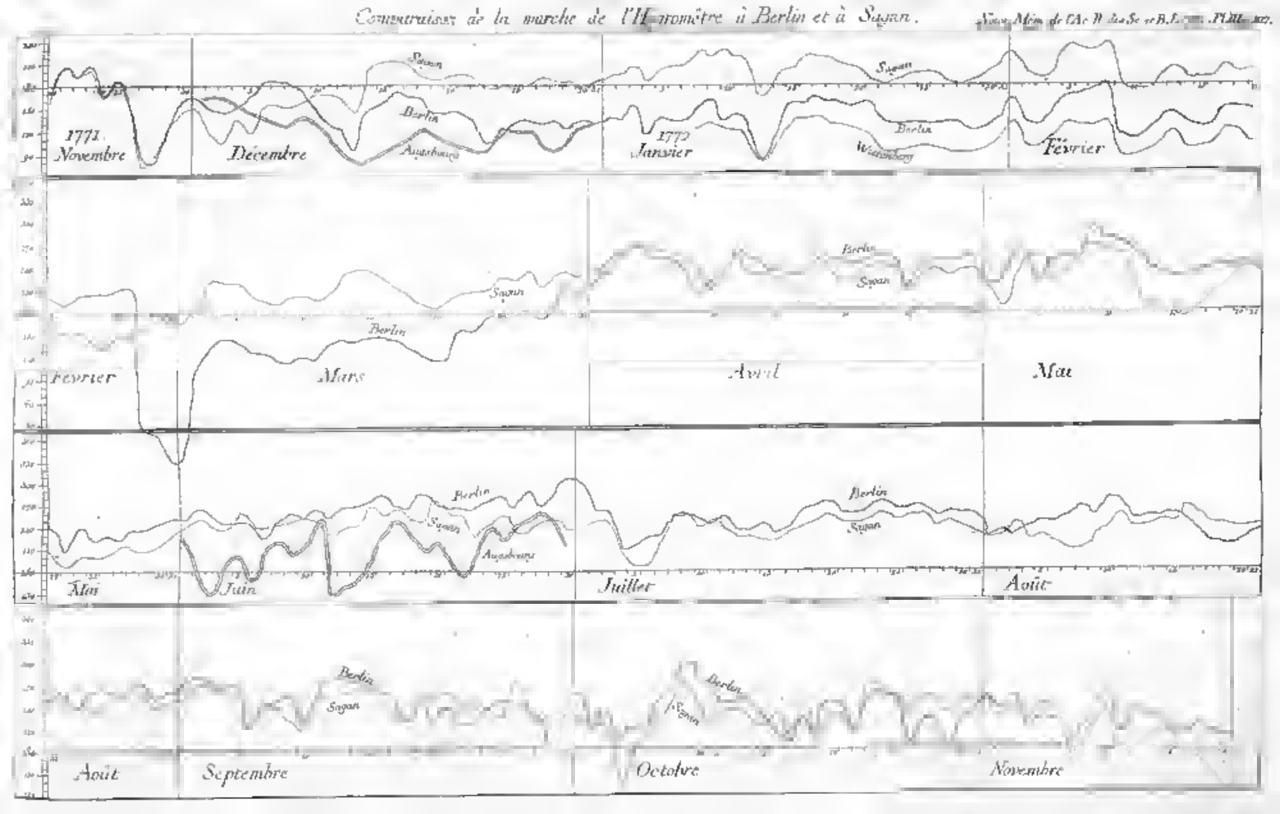


Fig. 1.

Hygrometre

Thermometre

n d I F M A M I I A S O N D J f m a

Fig. 3.

A C G H B D E F

Fig. 2

250 200 150 100

230 240 250 260 270 280

1 5 10 15 20 25 30 1 5 10 15 20

1752. Novembre

Décembre

Fig. 4.

C F D E M A B

0 1 2 3 4 5 6 7 8

Fig. 5.

d C c m M n A B

1 2 3

Fig. 6

B c b e D F G d A H

0 1 2 3

IV. TABLE.

Hygrometre à Wittemberg.

	1771		1772										
	Nov.	Déc.	Janv.	Févr.	Mars.	Avril.	Mai.	Juin.	Juillet.	Août.	Sept.	Oct.	Nov.
1		160	139	124	121	200	227	262	267	245	254	234	236
2		155	142	98	157	225	219	263	261	245	260	231	227
3		142	144	94	154	234	237	260	255	242	257	232	232
4		141	127	111	194	241	251	256	235	241	248	230	214
5		135	127	129	194	240	246	259	234	245	250	224	220
6		157	113	125	192	235	250	254	235	244	233	217	215
7		162	106	124	178	236	258	252	237	246	242	209	190
8		157	121	129	167	230	247	238	244	255	244	242	210
9		158	126	86	160	207	266	257	250	260	243	257	220
10		151	121	86	167	219	268	248	255	260	234	237	218
11		137	119	89	166	228	265	237	255	261	240	233	192
12		132	95	98	183	237	258	243	256	252	247	228	217
13		130	80	114	196	235	238	258	255	249	254	226	218
14		153	102	92	198	234	236	263	248	249	257	225	215
15		158	124	94	199	231	235	267	240	248	256	220	209
16		158	134	95	196	227	237	272	243	243	253	218	206
17		155	134	119	176	229	235	273	256	245	244	211	208
18		148	127	107	163	240	235	267	261	242	238	217	202
19		139	126	99	164	239	238	274	263	244	241	211	196
20	242	141	120	100	161	232	240	279	264	246	233	205	
21	176	141	113	113	158	228	248	277	255	253	235	203	
22	195	123	91	105	176	231	240	273	252	249	235	199	
23	184	123	90	110	182	234	232	275	255	248	231	187	
24	161	132	92	98	194	245	242	282	263	243	238	227	
25	175	136	98	111	184	227	243	285	265	248	242	231	
26	165	119	95	107	182	234	245	286	264	215	239	225	
27	127	103	92	111	188	236	244	286	263	249	242	231	
28	127	99	89	109	178	237	242	271	258	254	233	235	
29	144	131	88	116	183	242	245	271	251	261	215	235	
30	158	138	96	—	196	250	246	273	258	250	229	233	
31	—	135	109	—	200	—	253	—	259	254	—	233	

SUR

LA DENSITÉ DE L'AIR.

PAR M. LAMBERT.

§. 1.

La denſité des matieres s'exprime ordinairement par le poids d'un certain volume, par ex. d'un pied cubique, ou par le rapport de ce poids à celui d'un même volume d'une matiere très connue, p. ex. de l'eau de pluie. C'eſt dans ce dernier ſens qu'on dit que l'air eſt environ 850 fois moins denſe que l'eau, & que l'eau eſt près de 14 fois moins denſe que le vif argent. D'où il ſuit que l'air eſt près de 12000 fois moins denſe que le vif argent. Dans ces énoncés on entend que c'eſt l'air tel qu'on l'a peſé, & tel qu'il ſe trouve près de la ſurface de la Terre & dans des endroits peu élevés au-deſſus de la mer. C'eſt un air comprimé par le poids de toute l'atmoſphere, d'une température moyenne & rempli ou chargé de vapeurs & de toutes ſortes de matieres étrangeres. C'eſt un air tel qu'il eſt naturellement, & que pour cet effet je nommerai *air naturel* ou *air commun* pour le diſtinguer de ce qui doit être appellé *air pur* ou air proprement tel.

§. 2.

Il y a différens phénomenes qui dépendent de la denſité de l'air, & où il n'eſt pas indifférent que ce ſoit la denſité de l'air naturel ou de l'air pur. Quand on donne une théorie de ces ſortes de phénomenes, il eſt naturel qu'on l'aſſujettiſſe à l'épreuve de l'expérience, laquelle ſouvent ne répond pas à l'attente, uniquement parce que l'air pur ſe confondoit avec l'air naturel. Il n'y a que l'air naturel dont nous puiſſions déterminer la denſité par des expériences immédiates. Si donc ces théories préſuppoſent un air pur, il eſt clair que l'air naturel y ſeroit très mal appliqué. Dans ces cas il vaut

mieux mettre la théorie pour base, l'examiner bien par elle-même, & l'employer ensuite pour déterminer la densité de l'air pur.

§. 3.

C'est ce que j'ai fait dans le Mémoire *sur la vitesse du son*, que j'ai lu à l'Académie en 1768, & le résultat en a été *que l'air pur est tout au moins un tiers moins dense que l'air naturel, de sorte qu'un tiers du poids d'un pied cube d'air naturel consiste en particules étrangeres, dont l'air est ordinairement chargé.* C'est l'air tel qu'il est assez près de la surface de la mer en Europe, & nommément dans les endroits où on a fait des expériences, tant sur la vitesse du son, que sur la densité de l'air naturel.

§. 4.

Cependant la vitesse du son n'est pas le seul phénomene qui nous fasse voir clair dans ce qui regarde la densité de l'air pur. Les réfractions de la lumiere dans l'atmosphere peuvent répandre là-dessus un plus grand jour, & c'est dans ce dessein que je me suis occupé à les examiner avec toute l'attention requise. Je dirai d'abord que j'ai eu des précurseurs dans cette carriere, en particulier Mr. *Simpson* & Mr. *Bouguer*. L'un & l'autre trouvent que les réfractions ne suivent pas les décroissemens de la densité de l'air qu'ils appellent air grossier, ou que je nomme simplement air naturel. Mr. *Simpson* trouve qu'en supposant l'air naturel, la réfraction horizontale iroit à plus de 50′, tandis qu'elle n'est que de 32 ou 33 minutes. Cela le porte à supposer une matiere réfractive, qui décroisse uniformément en montant. Cette hypothese emporteroit la conséquence, que la matiere réfractive ne s'étend qu'à une certaine hauteur, puisqu'au-dessus de cette hauteur elle deviendroit négative. Mr. *Bouguer* paroit admettre une supposition assez semblable, puisqu'il prétend qu'à une hauteur qui va au-dessus de 5158 toises sur la mer, les réfractions sont nulles. J'ai déjà remarqué autre-part, que de la façon dont Mr. *Bouguer* infere cette conséquence, on peut en inférer telle autre qu'on voudra, & qu'ainsi il prouve beaucoup au-delà de ce qu'il falloit prouver. Je m'en tiendrai donc, non à ces sortes d'autorités, mais à ce que je pourrai faire voir moi-même.

§. 5.

§. 5.

La premiere queſtion eſt de ſavoir ſi les matieres étrangeres qui nagent continuellement plus ou moins dans l'air, influent ſur les réfractions. A cet égard je dis *qu'elles n'y influent qu'entant que les couches d'air ne ſont point planes, mais ſphériques, & ſimplement entant que par leur poids elles augmentent la denſité de l'air pur en le comprimant.* Voici comment j'argumente pour démontrer cet énoncé. Les matieres étrangeres qui nagent dans l'air ſont des particules hétérogènes & diſſéminées, c'eſt à dire qu'elles ne font point continuité avec l'air pur. Elles interceptent la lumiere qui y tombe, elles l'abſorbent en partie, & en partie elles la réfléchiſſent. Si ce ſont des bullules ou véſicules d'eau, ou des globules d'eau, ou des particules glaciales ou ſalines tranſparentes, la lumiere s'y briſe en ſorte qu'elle nous préſente des couleurs d'iris, ſous différente forme. En tout cela il n'y a rien qui influe dans les réfractions. Elles ſuppoſent l'uniformité & la continuité de l'air pur, & la diminution de ſa denſité d'une couche quelconque à celle qui lui eſt contiguë. A cet égard les particules hétérogenes dans l'air ſont comme la pouſſiere ſur la ſurface d'un priſme de verre. Le priſme en paroit moins tranſparent, mais la lumiere non interceptée s'y briſe ſous les mêmes angles, comme ſi la pouſſiere n'y étoit pas. Il en eſt de même des petites bulles d'air qui ſe trouvent au dedans du priſme. Elles interceptent la lumiere & troublent la ſéparation des rayons colorés qui y tombent. Mais ceux qui paſſent ſans rencontrer ni pouſſiere ni bulles d'air ni particules ſabloneuſes, ſuivent les mêmes loix qu'ils ſuivroient dans un priſme d'une même eſpece de verre, mais parfaitement tranſparent & bien nettoyé.

§. 6.

J'infere de là que *les particules étrangeres n'influent pas par elles-mêmes dans la quantité de la réfraction.* Mais nonobſtant cela *elles y influent en ce que par leur poids elles compriment l'air pur & le rendent plus denſe.* Si donc à cet égard la denſité des particules étoit partout proportionelle á l'air pur, l'effet en ſeroit le même que ſi l'air pur étoit en ſoi-même plus denſe, ou ſi les particules de l'air pur étoient en elles-mêmes plus peſantes.

Ce cas avoit lieu, du moins à très peu près, dans l'expérience par laquelle M. *Hawksbee* fit voir que la réfraction de l'air diminuoit en même raison que sa densité. C'étoit de l'air naturel qu'il y employa & il est clair qu'en le dilatant par l'évacuation il dilatoit en même tems les particules étrangeres. On sait qu'en pompant l'air il paroit d'abord un brouillard dans le verre qu'on vuide, & qu'à mesure qu'on continue d'exténuer l'air ces particules commencent à tomber peu à peu dans le fond du verre, l'air exténué n'ayant plus assez de force pour les soutenir toutes dans ses interstices. Observons cependant qu'en pompant l'air s'exténue, parce qu'on aggrandit l'espace dans lequel il peut se répandre. L'air se retire de la cloche dans le canon de la machine pneumatique, & il n'est pas douteux qu'en s'y retirant il n'emporte une partie des matieres étrangeres qu'il renfermoit dans ses interstices. Cette partie seroit proportionelle à la quantité de l'air qui se retire, si l'inertie de ces matieres n'y mettoit pas obstacle & si l'air exténué étoit aussi propre à les soutenir que l'air condensé. Alors la densité des particules étrangeres resteroit proportionelle à la densité qui resteroit dans l'air. Mais comme avec tout cela le brouillard qu'on voit dans la cloche après les premiers coups de piston, tombe peu à peu au fond de la cloche, il semble que la densité des particules étrangeres diminue plus fortement & plus vite que la densité de l'air. Ce qui est sûr c'est que les particules plus pesantes sont les premieres à tomber.

§. 7.

J'ai dit, en troisieme lieu, *que les particules étrangeres influent dans les réfractions entant que les couches de l'atmosphere sont sphériques.* Elles compriment l'air pur par leur poids. Cela fait que les couches se rapprochent de la surface ou bien du centre de la Terre. Par là ces couches sont des spheres d'un moindre diametre, & cela fait que dans les couches supérieures tous les angles d'inclinaison & de réfraction sont plus grands, & par-là la réfraction devient elle-même plus grande. Jusques-là donc Mr. *Simpson* a raison de dire que dans l'air naturel, c'est à dire chargé de matieres étrangeres, les réfractions que donne la théorie devroient être au delà de la moitié plus grandes que l'observation ne les donne. C'est aussi ce que je vais faire voir à ma façon, surtout pour les réfractions que la lumiere souffre

près de la ſurface de la Terre. Il s'enſuivra que la denſité de l'air, telle que les réfractions l'exigent, je dirai même telle qu'elle eſt en effet, décroît plus lentement que celle qu'on ſuppoſe être proportionelle aux hauteurs barométriques.

§. 8.

Pour cet effet ſoit C le centre de la Terre, AF une partie de ſa ſurface, LBA un rayon de lumiere qui tombe horizontalement en A. La réfraction que ce rayon ſouffre en paſſant de B en A eſt égale à la courbure de ſa route depuis B juſqu'en A. Soit DB une droite qui touche le rayon en B, & ſoit abaiſſée ſur cette droite du centre de la Terre la perpendiculaire CD, j'ai fait voir dans les *Routes de la lumiere* qu'en ce cas CD eſt à CA comme le ſinus d'inclinaiſon eſt au ſinus de réfraction lorſque la lumiere paſſe immédiatement de l'air tel qu'il eſt en B dans l'air tel qu'il eſt en A. Et dans le même Ouvrage j'ai fait voir encore que lorſque l'angle ACB n'eſt que très petit ou que la hauteur FB n'eſt pas fort grande, on peut ſubſtituer à la courbe BC ſon cercle oſculateur, & que le centre E de ce cercle E eſt 7 fois plus éloigné de A que ne l'eſt le centre de la Terre, de ſorte que $AE = 7 . AC$. Cette proportion eſt la moyenne, car du reſte elle eſt variable, quoiqu'entre certaines limites. Pl. V. Fig. 1

§. 9.

Tirons maintenant CP parallele à DB ou perpendiculaire ſur EB, & faiſons $AC = 1$, $AE = R$, & l'angle $AEC = ACD = \varrho$. Cet angle ſera égal à la réfraction que la lumiere ſouffre en paſſant de B en A, & nous aurons

$$CP = DB = (R - 1) \sin \varrho$$
$$CD = BP = BE - PE = R - (R - 1) \cos \varrho.$$

Donc

$$GD = CD - AC = (R - 1) . (1 - \cos \varrho) = 2 (R - 1) (\sin \tfrac{1}{2} \varrho)^2$$

&

$$CB = \sqrt{(CD^2 + DB^2)} = \sqrt{[(R-1)^2 \sin \varrho^2 + (R-(R-1)\cos \varrho)^2]}$$
$$= \sqrt{[1 + 4R(R-1)\sin \tfrac{1}{2}\varrho^2]}$$

c'eſt à dire à très peu près

$$CB = 1 + 2R(R-1)\sin \tfrac{1}{2}\varrho^2$$

l'angle ϱ n'étant que de quelques minutes.

§. 10.

Nous aurons donc

$$DG = 2(R-1) . \sin \tfrac{1}{2}\varrho^2$$
$$BF = 2(R-1) . \sin \tfrac{1}{2}\varrho^2$$

& par conſéquent

$$BF = R . DG$$

& en poſant

$$R = 7$$

il s'enſuit que la hauteur BF eſt 7 fois plus grande que la différence entre les perpendiculaires $CD - CA$, ou que $BF = 7 . DG$.

§. 11.

Cette différence entre les perpendiculaires, ou le logarithme de $\frac{CD}{CA}$, eſt proportionel à la denſité de l'air en A diviſée par la denſité de l'air en B. Or ſi le point B étoit à l'extrémité de l'atmoſphere, on auroit $CD - CA = \frac{1}{3300}$, plus ou moins, car cela dépend de la denſité abſolue de l'air en A. Mais le point B étant pris près de la ſurface de la Terre, la différence $CD - CA$ doit être à $\frac{1}{3300}$ dans le rapport de la différence des denſités en A & B à la denſité en A. Voilà donc juſqu'où la théorie conduit.

§. 12.

Il s'agit maintenant d'évaluer la denſité de l'air en A & en B; & pour cet effet je la ſuppoſerai proportionelle aux hauteurs barométriques,

uniquement en forme d'hypothefe & pour en examiner enfuite le réfultat. Or on trouve qu'en montant de la furface de la mer de 73 toifes ou 438 pieds, le barometre de 28 pouces defcend à 27 pouces 6 lignes; de forte que la denfité de l'air diminueroit d'une $\frac{1}{56}$ partie, fi elle étoit proportionelle aux hauteurs barométriques. Donc la différence $CD - CA$ feroit la $\frac{1}{56}$ partie de $\frac{1}{3500}$, & par conféquent on auroit

$$CD - CA = \frac{1}{196000}.$$

§. 13.

Mais la théorie de la réfraction demande que $CD - CA = DG$ foit la $\frac{1}{7}^{me}$ partie de la hauteur BF. (§. 10.) Cette hauteur étant de 73 toifes, fera $\frac{1}{44871} \cdot AC$, & ainfi on aura

$$CD - CA = \frac{1}{314097}.$$

On voit que cette valeur n'eft que la $\frac{7}{12}^{me}$ partie de celle que donnent les hauteurs barométriques, & que par conféquent *il s'en faut de beaucoup que la denfité de l'air telle que les réfractions l'exigent, foit proportionelle aux hauteurs barométriques.* Car fuivant ces hauteurs les denfités en A & B feroient comme 55 à 56, tandis que fuivant les réfractions ces denfités ne font que comme 95 à 96.

§. 14.

En tout cela il n'y a rien qui doive étonner. C'eft une fuppofition très gratuite que de faire les denfités de l'air propottionelles aux hauteurs barométriques. Ces hauteurs font fans contredit proportionelles au poids de l'atmofphere, & par conféquent à l'élafticité de l'air qui eft toujours égale au poids comprimant. Mais tout cela n'a rien de commun avec la denfité de l'air. Car quoique cette denfité augmente en raifon du poids comprimant, cela n'eft vrai que lorfque le degré de chaleur refte le même. Or ce n'eft pas le cas qui exifte dans l'atmofphere. On fait que la chaleur diminue à mefure qu'on s'éleve. On fait que la région des nuées eft la région où fe forment la neige & la grele, tant fous la ligne équinoxiale que dans nos climats tout au milieu des jours caniculaires. On voit donc que la fuppofi-

tion des densités proportionelles aux hauteurs barométriques n'est pas un article qui puisse renverser la théorie des réfractions. Tout au contraire il faudra plutôt mettre cette théorie pour base & en déduire ce qu'on peut véritablement appeller *densité de l'air*. Pour la pouvoir bien évaluer il ne suffit pas d'établir qu'elle décroît en raison du poids comprimant. Car dans ce poids comprimant sont comprises toutes les particules étrangeres dont l'air de l'atmosphere est chargé, & il s'agit de savoir suivant quelle loi la densité de ces particules diminue en montant. Il s'agit encore de connoître la loi de la diminution de la chaleur dans les parties supérieures de l'air. Ce ne sera qu'alors qu'on pourra trouver plus exactement l'accord qu'il y a entre les densités de l'air & les réfractions. C'est un but qu'on peut se proposer d'atteindre, mais où tout chemin qu'on voudra choisir ne conduira pas. Il faut une combinaison bien choisie & bien arrangée des phénomenes & des théories pour en inférer ce qui est requis pour que les phénomenes puissent être ce qu'ils sont. Dans le cas dont il s'agit nous n'avons que très peu d'expériences, & la plupart de celles qui résoudroient le plus immédiatement toutes les difficultés ne sont point encore faites. Voici maintenant comment je crois devoir enchaîner celles que nous avons, pour répandre quelque jour sur ce qui regarde la densité de l'air rélativement aux trois causes qui y influent.

§. 15.

D'abord je mets pour base ce qu'un grand nombre d'expériences a fait voir, c'est que *les logarithmes des hauteurs barométriques sont à très peu près proportionels aux élévations des endroits.* C'est la loi trouvée par Mrs. *Mariotte* & *Halley*. Elle auroit lieu exactement si la chaleur étoit la même dans toute la hauteur de l'atmosphere, & si l'air étoit pur, ou si du moins les vapeurs & les autres particules étrangeres étoient répandues proportionellement aux différens degrés des densités de l'air. Tout cela n'est pas. La chaleur diminue en montant, & les vapeurs tout de même. Par là l'effet de l'une & des autres se compense du moins en partie; il faut même dire à très peu près, puisque non-obstant cette double cause les loga-

rithmes des hauteurs barométriques ne laiſſent pas d'être du moins à très peu près proportionels aux élévations des endroits.

§. 16.

Je commencerai à ſuppoſer que cette proportionalité a lieu exactement ou en toute rigueur, afin de voir ce qui en réſulte rélativement à la chaleur & aux vapeurs. Soit donc A la ſurface de la mer, AM une hauteur quelconque. Que les ordonnées de la courbe Bb repréſentent les hauteurs barométriques, celles de la courbe Pp les denſités de l'air pur, celles de Vv les denſités des vapeurs & enfin celles de la courbe Cc les degrés de la chaleur, de ſorte qu'on ait Fig. 2.

	à la ſurface de la mer $= 0$	à la hauteur $AM = x$
la hauteur du barometre	$AB = Y$	$Mb = y$
la denſité de l'air pur	$AP = P$	$Mp = p$
la denſité des vapeurs	$AV = V$	$Mv = v$
le degré de chaleur	$AC = C$	$Mc = c$

J'entens par denſité la hauteur d'une colonne d'air pur ou de vapeurs qui faſſe équilibre à une colonne de vif argent dont la hauteur ſoit $= 1$.

§. 17.

Or la courbe des hauteurs barométriques Bb étant ſuppoſée logarithmique, ſoit ſa ſoutangente $= 6$, & nous aurons d'abord l'équation

$$e^{-x:6} = \frac{y}{Y}$$

où le logarithme hyperbolique de e eſt cenſé être $= 1$. La ſoutangente ſe trouve être d'environ 24000 ou 25000 toiſes.

§. 18.

Enſuite par la nature de la denſité de l'air nous avons l'équation

$$p\,dx + v\,dx = -\,dy$$

qui en ſubſtituant la valeur de dy donne

$$6p + 6v = e^{-x:6}.\,Y.$$

§. 19.

Enfin la denſité de l'air pur s'exprime encore par l'équation

$$p = \frac{yC}{Yc}.P = \frac{CP}{c}.e^{-x:t}$$

puiſqu'elle eſt en raiſon directe du poids comprimant & en raiſon réciproque de la chaleur. Subſtituant cette valeur dans les équations du §. précédent on a

$$\frac{yC}{Yc}.P\,dx + v\,dx = -\,dy$$

&

$$\frac{yC}{Yc}.\theta P + \theta v = e^{-x:t}.Y$$

ou bien

$$\theta v + \frac{\theta CP}{c}.e^{-x:t} = Y.e^{-x:t}$$

§. 20.

Cette derniere équation donne

$$v = e^{-x:t}.\left(\frac{Y}{\theta} - \frac{CP}{c}\right).$$

Or quelle que ſoit la loi ſuivant laquelle la denſité des vapeurs décroit, il eſt du moins ſûr *qu'elle ne devient pas négative.* Cela fait qu'il faut néceſſairement poſer

$$\frac{Y}{\theta} > \frac{CP}{c}.$$

De là réſulte

$$c > \frac{\theta PC}{Y}$$

ce qui emporte la conſéquence, que *la chaleur en montant ne ſe réduit pas à zéro, mais qu'elle décroît aſymtotiquement, puiſqu'elle ne ſauroit devenir plus petite que* $\theta PC : Y$.

§. 21.

J'ai fait voir dans le Mémoire *ſur la viteſſe du ſon*, que vers la ſurface de la mer la denſité V eſt environ la moitié de la denſité P,

ou

ou bien le tiers de la densité de l'air naturel, qui se trouve être en général

$$= -\frac{dY}{dx} = \frac{Ye^{-x:\theta}}{\theta}$$

& par conséquent à la surface de la mer $= \frac{Y}{\theta}$. Nous aurons donc

$$2V = P$$

$$3V = \frac{Y}{\theta}$$

ou bien

$$Y = \tfrac{3}{2}\theta P = 3\theta V.$$

Substituant cette valeur de P & de Y dans l'expression

$$c > \frac{\theta P}{Y}.C$$

elle donne

$$c > \tfrac{2}{3}C$$

de sorte que *même au haut de l'atmosphere la chaleur ne laisse pas d'être encore environ les deux tiers de celle qui a lieu à la surface de la mer.* Mais comme cette évaluation pourroit être trop particuliere, je poserai plus généralement

$$\theta P = \mu Y$$

d'où résulte

$$\theta V = (1 - \mu)Y.$$

§. 22.

Substituant ces valeurs dans l'équation

$$v = e^{-x:\theta}\left(\frac{Y}{\theta} - \frac{CP}{c}\right)$$

on a

$$v = \frac{V}{1-\mu}\left(1 - \frac{\mu C}{c}\right)e^{-x:\theta}$$

d'où l'on déduit

$$c > \mu C.$$

§. 23.

Voilà donc ce qui découle généralement parlant de la ſuppoſition, que la courbe des hauteurs barométriques eſt logarithmique dans toute la rigueur poſſible. Comme il ne s'en faut pas de beaucoup, ces concluſions ne laiſſent pas d'être fort approchantes de celles qu'on déduiroit de la véritable nature de cette courbe. Voyons maintenant de quelle maniere on pourra enviſager la loi ſuivant laquelle la chaleur décroît en montant.

§. 24.

Avant toute choſe il s'agit de ſavoir d'où vient que la chaleur monte. Ici je ne ſai d'autre raiſon ſinon que le feu eſt ſpécifiquement plus léger que l'air. En conſéquence les particules de feu doivent monter avec une viteſſe accélérée, la viteſſe initiale étant celle avec laquelle elles s'élancent par leur propre élaſticité. La force accélératrice eſt cette même légéreté ſpécifique. Il eſt difficile de la bien déterminer. Cependant dans l'air je ne balance pas à la ſuppoſer proportionelle à la denſité de l'air. Il eſt poſſible que l'air, tandis qu'il fait monter les particules de feu par ſa preſſion, oppoſe d'un autre côté quelque obſtacle à leur viteſſe. Car il eſt ſûr que la chaleur monte incomparablement moins vite dans l'eau que dans l'air, quoique dans l'eau la légéreté ſpécifique des particules du feu ſoit pluſieurs centaines de fois plus grande, & qu'ainſi elles puſſent y monter avec incomparablement plus de viteſſe. Il faut donc que la denſité de l'eau y mette obſtacle à beaucoup plus forte raiſon, puiſque les particules de feu, quoique ſollicitées avec plus de force, y montent avec bien moins de viteſſe qu'elles ne montent dans l'air, où la force accélératrice eſt beaucoup moins grande. Il faut, réciproquement, que l'air ne s'oppoſe que très peu à leur viteſſe. La viteſſe initiale avec laquelle elles s'élancent ne peut être que très grande, & ſi l'air y mettroit fortement obſtacle, cette viteſſe, au lieu de s'accroître en montant, iroit en diminuant. Ces particules ſeroient donc plus denſes au haut de l'atmoſphere qu'elles ne le ſont à la ſurface de la mer. Or la denſité de ces particules étant la meſure de la chaleur, les parties ſupérieures de l'air ſeroient plus échauffées que les inférieures, ce qui eſt tout à fait contraire à l'expérience.

§. 25.

Je ſuppoſerai donc ſimplement, que la force accélératrice décroit en même raiſon que la denſité p. Soit u la viteſſe des particules de feu à la hauteur x, & U celle qu'elles ont à la ſurface de la mer. Nous aurons l'équation

$$2u\mathrm{d}u = p\mathrm{d}x.$$

Or u eſt en raiſon réciproque de la chaleur, donc

$$u = \frac{CU}{c}.$$

De plus nous avons

$$p = \frac{CP}{c} \cdot e^{-x:\theta}.$$

Subſtituant ces valeurs, l'équation différentielle ſe change en

$$-\frac{2U^2C\mathrm{d}c}{cc} = P \cdot e^{-x:\theta}\mathrm{d}x$$

d'où l'on tire

$$\frac{2U^2C}{c} = -\theta P e^{-x:\theta} + \text{Conſt.}$$

c'eſt à dire

$$\frac{C}{c} - 1 = \frac{\theta P}{2U^2}(1 - e^{-x:\theta})$$

équation pour laquelle je poſerai ſimplement

$$\frac{C}{c} - 1 = n(1 - e^{-x:\theta}).$$

Et il s'agit de déterminer le coëfficient n.

§. 26.

Pour cet effet je ſubſtitue cette valeur de $\frac{C}{c}$ dans l'équation

$$p = \frac{C}{c} \cdot P \cdot e^{-x:\theta}$$

& elle ſe transforme en

$$\frac{p}{P} = (1 + n - ne^{-x:\theta}) \cdot e^{-x:\theta}$$

ce qui donne

$$-\frac{dp}{p} = \frac{(1+n)}{\theta}e^{-x:\theta}dx - \frac{2n}{\theta}\cdot e^{-2x:\theta}dx.$$

§. 27.

Or j'ai fait voir ci-dessus (§. 13.) que le décroissement de la densité $-\frac{dp}{p}$ à la surface de la mer ne fait que les $\frac{7}{12}$ parties du décroissement des hauteurs barométriques $-dy:Y$, de sorte que

$$\frac{dp}{p} = \frac{7}{12}\cdot\frac{dy}{Y}.$$

Mais à la surface de la mer, où $x = 0$, nous avons

$$-\frac{dp}{p} = \frac{1-n}{\theta}\,dx$$

$$-\frac{dy}{Y} = \frac{1}{\theta}.$$

Substituant ces valeurs on trouve

$$1 - n = \frac{7}{12}$$

$$n = \frac{5}{12}$$

& par conséquent

$$\frac{C}{c} = \frac{17}{12} - \frac{5}{12}\cdot e^{-x:\theta}$$

$$\frac{p}{P} = \left(\frac{17}{12} - \frac{5}{12}e^{-x:\theta}\right)\cdot e^{-x:\theta}$$

& en posant $\mu = \frac{2}{3}$ (§. 21.)

$$\frac{v}{V} = \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}e^{-x:\theta}\right)e^{-x:\theta}$$

de sorte que voilà le décroissement de la chaleur, de la densité de l'air pur & de la densité des vapeurs déterminé, du moins à très peu près.

§. 28.

Il nous reste encore un autre moyen de parvenir au même but. Nous avons trouvé ci-dessus (§. 22.) l'équation

$$v = \frac{V}{1-\mu}\left(1 - \frac{\mu C}{c}\right)e^{-x:\theta}.$$

En y ſubſtituant la valeur (§. 25.)

$$\frac{C}{c} = 1 + n - ne^{-x:t}$$

nous aurons

$$v = \frac{V}{1-\mu}(1 - (1 + n)\mu + \mu n e^{-x:t}) e^{-x:t}.$$

Or ſuivant ce que j'ai remarqué au §. 6. la denſité des vapeurs approche beaucoup plus vite de zéro que la denſité de l'air pur, ou le poids de l'air. Cela exige qu'on faſſe

$$1 - (1 + n)\mu = 0.$$

Car ſi on faiſoit $1 - (1 + n)\mu > 0$, la denſité des vapeurs, ſurtout au haut de l'atmoſphere, décroitroit en même raiſon que le poids de l'air. Et ſi on faiſoit $1 - (1 - n)\mu < 0$ ou négative, la denſité de l'air au haut de l'atmoſphere deviendroit négative, ce qui ſeroit abſurde. Nous aurons donc

$$1 = (1 + n)\mu.$$

De cette maniere ces deux coëfficiens n, m ſe déterminent mutuellement, en ce que

$$\mu = \frac{1}{n+1}$$

ou réciproquement

$$n = \frac{1}{\mu} - 1.$$

De là nous tirerons le moyen de voir ſi les valeurs

$$\mu = \frac{2}{3}$$
$$n = \frac{5}{12}$$

s'accordent, du moins à très peu près. Nous avons déduit la premiere de la viteſſe du ſon, & la ſeconde des réfractions, & par conſéquent chacune a été trouvée indépendamment de l'autre. Subſtituant donc $n = \frac{5}{12}$ dans l'équation

$$\mu = \frac{1}{1+n}$$

nous aurons

$$\mu = \frac{12}{17}$$

ce qui ne differe de $\mu = \frac{2}{3}$ que de $\frac{12}{17} - \frac{2}{3} = \frac{2}{51}$. Cette différence eſt aſſez petite pour pouvoir être réputée $= 0$. Car les données, dont les valeurs de μ, n ont été déduites, ne ſont gueres plus exactes.

§. 29.

Or en faiſant

$$1 - (1 + n)\mu = 0$$

la formule

$$v = \frac{V}{1 - \mu}(1 - (1 + n)\mu - n\mu e^{-x:l})\, e^{-x:l}$$

ſe change en

$$v = V \cdot e^{-2x:l}$$

ce qui revient à

$$\frac{v}{V} = \left(\frac{y}{Y}\right)^2$$

de ſorte que *la denſité des vapeurs décroît comme le quarré du poids de l'atmoſphere*, *ou bien comme le quarré de l'élaſticité de l'air*, l'élaſticité étant toujours en raiſon du poids comprimant.

§. 30.

Cette conſéquence paroit être aſſez vraie par elle-même. Elle eſt d'ailleurs aſſez remarquable pour que je m'y arrête un peu d'avantage. L'élaſticité dépend de la denſité & de la chaleur. Conſidérons d'abord l'effet de chacune de ces cauſes ſéparément. En ſuppoſant la chaleur conſtante, l'élaſticité eſt proportionelle à la denſité. Concevons donc un volume d'air naturel. Que l'eſpace s'élargiſſe du double, la denſité & l'élaſticité ſeront réduites à la moitié. Dans l'eſpace $= 1$, il n'y aura plus que la moitié des vapeurs, comme il n'y a plus que la moitié de l'air pur. Cette moitié de l'air pur avant l'expanſion faite, ſupportoit cette moitié de vapeurs. Mais après l'expanſion ſa force eſt réduite à la moitié. Il eſt naturel qu'il ne

porte plus que la moitié de cette moitié, c'eſt à dire le quart des vapeurs. L'autre quart tombera au fond, & la denſité des vapeurs ſera réduite à ſa quatrieme partie. Si l'expanſion ſe fait par un eſpace $= n$, la denſité des vapeurs ſera réduite à ſa $\frac{1}{n}^{me}$ partie, c'eſt à dire que dans l'eſpace primitif il n'y aura plus que la n^{me} partie d'air pur. Cette n^{me} partie d'air pur portoit la $\frac{1}{n}^{me}$ partie des vapeurs. Mais après l'expanſion faite l'élaſticité eſt pareillement réduite à ſa $\frac{1}{n}^{me}$ partie. Donc l'air qui reſte dans l'eſpace $= 1$ ne porte plus que la $\frac{1}{nn}^{me}$ partie des vapeurs; donc la denſité de l'air diminuant comme 1 à $\frac{1}{n}$, la denſité des vapeurs qu'il peut porter diminue comme 1 à $\frac{1}{nn}$.

§. 31.

Il n'en eſt pas de même lorſque l'air ſe dilate par la chaleur, le poids comprimant reſtant le même. Car ſi la dilatation ſe fait par un eſpace $= n$, il eſt bien ſûr que la denſité de l'air pur auſſi bien que celle des vapeurs ſe réduit à ſa $\frac{1}{n}^{me}$ partie. Mais l'élaſticité reſte la même. Donc la $\frac{1}{n}^{me}$ partie de l'air pur continuera de porter la $\frac{1}{n}^{me}$ partie des vapeurs comme auparavant. Auſſi des expériences faciles à faire montrent que dans ce cas il ne ſe voit point de vapeurs, comme on en voit dans le cas de l'évacuation de l'air. Qu'on faſſe entrer dans un long tuyau de thermometre une petite colonne de vif argent juſques bien près de la boule, ce qui peut ſe faire avec un fil de fer deux fois plus mince que le canal du tuyau. Qu'on chauffe la boule au feu pour que l'air ſe dilate, ſi l'on veut, juſqu'au double. On ne verra point de vapeur, ni lorſque l'air ſe dilate, ni lorſqu'enſuite on le laiſſe refroidir. Si au contraire on avoit dilaté l'air au moyen de la machine pneumatique, les vapeurs auroient été très viſibles & ſeroient tombées au fond.

§. 32.

Si en dilatant l'air par la chaleur on le retient dans le même état de compreſſion, comme cela ſe fait dans la machine de *Papin*, cet air peut devenir plus élaſtique du quadruple & au-delà. Il portera donc quatre fois plus & même davantage de vapeurs qu'il ne portoit ou qu'il ne pouvoit porter avant l'échauffement. Tout ce ſurplus de vapeurs retombe au fond lorſqu'on laiſſe refroidir le vaſe.

§. 33.

Du reſte il faut remarquer que dans ces raiſonnemens on fait la ſuppoſition, que l'air eſt chargé de vapeurs autant qu'il peut l'être naturellement. Cela demande quelque éclairciſſement. D'abord il eſt certain que l'air n'eſt pas toujours également chargé de particules aqueuſes. Mais il eſt certain auſſi que dès qu'il en porte moins qu'il ne peut naturellement porter ou qu'il ne porte dans ſon état moyen, il ne tarde pas de s'en procurer. On ſait que dans un air ſec le deſſéchement ſe fait bien vite, tandis que dans un air humide le deſſéchement eſt ou nul ou même négatif. C'eſt ainſi que vers l'hyver l'humidité s'attache à tout ce qu'on expoſe au plein air. Enſuite il faut obſerver que l'air peut être extremement chargé de particules aqueuſes, ſans qu'il paroiſſe être fort humide. Car pour qu'il ne paroiſſe pas humide il ſuffit que les particules aqueuſes ne s'attachent pas aux corps, & qu'au lieu d'être dans l'air en forme de petites gouttes ou véſicules, elles y ſoient ſimplement en forme de particules aqueuſes, iſolées, élaſtiques &c. C'eſt ainſi que quelquefois l'air devient humide comme dans un inſtant & dans un tems fort calme. L'humidité ne vient pas de fort loin. Il ſuffit que les particules aqueuſes qui juſques là étoient iſolées s'approchent les unes des autres, pour former de petites maſſes, qui s'attachent facilement aux corps. Il ſuit de là que la denſité des particules aqueuſes qui nagent dans l'air ne doit pas être eſtimée d'après l'humidité entant qu'elle eſt ſenſible, c'eſt à dire entant qu'elle s'attache aux corps.

§. 34.

Si donc nous établiſſons que dans l'état moyen de l'atmoſphere la denſité des vapeurs eſt en raiſon du quarré de ſon élaſticité, nous pourrons

maintenant

maintenant reprendre le calcul pour voir quelle ſera la nature de la courbe des hauteurs barométriques. Juſqu'ici nous l'avons regardée comme étant logarithmique, & la denſité des vapeurs proportionelle au quarré de l'élaſticité en a été une conſéquence. En retournant donc la queſtion on peut prévoir que la courbe des hauteurs barométriques ne ſera pas fort différente d'une logarithmique.

§. 35.

Voici les équations qu'il s'agit de réſoudre

I°. $\frac{v}{V} = \frac{y^2}{Y^2}$ (§. 29.)

II°. $2u\,du = p\,dx$ (§. 25.)

III°. $u = \frac{CU}{c}$ (§. 25.)

IV°. $p = \frac{CPy}{cY}$ (§. 19.)

V°. $p\,dx + v\,dx = -\,dy$ (§. 18.)

La 2, 3, & 4[me] de ces équations donnent

$$-\frac{2C^2U^2dc}{c^3} = p\,dx = \frac{CPy\,dx}{cY}$$

d'où réſulte d'abord

$$-\frac{2CU^2dc}{cc} = \frac{P}{Y}\cdot y\,dx$$

ou bien

$$dx = -\frac{2CYU^2dc}{Pccy}$$

donc moyennant la premiere équation

$$v\,dx = \frac{Vy^2}{Y^2}\cdot dx = -\frac{2CVU^2y\,dc}{PYcc}.$$

Et puiſque

$$p\,dx = -\frac{2C^2U^2dc}{c^3}$$

nous aurons moyennant la cinquieme équation

$$p\,dx + v\,dx = -\,dy = -\frac{2C^2U^2dc}{c^3} - \frac{2CVU^2y\,dc}{PYcc}.$$

Posons pour plus de briéveté

$$\frac{2VU^2}{PY} = \lambda$$

nous aurons

$$2U^2 = \frac{\lambda PY}{V}$$

& en substituant ces valeurs, nous obtiendrons

$$dy = \frac{C^2\lambda PY}{V}\cdot\frac{dc}{c^3} + \frac{C\lambda v\,dc}{cc}$$

dont l'intégrale est

$$\frac{y}{Y} = Ae^{-\lambda C:c} - \frac{CP}{cV} + \frac{P}{\lambda V}$$

ou bien

$$\frac{y}{Y} = Ae^{-\lambda C:c} - \frac{P}{V}\left(\frac{C}{c} - \frac{1}{\lambda}\right).$$

Dans cette équation A est la constante que l'intégration demande, & qui tout comme le coëfficient λ doit être déterminée par les conditions particulieres du probleme.

§. 36.

L'équation entre y & c étant trouvée, on n'a qu'à substituer cette valeur de y dans les équations

$$p = \frac{CPy}{cY}$$

$$v = \frac{y^2V}{Y^2}$$

& les densités p, v seront également déterminées par c, savoir

$$\frac{p}{P} = \frac{CA}{c}\cdot e^{-\lambda C:c} - \frac{PC}{Vc}\left(\frac{C}{c} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\frac{v}{V} = \left[Ae^{-\lambda C:c} - \frac{P}{V}\left(\frac{C}{c} - \frac{1}{\lambda}\right)\right]^2.$$

§. 37.

Mais pour trouver le rapport de ces ordonnées c, p, v, y aux abſciſſes, il faudra avoir recours à l'équation

$$-\frac{CU^2 dc}{cc} = \frac{py}{Y} dx$$

en y ſubſtituant la valeur de y, que nous venons de trouver. Par là nous aurons

$$-\frac{CU^2 dc}{cc} = \left[Ae^{-\lambda C:c} - \left(\frac{C}{c} - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{P}{V}\right] P dx,$$

ou puiſque

$$U^2 = \frac{\lambda PY}{V}$$

$$-\frac{C\lambda Y dc}{Vcc} = \left[Ae^{-\lambda C:c} - \left(\frac{C}{c} - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{P}{V}\right] . dx.$$

Dans cette équation les variables ſont ſéparées, mais elle n'en eſt pas plus intégrable. On peut l'abréger encore en faiſant

$$\frac{C}{c} - \frac{1}{\lambda} = \varkappa.$$

Car par là elle devient

$$\frac{\lambda Y}{V} . d\varkappa = \left(A . e^{-1 - \lambda\varkappa} - \frac{\varkappa P}{V}\right) dx$$

ou bien

$$\frac{V}{\lambda Y} . dx = \frac{e^{\lambda\varkappa} d\varkappa}{Ae^{-1} - \frac{P}{V} \varkappa e^{\lambda\varkappa}}.$$

Mais il faudra toujours avoir recours aux ſuites infinies.

§. 38.

Je vais donc reprendre les deux équations

$$-\frac{2CU^2 dc}{cc} = \frac{P}{Y} . y dx$$

$$\frac{y}{Y} = Ae^{-\lambda C:c} - \frac{P}{V}\left(\frac{C}{c} - \frac{1}{\lambda}\right).$$

Subſtituant dans la premiere la valeur

$$2U^2 = \frac{\lambda P Y}{V}$$

elle ſe change en

$$-\frac{\lambda Y^2 C}{V} \cdot \frac{dc}{cc} = y\,dx$$

d'où l'on a

$$\int y\,dx = \frac{\lambda Y^2}{V}\left(\frac{C}{c} - \text{Conſt.}B\right).$$

Or quand $x = 0$, on a $\int y\,dx = 0$, $C = c$, donc il faut faire $B = 1$, & par conſéquent

$$\int y\,dx = \frac{\lambda Y^2}{V}\left(\frac{C}{c} - 1\right)$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\lambda C}{c} = \frac{V}{Y^2}\int y\,dx + \lambda.$$

Cette valeur étant ſubſtituée dans la ſeconde équation

$$\frac{y}{Y} = Ae^{-\lambda C : c} - \frac{P}{V}\left(\frac{C}{c} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

donne

$$\frac{y}{Y} = A \cdot e^{-V\int y\,dx : YY - \lambda} - \frac{P}{\lambda YY}\int y\,dx - \frac{P}{V}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right).$$

Or pour $x = 0$, on a $\int y\,dx = 0$, $y = Y$, ce qui donne

$$1 = Ae^{-\lambda} - \frac{P}{V}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)$$

& par conſéquent

$$\frac{y}{Y} = \left(1 + \frac{P}{V} - \frac{P}{\lambda V}\right)e^{-V\int y\,dx : YY} - \frac{P}{\lambda YY}\int y\,dx - \frac{P}{V} + \frac{P}{\lambda V}.$$

Cette équation nous ſervira à faire voir que y décroît à très peu près en même raiſon que $\int y\,dx$.

§. 39.

Pour cet effet nous poſerons $Y = P + V$, & nous avons vu ci-deſſus (§. 21.) que $P = 2V$. Prenant donc l'équation (§. 35.)

$$\frac{y}{Y} = Ae^{-\lambda C:c} - \frac{P}{V}\left(\frac{C}{c} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

& en y ſubſtituant la valeur (§. 37.)

$$A = e^{\lambda} + e^{\lambda}.\frac{P}{V}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)$$

elle ſe transforme en

$$\frac{y}{Y} = \left(1 + \frac{P}{V} - \frac{P}{\lambda V}\right)e^{\lambda(1 - C:c)} - \frac{P}{V}\left(\frac{C}{c} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

ou bien

$$\frac{y}{Y} = \left(3 - \frac{2}{\lambda}\right)e^{\lambda\left(1 - \frac{C}{c}\right)} - \frac{2C}{c} + \frac{2}{\lambda}.$$

Or ſuivant ce que nous avons trouvé ci-deſſus, la chaleur au haut de l'atmoſphere n'eſt environ que les $\frac{3}{4}$ de celle qui a lieu près de la ſurface de la mer. Faiſant donc pour ce cas

$$y = 0, \qquad \frac{c}{C} = \frac{3}{4}$$

nous aurons

$$0 = \left(3 - \frac{2}{\lambda}\right)e^{-\lambda:3} - \frac{8}{3} + \frac{2}{\lambda}$$

ce qui donne

$$\lambda = 1,062.$$

Par là l'équation trouvée au §. 38. devient numérique & on a

$$\frac{y}{Y} = 1,117 . e^{-\frac{1}{3}\int y\, dx} - 0,117 - 0,628 . \int y\, dx.$$

Je vais maintenant la conſtruire.

§. 40.

Soit dans la troiſieme Figure $AE = 0,117$, $AC = 1,117$, CD une logarithmique, dont l'aſymtote ſoit AB, la ſoutangente $= 3$. Soit enfin tang $GEH = 0,628$, & pour une abſciſſe quelconque

$$AP = EQ = \int y\, dx$$

on aura l'ordonnée

$$y = MN.$$

Car

$$PN = 1,117 \cdot e^{-\frac{1}{\lambda}\int y\,dx}$$
$$PQ = 0,117$$
$$QM = 0,628 \cdot \int y\,dx.$$

Donc

$$y = PN - PQ - QM = MN.$$

On voit par là que $y = MN$ devient $= 0$ dans le point G. Abaissant de ce point l'ordonnée GF, on trouve que $AF = EH = \lambda$ $= 1,062$. Car pour $y = 0$ nous aurons $\frac{C}{c} = \frac{4}{3}$, & l'équation (§. 38.)

$$\frac{\lambda C}{c} = \frac{V}{y^2} \cdot \int y\,dx + \lambda$$

se change en

$$\lambda = \int y\,dx$$

d'où il suit que

$$\lambda = AF = EH = 1,062.$$

Comme donc cette abscisse AF est à peine le tiers de la soutangente, la courbure CG est fort petite. Or si elle étoit nulle on auroit

$$\frac{y}{Y} = NM = \frac{CF \cdot FP}{AF} = \frac{\lambda - \int y\,dx}{\lambda}$$

d'où résulteroit

$$\frac{dy}{Y} = -\frac{y\,dx}{\lambda}$$
$$\frac{x}{\lambda} = \log \frac{Y}{y}$$

de sorte qu'à la petite différence près qu'il y a entre la droite CG & la logarithmique CNG, la courbe des hauteurs barométriques est logarithmique. Je continuerai de la prendre pour telle, en retournant aux formules trouvées ci-dessus.

§. 41.

Ces formules sont

$$\frac{y}{Y} = e^{-x:\theta}$$

$$\frac{v}{V} = \frac{1}{1-\mu}\left(1 - \frac{\mu C}{c}\right)e^{-x:\theta}$$

$$\frac{C}{c} = 1 + n - ne^{-x:\theta}$$

$$\frac{p}{P} = \frac{C}{c}.e^{-x:\theta} = (1 + n - ne^{-x:\theta}).e^{-x:\theta}$$

$$n = \frac{1}{\mu} - 1$$

d'où résulte

$$\frac{v}{V} = \left(\frac{y}{Y}\right)^2 = e^{-2x:\theta}$$

$$\frac{C}{c} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{\mu} - 1\right)e^{-x:\theta}$$

$$\frac{p}{P} = \left(\frac{1}{\mu} - \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)e^{-x:\theta}\right)e^{-x:\theta}$$

§. 42.

En faisant (§. 28.) $n = \frac{5}{12}$, $\mu = \frac{12}{17}$, & en posant la densité de l'air naturel au niveau de la mer $= 1$, de sorte que $P = \frac{12}{17}$, $V = \frac{5}{17}$, nous aurons

$$\frac{C}{c} = \frac{17}{12} - \frac{5}{12}e^{-x:\theta}$$

$$p = (\tfrac{17}{12} - \tfrac{5}{12}e^{-x:\theta}).e^{-x:\theta}.P = (1 - \tfrac{5}{17}e^{-x:\theta})e^{-x:\theta}$$

$$v = V.e^{-2x:\theta} = \tfrac{5}{17}.e^{-2x:\theta}$$

d'où l'on déduit

$$\int y\,\mathrm{d}x = \frac{V\theta}{2}(1 - e^{-x:\theta};$$

& puisque $V\theta = \frac{5}{17}Y$, on aura le poids de toute la masse des vapeurs $= \frac{5}{34}Y$, ce qui revient à $\frac{5}{34}.28 = 4\frac{2}{17}$ pouces de mercure. En fai-

fant θ = 4200 toifes, ce qui répond à une température moyenne de l'air, ces formules nous donnent la Table fuivante, d'après laquelle la Figure eft conftruite.

$\frac{x}{\theta}$	$\frac{y}{Y}$	$\frac{v}{V}$	$\frac{p}{P}$	$\frac{c}{C}$	p	v	x toifes
0, 0	1, 0000	1, 0000	1, 0000	1, 0000	0, 7059	0, 2941	0
0, 1	0, 9048	0, 8187	0, 9485	0, 9618	0, 6640	0, 2408	420
0, 2	0, 8187	0, 6703	0, 8805	0, 9298	0, 6216	0, 1971	840
0, 3	0, 7408	0, 5488	0, 8208	0, 9025	0, 5794	0, 1614	1260
0, 4	0, 6703	0, 4493	0, 7624	0, 8792	0, 5382	0, 1321	1680
0, 5	0, 6065	0, 3679	0, 7059	0, 8591	0, 4983	0, 1082	2100
0, 6	0, 5488	0, 3013	0, 6520	0, 8410	0, 4602	0, 0886	2520
0, 8	0, 4493	0, 2019	0, 5525	0, 8134	0, 3900	0, 0593	3360
1, 0	0, 3679	0, 1353	0, 4648	0, 7915	0, 3281	0, 0398	4200
1, 5	0, 2231	0, 0498	0, 2952	0, 7555	0, 2084	0, 0147	6300
2, 0	0, 1353	0, 0183	0, 1841	0, 7351	0, 1299	0, 0054	8400

§. 43.

La colonne $c : C$ marque le rapport qu'il y a entre les degrés de chaleur répondans à différentes hauteurs. J'ai trouvé par diverfes expériences qu'un degré du thermometre de Réaumur équivaut à 0, 0046 de ces parties. Comme donc à la hauteur de 2520 toifes, cette Table donne $\frac{c}{C}$ = 0, 8410, la chaleur y eft de 1, 0000 — 0, 8410 = 0, 1590 parties moins grande qu'à la mer. Divifant ces 0, 1590 parties par 0, 0046, on obtient $34\frac{1}{2}$ degrés de Réaumur. Ce calcul répond affez aux obfervations faites au Pérou. Car la chaleur à la mer, & nommément la plus grande, y a été obfervée de 29 degrés. Souftrayant de ces 29 degrés les $34\frac{1}{2}$ que nous venons de trouver, nous aurons $5\frac{1}{2}$ degrés au deffous du terme de la glace, pour le moindre froid qui ait lieu à la hauteur de 2520 toifes au-deffus de la mer. Cette hauteur eft de 100 toifes au-deffus du terme de la neige permanente, où la neige dans des chaleurs même extraordinaires ne fond plus, & où par conféquent le thermometre doit déjà être de quelques degrés au-deffous du terme de la congélation.

A cent toises au-dessus il est naturel qu'il soit encore de quelques degrés plus bas.

§. 44.

Comme à la surface de la mer les quantités C, P, V, Y sont assez variables, il s'ensuit que cette Table ne répond qu'à un certain état de l'atmosphere. Un thermometre à air, qui en marque les dilatations en milliemes parties du volume ou de la densité de l'air tempéré, & dont j'ai observé les variations pendant quelques années, m'a fait voir que sa variation annuelle pouvoit aller de 930 degrés jusqu'à 1070. La différence est de 140 degrés, & elle équivaut à 35 degrés du thermometre de Réaumur, que j'ai observé en même tems. Je dois remarquer à cet égard que l'air dans ce thermometre soutenoit une colonne de mercure égale à son élasticité, & que dans ces cas il se dilate un peu moins que dans les cas où il peut se dilater plus librement, puisqu'alors un degré de Réaumur répond à 0,0046 degrés de dilatation, ce qui au lieu des 140 degrés mentionnés donne 161 degrés. Quoi qu'il en soit de ces variations, les coëfficiens n, λ employés dans les calculs précédens paroissent devoir être les mêmes dans tous les cas, à moins que l'élasticité des particules de feu ne soit variable.

§. 45.

Quant à la densité des vapeurs nous avons trouvé ci-dessus (§. 29.) qu'elle est en raison doublée de l'élasticité ou du poids de l'air. Mais cette loi ne regarde directement que la façon dont les vapeurs se distribuent suivant les différentes élévations. Cependant nous avons fait voir que l'élasticité de l'air est toujours la mesure pour la quantité des vapeurs qu'il peut soutenir dans ses interstices, & qu'il en absorbe jusqu'à ce point de saturité, si son élasticité n'est point diminuée par quelque cause accidentelle. Faisant donc abstraction de ces causes qui souvent ne sont que journalieres, & considérant les choses comme dans leur état de permanence naturel, il semble que même au niveau de la mer il faut poser V proportionelle au quarré de l'élasticité de l'air, ou au quarré de son poids. Voyons d'abord ce qui en résulte.

§. 46.

Exprimons par l'unité le poids de l'atmoſphere au niveau de la mer, de même que ſa chaleur, dans un certain état moyen. Soit dans cet état moyen la ſoutangente $\theta = 1$, la denſité de l'air pur $= \mu$, celle des vapeurs $= 1 - \mu$, celle de l'air naturel $= 1$. Ce qui étant poſé, les lettres Y, C, θ ne ſeront que les rapports du poids & de la chaleur de l'air à ces unités pour un autre état quelconque de l'atmoſphere. Par les mêmes raiſons je poſerai la denſité de l'air pur $= P\mu$, celle des vapeurs $= V(1 - \mu)$, & les lettres P, V ſeront de ſimples rapports. Nous aurons donc

$$\theta(P\mu + (1 - \mu)V) = Y$$

$$P\mu = \frac{\mu . Y}{C}$$

$$(1 - \mu)V = (1 - \mu)Y^2$$

donc

$$\frac{\theta\mu Y}{C} + \theta(1 - \mu)Y^2 = Y$$

ou bien

$$\theta\mu + \theta(1 - \mu)CY = C$$

ce qui donne

$$\theta = \frac{C}{\mu + (1 - \mu)CY}.$$

Cette formule peut être examinée par des expériences, puiſque θ eſt en raiſon réciproque de la différence entre les hauteurs barométriques de deux endroits qui ſont à différentes élévations au-deſſus du niveau de la mer. Si cette différence varie de façon qu'elle ſuive toujours le rapport

$$\frac{\mu}{C} + (1 - \mu)Y$$

la poſition $V = Y^2$ ſera par là confirmée, & on déterminera encore la valeur de μ. Mais ces expériences doivent être arrangées & faites avec beaucoup de ſoin, & la maniere dont on en fait l'application n'eſt pas indifférente, puiſqu'il faut avoir égard à tout ce qui ne dérive que de quelque cauſe accidentelle.

§. 47.

En ſubſtituant la valeur

$$\theta = \frac{C}{\mu + (1 - \mu) CY}$$

dans la premiere équation

$$\theta(P\mu + (1 - \mu) V) = Y$$

on obtient

$$\frac{Y}{C} = \frac{P\mu + (1 - \mu) V}{\mu + (1 - \mu) CY}$$

d'où il ſuit que ſi Y, C reſtent les mêmes, P ne ſauroit augmenter à moins que V ne diminue, & réciproquement, ſi V augmente il faut que P diminue. Cela ne ſauroit avoir lieu que par des cauſes accidentelles & de peu de durée. Car ſi la denſité de l'air pur augmente, il peut abſorber plus de vapeurs & il les abſorbera à moins qu'il ne ſurvienne quelque cauſe externe. Il s'enſuit donc que pour un poids de l'atmoſphere donné & pour un degré de chaleur donné, l'état de permanence ne ſauroit avoir lieu, à moins que la denſité de l'air pur n'ait à la denſité des vapeurs un rapport déterminé. Je ne vois rien dans cette conſéquence qui puiſſe renverſer la poſition $V = Y^2$, ne l'ayant admiſe que pour ces ſortes d'états de permanence. Si le barometre monte ou deſcend beaucoup en peu de tems, ces variations ſubites indiquent toujours un équilibre levé & un état plus ou moins anomal de l'atmoſphere. Ce ſont auſſi les cas où la courbe des hauteurs barométriques peut différer & même aſſez irrégulierement d'une logarithmique. Il eſt clair que dans ces cas les formules données ci-deſſus ceſſent d'être applicables, puiſqu'elles ne déterminent l'état de l'atmoſphere que lorſqu'il eſt tel que les loix générales de l'élaſticité, de la diſtribution des vapeurs & de la chaleur l'exigent.

§. 48.

La viteſſe du ſon dépend de la valeur θ & de la denſité de l'air pur $P\mu = \frac{\mu Y}{C}$. Pour l'exprimer en pieds de Paris j'obſerve que dans 2 ſecondes de tems les corps tombent par un eſpace de 60,384 pieds. En-

ſuite pour l'état moyen de l'air la ſoutangente θ eſt environ de 25200 pieds. Par là nous aurons en général pour le niveau de la mer

$$\theta = \frac{25200 . C}{\mu + (1 - \mu) CY},$$

ou en faiſant $\mu = \frac{12}{17}$ (§. 28.)

$$\theta = \frac{428400 . C}{12 + 5CY}.$$

Cette valeur étant diviſée par $2P\mu = \frac{2\mu Y}{C}$, donne

$$\frac{303450 . CC}{12Y + 5CYY}$$

pour la hauteur due à la viteſſe du ſon. Cette hauteur étant multipliée par 60,384, la racine quarrée du produit exprimera la viteſſe du ſon

$$s = \sqrt{\left(\frac{18313330 CC}{12Y + 5CYY}\right)}.$$

Pour la hauteur moyenne du barometre = 28 pouces, on a $Y = 1$, & pour la température moyenne $C = 1$. Ces valeurs étant ſubſtituées, donnent $s = 1038$. Mais ſi en faiſant $Y = 1$, on fait $C = 1,080$, ce qui eſt pour les grandes chaleurs d'été, on trouve $s = 1108$. Cette viteſſe eſt de 70 pieds plus grande que celle que nous avons trouvée pour l'air tempéré. On la trouvera de 70 pieds plus petite pour les grands froids de l'hyver, où elle ne ſera que de 970 pieds. Poſant $C = 1$, $Y = \frac{29}{28}$, on trouve $s = 1015$, plus petite de 23 pieds que lorſque $Y = 1$. Mais lorſque $Y = \frac{27}{28}$, la viteſſe du ſon ſera de 23 pieds plus grande que pour $Y = 1$. De tout cela il s'enſuit qu'à un degré de Réaumur il répond une accélération de 4 pieds, lorſque la chaleur va en augmentant, & qu'à une ligne du barometre il répond une retardation de 2 pieds par ſeconde: le tout au niveau de la mer, & l'atmoſphere étant dans un état de permanence (§. 49); car les formules données ci-deſſus ne ſont pas pour les anomalies journalieres ou accidentelles.

§. 49.

Comparons ces résultats aux expériences. Mrs. *Cassini*, *Picard*, *Huygens* & *Roemer* en 1677 trouverent que le son dans une seconde de tems parcourut 1097 pieds. C'étoit le 23 Juin, ainsi au milieu de l'été, où le thermometre est à plusieurs degrés au-dessus du tempéré. J'ignore à quel degré il étoit alors & quelle étoit la hauteur du barometre. Mais cela n'empêche pas que je n'infere que la vitesse du son devoit être beaucoup plus grande que la moyenne, qui est d'environ 1040 pieds par seconde. Nous avons vu que cette vitesse va à 1100 & au-delà, lorsque $C = 1,080$ (ce qui revient environ au 28e degré de Réaumur), & $Y = 1$. Si la chaleur avoit été moins grande, il faudroit rabattre de ces 1100 pieds, & si le barometre étoit au-dessous de 28 pouces (ce qui est très possible, sa hauteur moyenne à Paris n'étant que d'environ $27\frac{2}{3}$ pouces) la vitesse du son en devoit être plus grande. A Paris le barometre au mois de Juin monte rarement au-dessus de 28″. 2‴. Ces deux lignes au-dessus de 28 pouces réduisent la vitesse moyenne du vent 1038 pieds, à 1034. Soustrayant ces 1034 de 1097, qui est la vitesse observée, & divisant le reste 63 par 4, le quotient, qui est $15\frac{3}{4}$, étant ajouté à 10 degrés, donne $25\frac{3}{4}$ degrés du thermometre de Réaumur. Si donc le 23 Juin 1677 le barometre avoit été à 28″. 2‴ le thermometre devoit être à $25\frac{3}{4}$ au-dessus du terme de congélation. On trouve réciproquement que si le barometre n'avoit été qu'à 27″. 2‴, le thermometre devoit n'être qu'à $19\frac{3}{4}$ degrés au-dessus du terme de la glace. Enfin si le barometre étoit à sa hauteur moyenne de 27″. 8‴, le thermometre devoit être à $22\frac{3}{4}$ degrés. En tout cela il n'y a rien qui ne puisse très bien avoir lieu, & à cet égard la vitesse du vent observée de 1097 pieds au mois de Juin n'a rien qui répugne à nos formules.

§. 50.

Il y a une autre observation faite dans de grandes chaleurs & dans des circonstances moins douteuses. C'est celle de Mr. *de la Condamine* en Cayenne au mois de Février 1740, c'est à dire pendant que le Soleil passe près du zénith de cette ile, & que la chaleur va bien au-delà de 20 ou

24 degrés du thermometre de Réaumur. Le barometre n'y varie que de quelques lignes. C'eſt donc le cas pour lequel nous avons trouvé la viteſſe du ſon égale à 1108 pieds. M. *de la Condamine* la trouva de 1101 pieds.

§. 51.

En 1738 Mrs. *Maraldi*, *de la Caille* & *Caſſini de Thury* firent aux environs de Paris pluſieurs obſervations ſur la viteſſe du ſon, ſurtout rélativement à la viteſſe du vent. Les endroits étoient à très peu près ſitués dans la direction de la méridienne de l'obſervatoire. Ces obſervations furent arrangées en ſorte qu'on pouvoit en même tems meſurer la viteſſe du ſon allant du Midi au Nord, & du Nord au Midi. C'eſt le moyen de connoître l'effet du vent favorable & contraire. Après avoir repaſſé ces obſervations voici la Table que j'en ai déduite.

1738 Mars.	Viteſſe du ſon.		Thermometre.	Barometre à Paris.	Barometre à Nuremberg.	État du Ciel.
	du Nord au Sud.	du Sud au Nord.				
13	1070	—	—	—	26''. $8\frac{4}{10}$'''	Vent du Nord très fort.
14	$1040\frac{1}{2}$	$1040\frac{1}{2}$	—	—	26. $9\frac{6}{10}$	Pluie, calme.
16	1040	1042	—	27. 11	26. $11\frac{3}{10}$	Serein, vent d'Oueſt-Nord-Oueſt.
19	—	1089	+ 6	—	26. $10\frac{5}{10}$	Vent du Sud très fort.
20	1005	1075	—	—	26. $6\frac{7}{10}$	Vent du Sud.
21	—	1036	—	27. $2\frac{1}{4}$.	26. $5\frac{1}{10}$	Vent du Nord foible.
22	—	996	—	—	26. 4	Vent du Nord très fort.
25	1058	1026	—	—	26. $6\frac{1}{2}$	Vent de Nord-Eſt.

Le thermometre pendant ces obſervations, c'eſt à dire entre 9 & 10 heures du ſoir, n'avoit varié que de 4 à 6 degrés au-deſſus du terme de la glace. Le barometre n'étant marqué que le 16 & le 21, j'ai ſuppléé à ce défaut en marquant l'état du barometre obſervé pendant les mêmes jours à Nuremberg par Mr. *Doppelmayer*. La hauteur moyenne du barometre à Nuremberg eſt de 26''. 11''', & les variations ne ſont que les trois quarts de celles du barometre à Paris.

§. 52.

Ce qui réſulte le plus immédiatement de cette Table c'eſt l'influence du vent dans la viteſſe du ſon. Le 20 par ex. le vent contraire réduiſit cette

viteſſe à 1005, & le vent favorable la porta jusqu'à 1075. Je dois cependant remarquer que ces viteſſes ne ſont pas déterminées avec un même degré de préciſion. Celle de 1005 eſt déduite de ce que le ſon employa $17\frac{1}{2}$ ſecondes pour paſſer de Montmartre jusqu'à l'obſervatoire de Paris. On voit bien que ſur $17\frac{1}{2}$ ſecondes $\frac{1}{4}$ de ſeconde de plus ou de moins produit dans la viteſſe du ſon une différence de 15 pieds. Cette incertitude fait que je n'ai garde d'inférer des viteſſes 1005, 1075 la viteſſe $\frac{1005 + 1075}{2} = 1040$, qui ſeroit pour le calme. Je fais également abſtraction des viteſſes obſervées le 13, 19, 21, 22, parce qu'elles ne ſont, pour ainſi dire, qu'*unilatérales*. L'obſervation du 25 Mars differe de toutes les autres en ce que la viteſſe 1026 eſt celle du ſon allant de Montmartin à Dammartin, où on n'avoit point fait d'obſervations les jours précédens. La direction étoit donc vers Nord-Eſt & le vent étoit directement contraire. L'autre viteſſe 1058 eſt celle du ſon allant de Montmartre à Montlehery, c'eſt du Nord au Sud, où le vent n'étoit favorable qu'en partie, c'eſt à dire environ pour la moitié, ou même pas autant. Mais ſuppoſons la moitié, & nommons a la viteſſe du ſon pour le calme, x la viteſſe du vent, nous aurons

$$a - x = 1026$$
$$a + \tfrac{1}{2}x = 1058.$$

Ces équations donnent $x = 21\frac{1}{3}$, $a = 1047\frac{1}{3}$. Cette viteſſe eſt de 9 à 10 pieds plus grande que la viteſſe moyenne 1038, & peut très bien provenir de ce que le barometre étoit de 9 à 10 lignes au-deſſous de 28 pouces, le thermometre étant pareillement de quelques degrés au-deſſous du tempéré. Cependant je n'inſiſterai pas ſur cette ſuppoſition, les données n'étant pas aſſez déterminées. Il ſuffit qu'il en réſulte en général, que la viteſſe du ſon ne pouvoit alors être fort différente de la viteſſe moyenne.

§. 53.

Il reſte donc encore les obſervations du 14 & 16 Mars, où le tems étoit à peu près calme. La viteſſe du ſon ſe trouva alors 1040 jusqu'à

1042 pieds. Le barometre fut le 14 environ 4‴, le 16 une ligne au-dessous de 28 pouces, & le thermometre de quelques degrés au-dessous du tempéré, de sorte que le son ne pouvoit différer que de quelques pieds de sa vitesse moyenne. C'est aussi ce qu'il suffit de conclure généralement de ces observations.

§. 54.

Je ne me rappelle pas que la vitesse du son ait jamais été observée dans les grands froids de l'hyver, où le thermometre descend à 15 & plus de degrés au-dessous du terme de congélation, ou bien à 25 & plus de degrés au-dessous du tempéré. C'est pourtant le cas où la vitesse du son peut être suivant notre théorie de 100 pieds & au-delà plus petite que dans l'air tempéré. Mr. *Bianconi* en 1740 compara la vitesse du son observée au Mois d'Août dans une chaleur de 20 degrés de Réaumur, & au mois de Février 1741, le thermometre étant $1\frac{1}{5}$ degré au-dessous du terme de la glace. Il trouva que le 18 Août 1740 le son employa dans un tems calme 76″ de tems pour parvenir d'un certain couvent jusqu'à Bologne, & que le 6 Février 1741 il y employa $78\frac{1}{2}$″, quoique secondé d'un vent un peu fort. Le barometre fut à une ligne près à une même hauteur. Divisant $78\frac{1}{2}$ par 76 on trouve 1,033, de sorte que sur 1000 pieds la vitesse du vent fut de 33 pieds plus grande le 18 Août 1740 que le 6 Fév. 1741. Elle devoit encore être plus grande, puisque le 6 Février le vent aida le son. Le 12 Février, où le thermometre étoit sur 0, le barometre de 10 lignes plus haut, ou de 28″. 4‴, Mr. *Bianconi* trouva que le son n'employa que 77″ de tems, pendant que l'air étoit calme. C'est une marque que l'air n'étoit pas dans son état d'équilibre.

§. 55.

Quant aux endroits fort élevés au-dessus de la mer il n'y a, que je sache, que la plaine de Quito sur les Cordelieres où on ait fait des observations sur la vitesse du son. Elle s'y trouve être de 1050 pieds ou 175 toises. La hauteur moyenne du barometre est de 20 pouces, $\frac{1}{4}$ ligne, & le thermometre y varie du 8 jusqu'au 18e degré de Réaumur. Il n'y a gueres moyen de rien conclure de ces données. La plaine de *Quito* & les observations

vations qu'on y a faites ſur l'état de l'air, ne peuvent pas être immédiatement comparées à un air également élevé mais fort éloigné des montagnes. Cet air libre ſera plus froid. Voyons d'abord quelle y ſeroit la viteſſe du ſon dans ſa conſtitution moyenne. C'eſt à quoi nous ſervira la formule (§. 42)

$$p = (1 - \tfrac{5}{17} e^{-x:\theta})\, e^{-x:\theta}$$

qui pour une hauteur x quelconque donne la ſoutangente de la courbe des denſités de l'air pur

$$\vartheta = \frac{p\,dx}{dp} = \theta \cdot \frac{17 - 5e^{-x:\theta}}{17 - 10e^{-x:\theta}};$$

or dans le cas dont il s'agit nous avons

$$\frac{y}{Y} = e^{-x:\theta} = \frac{20''.\ 0\tfrac{1}{4}'''}{28''.\ 0} = 0{,}715$$

& en faiſant comme ci-deſſus

$$\theta = 25200 \text{ pieds}$$

ces valeurs étant ſubſtituées donnent

$$\vartheta = 34345,$$

d'où ſuit la viteſſe du ſon

$$s = \sqrt{(30{,}194 \,.\, \vartheta)} = 1018 \text{ pieds.}$$

Cette viteſſe eſt bien plus petite que celle qu'on a obſervée à Quito & qui eſt $= 1050$. Mais auſſi l'air de cette ville eſt beaucoup moins froid que ce calcul ne le ſuppoſe. Car moyennant la formule (§. 42.)

$$\frac{C}{c} = \frac{17 - 15 \,.\, e^{-x:\theta}}{12}$$

on trouve

$$\frac{c}{C} = 0{,}893$$

tandis qu'à Quito le thermometre de Réaumur eſt de 11 degrés plus bas qu'il n'eſt à la ſurface de la mer du Sud, en ſorte qu'on a

$$\frac{c}{C} = \frac{1060}{1110} = 0{,}954.$$

Divisant donc 0,954 par 0,893, on trouve 1,068, ce qui est le rapport dans lequel la soutangente ϑ doit être augmentée. Par là la vitesse du son est augmentée en raison de la racine quarrée de 1,068. Elle sera donc

$$s = 1018\sqrt{1{,}068} = 1052 \text{ pieds}$$

ce qui répond assez à l'observation, qui donne 1050 pieds.

§. 56.

Il sera bon d'examiner par des expériences bien choisies & même souvent répétées tout ce que je viens de dire sur la vitesse du son. Quelque incomplette que soit cette théorie, on voit qu'elle ne laisse pas de concilier les expériences qu'on a faites, du moins autant qu'on en connoit bien les circonstances.

§. 57.

Les réfractions tant astronomiques que terrestres sont un autre point qui ne sera bien discuté que lorsqu'on connoîtra bien les loix de la densité de l'air pur & de ses variations. J'ai fait voir ci-dessus (§. 13.) qu'en montant elle ne décroit pas en même raison que les hauteurs barométriques. Les formules (§. 42.)

$$p = (1 - \tfrac{5}{17}e^{-x:\theta})e^{-x:\theta}$$

$$\frac{y}{Y} = e^{-x:\theta}$$

donnent

$$p = \frac{y}{Y} - \frac{5y^2}{17Y^2}$$

ce qui fait voir que p décroît moins vite que y, surtout près de la surface de la Terre.

§. 58.

En regardant l'équation (§. 42.)

$$\frac{p}{P} = \frac{17 - 5e^{-x:\theta}}{12} \cdot e^{-x:\theta}$$

comme très approchante de la vérité dans l'état moyen de l'atmoſphere, on en déduira ſans peine l'équation différentielle pour les réfractions. Soit γ l'angle de la diſtance au zénith. Que la lumiere en paſſant de la couche $x + dx$ dans la couche x ſoit briſée en ſorte que le rapport des ſinus ſoit $= q + dq : q$, & que $1 + m : 1$ ſoit ce même rapport, lorſque la lumiere paſſe immédiatement du vuide dans l'air tel qu'il eſt au niveau de la ſurface de la mer, on aura pour la réfraction

$$dz = \frac{\sin\gamma \cdot dq}{\sqrt{[1 + 2x + xx - q^2 \sin\gamma^2]}}$$

&

$$\log. q = \frac{17e^{-x:\theta} - 5e^{-2x:\theta}}{12} \cdot m$$

ce qui, en omettant les puiſſances ſupérieures de m, donne

$$dz = \frac{m \sin\gamma \cdot dx}{12\theta}\left[\frac{17e^{-x:\theta} - 10e^{-2x:\theta}}{\sqrt{(\cos\gamma^2 + 2x + xx)}} + \frac{289e^{-2x:\theta} - 255e^{-3x:\theta} + 50e^{-4x:\theta}}{12(\cos\gamma^2 + 2x + xx)^{3:2}} \cdot \sin\gamma^2 \cdot m\right].$$

Dans cette équation le demi-diametre de la Terre eſt $= 1$, la valeur de $m = \frac{1}{3300}$ (§. 11.) & celle de $\theta = 4200$ toiſes $= \frac{1}{808}$ (§. 42.)

§. 59.

S'il ne s'agiſſoit que des réfractions terreſtres, cette formule ſe ſimplifieroit extremement, puiſqu'on pourroit omettre les puiſſances ſupérieures de x, & on auroit

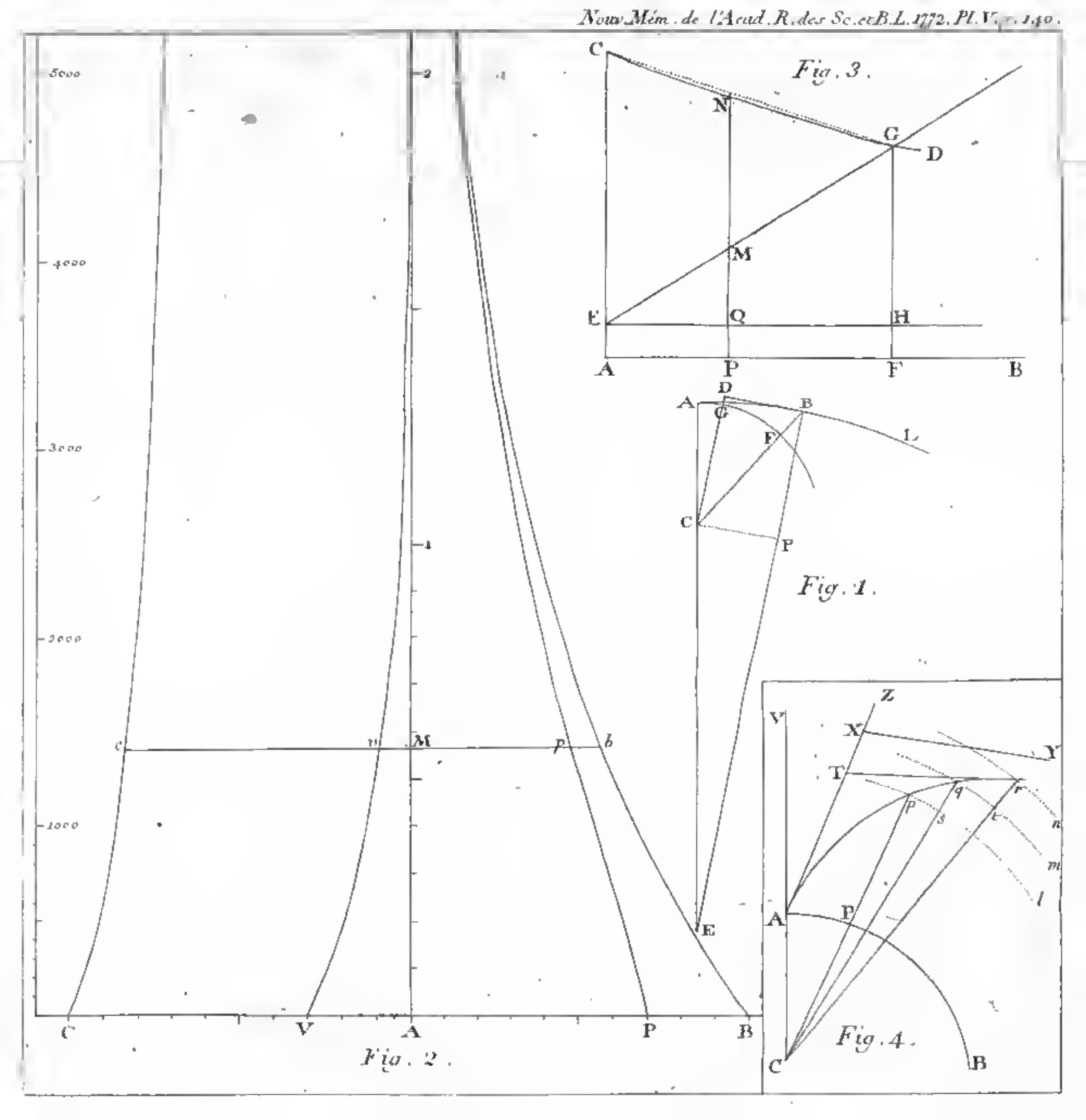
$$z = \frac{1}{7} x \tang\gamma + \frac{1}{23100} x \tang\gamma^3.$$

Cette valeur eſt la ſomme des deux réfractions terreſtres, dont chacune, pour être peu différente de l'autre, eſt la moitié. En omettant le ſecond membre à cauſe de ſa petiteſſe, la formule

$$z = 2\zeta = \tfrac{1}{7} x \tang y$$

fait voir que la réfraction terreſtre ζ eſt la $\frac{1}{14}$ partie de l'angle au centre de la Terre. Ce qui, comme je l'ai fait voir dans les *Routes de la lumiere*, répond très bien aux obſervations.




C
N
G
D
M
E
Q
H
A
P
F
B
Fig. 3.
D
A
G
B
F
L
C
P
Fig. 1.
E
5000
4000
3000
2000
1000
2
1
c
n
M
p
b
C
V
A
P
B
Fig. 2.
Z
V
X
Y
T
p
q
r
s
t
n
m
l
A
P
C
B
Fig. 4.

DE L'ACTION DE L'ÉLECTRICITÉ SUR LE CORPS HUMAIN & de son usage dans les paralysies.

PAR M. GERHARD.

Parmi les différens objets dont la Physique s'occupe il n'y en a sans doute aucun sur lequel on ait fait autant d'essais que sur l'Électricité. Mais malgré le grand nombre & la variété considérable des expériences qu'on a faites là-dessus, on n'est pas encore bien avancé dans la connoissance de cette propriété si particuliere. La vraie qualité de la matiere électrique, & les loix qu'elle observe dans son action sont encore très obscures, & l'usage même qu'on en tire à présent n'est pas bien considérable. Les Médécins ont été presque les premiers à s'en servir comme d'un remede. Lorsqu'on connut, surtout par les expériences de feu Mr. *de Muschenbræck*, la vitesse prodigieuse & la force extraordinaire avec lesquelles agit cette matiere, qu'on se fut convaincu, par les mêmes expériences, de sa grande subtilité, & qu'on eut vu enfin les mouvemens & les secousses très fortes qu'elle excitoit dans le corps humain, on crut qu'elle y feroit des effets salutaires, surtout dans les cas où des humeurs épaisses ne pouvoient pénétrer les canaux subtils de cette machine merveilleuse. Ces considérations déterminerent donc les Médecins à s'en servir dans des maladies chroniques, & surtout dans la paralysie. Les effets qui en ont résulté ont été très différens. Il y a eu des paralytiques entierement rétablis; d'autres ont été guéris, mais sont bientôt retombés; on en a vu enfin sur lesquels ce remede n'a produit aucun effet, & même il s'en est trouvé dont l'état a empiré. Ces effets si différens m'ont déterminé à faire aussi des expériences là-dessus, mais afin

de me former auparavant une juste idée de la maniere dont agit l'Électricité sur un corps animal vivant, je fis les expériences suivantes. D'abord il étoit nécessaire d'essayer l'effet de la matiere électrique sur les parties solides d'un corps animal & surtout sur ses parties sensibles & irritables. On sait qu'il y a trois especes, pour ainsi dire, de flamme électrique. La premiere produit ces rayons lumineux bleuâtres qui sortent en forme de cone d'un corps électrisé & pointu dont la base est dans l'air & la pointe dans le corps électrisé. La seconde fait jaillir de petites étincelles semblables à un charbon ardent, qui sortent en ligne directe avec peu de bruit & excitent une douleur vive & piquante sans aucune secousse; on pourroit les nommer étincelles électriques. A la troisieme appartiennent enfin les foudres électriques, qui sortant avec plus de bruit en serpentant, causent dans la peau une douleur moins piquante, mais excitent plus ou moins de secousses dans la partie qu'elles frappent. Il étoit donc nécessaire de savoir, si l'effet de ces différentes flammes sur un corps animal seroit différent.

J'ai choisi pour mes expériences des chats, des chiens & des grenouilles, en approchant doucement les muscles dépouillés auparavant de la peau & du tissu cellulaire qui les couvre ordinairement, du conducteur électrique. Les rayons électriques ne faisoient aucun effet, les animaux restoient tranquilles, & je ne pouvois observer aucun mouvement dans les fibres musculaires. Les étincelles excitoient des douleurs aiguës, témoin les cris des animaux, & dans les fibres musculaires je remarquois de fortes oscillations, qui pourtant ne s'étendoient pas loin, mais occupoient seulement les fibres les plus proches de celles sur lesquelles les étincelles étoient tombées. Les foudres enfin sembloient exciter moins de douleur, mais les oscillations des muscles étoient plus considérables; elles occupoient presque le muscle entier & continuoient quelque tems. Au reste les contractions des fibres charnues dans les deux expériences n'étoient pas régulieres, mais semblables à des mouvemens convulsifs. J'excitois ensuite les mêmes parties avec une lancette, avec des braises aussi bien qu'avec des matieres âcres chymiques, & en comparant les effets qui en résultoient avec ceux que l'électricité avoit causés, j'ai vu que les contractions étoient, ou peu s'en faut, aussi fortes, mais

beaucoup moins régulieres; auſſi ne ſe commmiquoient-elles pas bien loin, mais reſtoient-elles preſque entierement à l'endroit qui en étoit affecté. Et au lieu que les autres irritans produiſent très ſouvent des contractions toniques, la matiere électrique, autant que je l'ai obſervé, n'en excite jamais.

Je continuai ces mêmes eſſais ſur les parties ſenſibles en faiſant agir les flammes électriques ſur les nerfs des animaux, après en avoir ôté l'enveloppe de maniere que la moëlle étoit tout à découvert. Les rayons ne faiſoient point d'effet non plus, mais les étincelles & les foudres produiſoient des douleurs très ſenſibles & des convulſions bien vives dans les muſcles auxquels aboutiſſoient les rameaux du nerf irrité, & les foudres rendoient ſurtout les convulſions plus véhémentes que les étincelles.

Enſuite je fus curieux de connoître la durée de l'effet de l'électricité après la mort. Je choiſis des cœurs de grenouilles & de poiſſons, ſéparés du reſte du corps, & je les laiſſai aſſez longtems pour être aſſuré que les autres irritans ne produiſoient plus de mouvemens. Alors j'y fis tomber les étincelles & les foudres électriques que je vis produire des mouvemens aſſez conſidérables, ce qui va quelquefois ſi loin que trois jours après que l'action de tout autre irritant a ceſſé, celle de l'électricité continue encore. Il s'offre des phénomenes ſemblables lorſqu'on applique l'électricité aux nerfs d'un animal mort. Mr. *Lieberkuhn*, ce grand génie dont je ne prononcerai jamais le nom ſans m'attendrir au ſouvenir de ſes grands talens, obſerva déjà que ſi l'on enleve le cerveau d'un animal récemment mort, & qu'on irrite les nerfs qui en ſortent, tous les muſcles auxquels ils aboutiſſent éprouvent des mouvemens convulſifs. Cet eſſai remarquable réuſſit toujours pourvu que l'animal ait encore quelque reſte de chaleur naturelle, & l'effet n'a pas lieu ſi l'animal eſt entierement refroidi. En appliquant alors l'électricité on remarquera encore quelque petit mouvement, mais il ne dure gueres une demi-heure après le refroidiſſement entier.

Tous ces effets de l'action de la matiere électrique ſur les parties ſenſibles & irritables des animaux ou vivans ou morts deviennent plus forts lorſque l'animal eſt iſolé; on en fait ſortir alors les étincelles & les foudres électri-

ques, & on remarquera ſurtout que les contractions excitées durent plus longtems. Les contractions même ne ſe manifeſtent la plupart que quand les flammes ſortent; mais quand l'électricité eſt bien forte, de maniere que l'électrometre paſſe l'angle de 45°, alors dans des animaux fort vifs ſe manifeſtent des oſcillations foibles mais fort preſtes & continuelles, ſans qu'on faſſe ſortir les étincelles ou les foudres. Enfin il étoit néceſſaire d'examiner quel effet proviendroit de l'action de la matiere électrique ſur le ſang. Dans cette vue je pris une livre de ſang humain que je diviſai en deux parties égales. J'y mis des thermometres correſpondans; je plaçai les parties l'une à côté de l'autre, & une en fut électriſée. Les thermometres n'indiquoient aucune différence, mais en continuant l'eſſai juſqu'à ce que le ſang commençât à s'épaiſſir, je vis que le ſang électriſé gardoit un peu plus longtems ſa fluidité. La couleur du ſang ne fut pas altérée, & je n'obſervai point de différence dans les globules. Mais le poids fut différent; car au lieu que le ſang électriſé avoit perdu 145 grains, l'autre partie n'avoit diminué que de 100 grains.

Au reſte il me ſemble avoir remarqué que les contractions des parties irritables produites par l'électricité ſont moins fortes dans le vuide que dans l'air.

De toutes ces expériences réſultent les propoſitions ſuivantes.

1) La matiere électrique eſt l'irritant le plus fort pour les parties ſenſibles & irritables du corps animal, en ce qu'elle produit des contractions plus fortes, plus univerſelles, & plus durables que d'autres irritans, & qu'elle peut même produire ces contractions plus longtems après la mort. La raiſon n'en eſt pas difficile à déterminer. L'odeur & le goût de la matiere électrique ſemblent indiquer qu'elle eſt compoſée de matiere phlogiſtique & d'un ſel acide, mélange qui produit ordinairement des ſubſtances très âcres. La rapidité de cette matiere eſt prodigieuſe, & j'ai toujours remarqué qu'en moins d'une ſeconde elle parcourt des chaînes de 36 pieds; ainſi elle doit choquer d'une maniere ſenſible les fibres irritées. Enfin ſon extrême ſubtilité lui permet de pénétrer les plus petites fibres des parties qu'elle touche, & le nombre des fibres ſimples qui forment une fibre compoſée doit

doit être plus grand qu'à tout autre irritant. De là résulte donc nécessairement le grand effet de la matiere électrique sur les parties dont je viens de parler.

2) La matiere électrique a la force de procurer au sang la fluidité, le sang électrisé gardant plus longtems sa fluidité. Je m'imagine que cela dépend d'un mouvement que cette matiere excite dans les globules du sang; ce qui est d'autant plus vraisemblable que l'électricité contribue à hâter l'évaporation de cette liqueur.

Après ces essais il étoit nécessaire d'appliquer les expériences au corps humain, pour voir si les effets que je viens d'attribuer à la matiere électrique s'y manifestent effectivement. J'ai choisi pour cela des personnes d'âges & de températmens différens, mais qui jouissoient tous d'une santé parfaite. J'ai toujours fait les expériences le matin dabord après qu'on s'étoit levé, & j'ai pris la précaution de me servir constamment de l'électrometre, pour avoir autant qu'il étoit possible le même degré d'électricité, & j'ai observé les phénomenes suivans.

1) Le pouls bat plus vîte chez tous, de maniere que chez des personnes très irritables le nombre des battemens double. La force du pouls varie selon le tempérament. Dans les personnes d'un tempérament colérique elle augmente, dans les mélancoliques & les phlegmatiques elle n'est presque point altérée; pour les personnes d'un tempérament très vif j'ai souvent remarqué que le pouls se rallentit, mais qu'il est aussi un peu tendu. Dans tous sa marche est réguliere.

2) La chaleur de même augmente de maniere que la différence étoit quelquefois de dix degrés, échelle de Fahrenheit, en comparant la chaleur que le thermometre montroit au commencement avec celle que cet instrument indiquoit à la fin de l'opération.

3) La respiration augmente aussi de maniere qu'on observe souvent une sueur assez forte.

4) La peau à l'endroit où l'on fait sortir les étincelles rougit, & quand on continue longtems il s'y forme une espece d'inflammation.

5) Quand les étincelles sortent d'un endroit très musculeux, on remarque des mouvemens convulsifs, quelquefois très forts, de ces muscles.

6) Quand l'échauffement causé par l'électricité est passé, il y succede une foiblesse & un relâchement assez considérable, & j'ai remarqué surtout que quand des personnes fort sensibles & irritables se soumettent à l'action de l'électricité, elles se disposent aux attaques spasmodiques.

Au reste il est très aisé de comprendre que ces effets sont plus ou moins considérables à proportion que la sensibilité & l'irritabilité des sujets sont plus ou moins grandes, de maniere que la force électrique étant égale, les effets qui en résultent sont en raison directe de la force vitale des sujets auxquels la premiere est appliquée. Ces observations auroient pu suffire pour en déduire l'action de la matiere électrique sur le corps humain, dans le cas où l'on emploie une seule sorte d'électricité, la positive, ou la négative. Mais il étoit nécessaire de savoir, si en réunissant ces deux sortes d'électricité l'usage de l'électricité opposée changeroit ces effets. Pour m'en instruire j'électrisois mes sujets de maniere que quelquefois ils me servoient de conducteur positif, & quelquefois aussi de conducteur négatif. Dans les deux cas j'ai observé en général les mêmes effets que la simple électricité produit, mais tous étoient plus forts, surtout quand on électrisoit positivement, & la seule différence qu'il y avoit, étoit que la marche du pouls n'étoit pas si réguliere dans l'électricité contraire que dans la simple, ce qui arrive surtout lorsque la personne qu'on électrise représente le conducteur négatif, ayant toujours remarqué qu'après chaque coup qu'elle avoit éprouvé le pouls battoit plus vîte & étoit remittant.

Tout cela posé, il n'est pas difficile d'expliquer la véritable maniere dont la matiere électrique agit sur le corps humain. Et d'abord, comme cette matiere irrite toutes les fibres & tous les nerfs, il est évident qu'elle doit fortement accélérer le mouvement du cœur & des arteres, puisque la vitesse de ce mouvement est proportionnée à la vitesse avec laquelle se font les contractions de ces parties. Or le mouvement accéléré du cœur & des arteres doit nécessairement produire dans le sang une fluidité plus forte, laquelle deviendra encore plus considérable par le mouvement immédiat que la matiere électrique semble communiquer aux globules mêmes du sang. Ensuite, comme l'électricité augmente la respiration insensible, elle peut ser-

vir à purifier le ſang, ſurtout de ces matieres hétérogenes ſubtiles, qui aiment à ſortir par les vaiſſeaux de la peau. Enfin la matiere électrique doit ſurtout très fortement exciter l'endroit par lequel elle ſort, témoin l'inflammation qu'elle y cauſe. Or comme il eſt démontré par un grand nombre d'expériences & d'obſervations que le ſang tend toujours en plus grande quantité & avec plus de viteſſe vers une partie irritée, il eſt néceſſaire que l'électricité augmente auſſi l'affluence du ſang vers tel endroit; ainſi l'électricité a une force révulſive. Mais tous les mouvemens forts & vifs qu'éprouve le corps ſont immédiatement ſuivis d'une foibleſſe proportionnée à la force & à la viteſſe de ces mouvemens précédens; il eſt donc néceſſaire que bien loin que l'électricité contribue à fortifier les fibres & les nerfs, elles les affoibliſſe plutôt & les relâche.

En appliquant ces idées à l'uſage de l'électricité pour la guériſon des maladies paralytiques, & en les comparant avec les cauſes de ces maladies, il me ſemble avoir trouvé la vraie méthode d'employer ce remede. La paralyſie ſuppoſe preſque toujours inaction des nerfs ſur les fibres motrices, & de là il eſt aiſé de comprendre que c'eſt ou la compreſſion, ou l'obſtruction, ou la conſtriction, ou la roideur, ou la foibleſſe des nerfs, qui contiennent la cauſe matérielle de cette maladie. * Pour ce qui regarde la compreſſion, au cas qu'elle provienne d'une matiere fluide, je ne doute pas que l'électricité ne puiſſe faire quelque effet, puiſque d'un côté elle peut diſſoudre un tel fluide, qui par la ſtagnation s'épaiſſit, & de l'autre parce que par l'irritation qu'elle excite dans les vaiſſeaux réſorbens, un fluide ainſi extravaſé peut être ramené à la maſſe des humeurs circulantes.

Dans le cas de l'obſtruction, on peut auſſi attendre de bons effets de l'application de ce remede, ſurtout parce qu'il ſemble que ces obſtructions ne ſe trouvent pas dans la ſubſtance propre des nerfs, mais dans les vaiſſeaux du ſang qui, ſelon les préparations de l'immortel *Lieberkuhn*, s'y étendent, & qui dans l'état de l'obſtruction étant gonflés, doivent comprimer la moëlle nerveuſe. Car la contraction plus promte du cœur & des arteres,

* Il faut remarquer qu'on conſidere ici ſeulement la paralyſie qui vient du défaut des nerfs, & qu'il ne s'agit pas des eſpeces qui proviennent de la part des arteres.

la commotion du ſang même, le choc impétueux du ſang qui frappe avec plus de force ces endroits fermés par l'obſtruction, ſont ſans contredit les moyens les plus efficaces pour diſſoudre des humeurs épaiſſes, & tous ces effets peuvent provenir de l'action de la matiere électrique. Pour ce qui eſt de la conſtriction des nerfs, il n'y a point de doute non plus que l'électricité n'y faſſe auſſi un bon effet, vu que par un mouvement plus rapide qu'elle cauſe dans les vaiſſeaux & par la commotion qu'elle excite dans les humeurs, elle peut remédier à ces conſtrictions & étendre les vaiſſeaux qui ont perdu leur diametre naturel.

Quand les nerfs ſont roides, leurs petites parties compoſantes ſont trop proche l'une de l'autre, & on comprendra aiſément que les ſecouſſes véhémentes qu'y excite l'électricité doit ſervir à rendre à ces parties le degré de molleſſe néceſſaire.

Mais dans la foibleſſe ou plutôt dans le relâchement des nerfs on attendroit en vain de bons effets de l'électricité, parce que toujours ſuivie de la foibleſſe elle ſert alors plutôt à augmenter qu'à détruire la cauſe de la maladie.

Si l'on conſidere attentivement tout ce que je viens de dire, il ſera aiſé de déterminer le véritable uſage de l'électricité dans les cas de paralyſie où l'on peut l'employer.

Et d'abord il eſt évident, que la plupart du tems on en attendra envain une guériſon complette, à moins qu'on ne joigne à l'électricité l'uſage des remedes fortifians, ſurtout auſſitôt qu'on remarque que l'électricité commence à faire quelque effet, parce qu'il eſt à craindre que la foibleſſe qu'elle cauſe ne faſſe renaître la maladie, quoique la premiere cauſe en ſoit détruite. Par là on peut ſans doute expliquer pourquoi ſouvent l'électricité a produit des effets merveilleux, mais qui ont été ſuivis d'une rechûte ſubite.

Enſuite il faut toujours proportionner la force de l'électricité au tempérament du malade. Une perſonne forte & vigoureuſe dont les humeurs, par la denſité, par la petiteſſe & par le poli complet de leurs petites parties, auſſi bien que par la forte chaleur qui y regne, ont beaucoup de diſpoſition à s'émouvoir, demande ſans doute une électricité douce, un mouvement ex-

ceſſif ne pouvant que produire alors une foibleſſe très conſidérable, qui mettra les plus grands obſtacles à une guériſon parfaite, & l'on pourra ſe contenter, au commencement du moins, de ſe ſervir dans ce cas de l'électricité ſimple uniquement. Au lieu que ſi l'on opere ſur un mélancolique ou un phlegmatique dont le ſang ſoit plus difficile à émouvoir, il ſera néceſſaire d'appliquer l'électricité contraire, & ſurtout on réuſſira le mieux ſi on l'électriſe poſitivement.

Pour ce qui eſt de l'endroit où le feu électrique doit être appliqué, il eſt néceſſaire de choiſir le tronc des nerfs attaqués, excepté le cas de conſtriction, où il vaut mieux prendre un endroit oppoſé, afin que par l'irritation qui y eſt cauſée, le feu électrique agiſſe comme remede révulſif.

Voilà, Meſſieurs, l'idée que je m'étois formée de la méthode qu'il faut obſerver dans l'application de la matiere électrique aux paralyſies, & j'attendois avec impatience l'occaſion d'en faire des eſſais. Les malades de la grande Maiſon des pauvres confiée à mes ſoins me la fournirent bientôt. Le premier malade qui ſe préſenta fut une femme âgée de 50 ans d'un tempérament très phlegmatique, attaquée d'une paralyſie complette des deux bras, laquelle avoit pris ſon origine d'une matiere galeuſe qu'on avoit empêché de ſortir. Je pris donc la réſolution de l'électriſer d'abord poſitivement, & remarquant dès la premiere fois que la viteſſe de ſon pouls après deux coups qu'elle avoit reçus, n'avoit augmenté que de 12 battemens par minute, je répétai les coups juſqu'à ce que le pouls battît 90 fois par minute, au lieu de 60 ou 65 battemens qu'elle avoit ordinairement pendant ce tems-là. Au bout de trois jours je vis naître des puſtules inflammatoires au cervice, ſemblables à la petite vérole, dont la ſuppuration étoit aſſez forte. En même tems la malade commença d'avoir une très foible ſenſibilité aux doigts, & elle ſentoit quand on la piquoit d'une épingle. Je continuai ainſi pendant quinze jours, la ſenſibilité devenant de jour en jour plus grande, & même le bras droit faiſoit quelque petit mouvement. Mais comme je voyois que la malade s'affoibliſſoit, je commençai alors à lui donner des fortifians, en continuant toujours l'électricité. Avant le terme de 8 jours la ſenſi-

bilité fut entierement rétablie, & le mouvement devint auſſi conſidérable. Je changeai alors d'électricité, & je me ſervis de la ſimple. Mais après 4 jours environ, la ſenſibilité s'émouſſant, le mouvement commença auſſi à s'affoiblir. Je repris donc la premiere méthode, par laquelle dans un eſpace d'environ 6 ſemaines ma malade fut entierement rétablie, & elle jouit encore d'une ſanté parfaite.

L'autre malade qui ſe préſenta étoit un homme très robuſte, d'un tempérament tout à fait inflammable, qui avoit une paralyſie incomplette aux deux jambes, de maniere que le mouvement ayant ceſſé la ſenſibilité ſubſiſtoit encore. Cette maladie étoit provenue de la ſuppreſſion du flux hémorrhoïdal. Je n'oſai pas appliquer ici l'électricité contraire, mais je me ſervis de la ſimple, de maniere que faiſant iſoler le malade j'exprimois les étincelles tout du long des deux jambes depuis leurs articulations juſqu'aux genoux. L'électricité fit d'abord un grand effet; le nombre des battemens du pouls doubla après environ un quart d'heure; il commença fortement à ſuer & au bout de quelques jours il fut en état de ſe tenir à l'aide d'un bâton ſur ſes pieds, ſant pouvoir pourtant marcher. Ce fut alors que je lui donnai ſeulement trois coups de l'électricité contraire, mais le lendemain il ne pouvoit plus ſe tenir ſur les jambes. Reprenant donc la premiere méthode, le malade ſe rétablit entierement dans l'eſpace de deux mois. Je ne lui avois donné aucun remede fortifiant, parce que je n'avois pas remarqué que l'électricité l'affoiblît beaucoup. Mais j'eus lieu de m'en repentir bientôt; car environ trois ſemaines après, ſes pieds devinrent foibles & chancelans, & enflerent un peu. Je ne tardai donc pas à lui donner le Quinquina, qui le délivra de tous ces ſymptomes & en produiſant le flux hémorrhoïdal lui rendit parfaitement la ſanté.

Mais l'obſervation la plus importante que j'aye eu occaſion de faire fut à l'égard d'un vieillard âgé de plus de 80 ans, qui avoit déjà depuis bien des années une paralyſie complette à une jambe, & à qui une nouvelle attaque d'apoplexie ſanguine en avoit cauſé une à l'autre jambe.

C'étoit un homme du tempérament le plus robuste que j'aye jamais vu, & malgré son âge avancé il avoit encore assez de vigueur. J'essayai donc dabord l'électricité simple; mais il fut impossible de faire sortir la moindre étincelle, & même le pouls n'alloit pas plus vîte. Ainsi j'eus recours à l'électricité contraire, dont l'effet fut tel qu'il commençoit à mouvoir le pied, récemment attaqué de paralysie, & je ne doute pas qu'il n'eût été entierement rétabli s'il avoit voulu continuer le remede.

Toutes ces observations, auxquelles je pourrois en ajouter plusieurs autres, pourront servir à démontrer la vérité de ce que j'ai avancé sur la maniere d'appliquer l'électricité dans les paralysies.



RECHERCHES
ſur les moyens de découvrir par des expériences comment ſe fait la propagation de la lumiere.

Par M. Beguelin.

Il n'eſt pas néceſſaire de rappeller ici les argumens qu'on emploie pour & contre l'émiſſion réelle de la lumiere. Plus on les peſe, moins on eſt en état de ſe décider; la queſtion paroit d'autant plus problématique, qu'on l'approfondit davantage; & l'on eſt toujours tenté d'embraſſer le ſentiment qu'on examine le dernier.

L'autorité n'eſt jamais un bon moyen de terminer une diſcuſſion philoſophique; & quand on voudroit l'employer ici on n'en ſeroit gueres plus avancé; Mr. Newton d'un côté & divers hommes célebres qui ſe ſont rangés de ſon parti; de l'autre côté Mrs. Huygens & Euler, ſuivis par tant de Phyſiciens du premier ordre, tiendroient encore la balance égale entre le ſyſteme de l'émiſſion & celui de l'ondulation; pour ne pas parler de Descartes, qui ſemble tenir le milieu entre les deux ſentimens oppoſés.

La queſtion néanmoins eſt aſſez importante pour qu'on cherche des moyens ſûrs de la réſoudre; elle tient eſſentiellement aux plus intéreſſantes parties de la Phyſique, & c'eſt de ſa déciſion que dépend la connoiſſance de l'arrangement de l'univers entier. C'eſt alors ſeulement que nous ſaurons s'il y a du vuide dans la nature, ou ſi tout eſt plein; ſi les corps céleſtes éprouvent quelque réſiſtance dans leurs mouvemens, & ſi par conſéquent leurs révolutions périodiques s'accélerent, ou ſi elles s'achevent conſtamment dans un même tems; ſi les inégalités dans le mouvement moyen de la Lune ſont une ſuite de la réſiſtance de l'éther, ou s'il faut leur chercher une autre cauſe; ſi la peſanteur eſt inhérente à la nature des corps, ou ſi elle eſt

produite

produite par une impulſion étrangere; en un mot ſi l'attraction eſt une premiere loi de la Nature, ou ſi elle n'eſt que le réſultat de quelques premieres loix méchaniques.

Il ſeroit bien étrange en ſoi, & bien fâcheux pour le progrès des connoiſſances humaines, que deux cauſes abſolument différentes dûſſent produire exactement & dans toutes les circonſtances le même effet. En ce cas là, il ſeroit impoſſible ſans doute de remonter des effets à la connoiſſance de la véritable cauſe. Mais il eſt probable que ce cas n'exiſte jamais, & que toutes les fois qu'on ſera le maître d'ajouter telles expériences qu'on voudra aux ſimples obſervations, on pourra parvenir à décider entre deux hypotheſes qui paroiſſoient d'abord également propres à expliquer les phénomenes obſervés; ou du moins, ſi après cela encore l'indéciſion ſubſiſtoit, ce ne ſeroit plus parce que les réſultats ſeroient toujours les mêmes dans chaque hypotheſe, mais uniquement parce que nos ſens ſeroient trop groſſiers pour appercevoir la diverſité réelle qu'il y auroit entre ces réſultats.

1. D'après ce principe examinons s'il y a un cas où le ſyſteme de l'émiſſion devroit donner un réſultat différent de celui de l'ondulation.

On ſait que ſelon la théorie de Newton la réfraction eſt un effet de l'attraction. Le milieu plus denſe attire perpendiculairement le globule de lumiere par une force attractive qui eſt la même pour toutes les inclinaiſons, d'où réſulte néceſſairement la loi connue & obſervée, de la raiſon conſtante entre les ſinus d'incidence & de réfraction.

Dans le ſyſtême de l'ondulation Mrs. Huygens & Euler ont montré que la même loi pouvoit avoir lieu. Si elle n'eſt pas une ſuite néceſſaire de leur théorie, elle en eſt au moins une ſuite poſſible, & même aſſez plauſible; d'ailleurs Mr. Euler a démontré inconteſtablement que la diverſe réfrangibilité des rayons s'accorde très bien avec cette théorie, qui a de plus l'avantage d'être analogue à celle de la propagation du ſon, & de ramener aux cauſes méchaniques, les ſeules auxquelles l'eſprit & la raiſon humaine ſemblent pouvoir donner un entier acquieſcement.

Puiſque les deux ſyſtêmes s'accordent à l'égard de la loi des réfractions il n'y a point d'expérience à cet égard qui puiſſe décider lequel des

deux eſt le ſyſtême de la Nature. Il faut donc ſe tourner de quelque autre côté.

2. Il ſemble d'abord qu'il doit être facile de trouver un réſultat différent entre la maniere dont un corps doué d'un mouvement exceſſivement rapide agiroit ſur d'autres corps, & l'effet qu'y pourroit produire une ſimple vibration de l'éther. Auſſi pluſieurs phyſiciens n'ont pas héſité à conclure de là que la lumiere étoit un corps. Ils ont donné l'énumération des effets de la lumiere concentrée dans un foyer, & ils ont crû pouvoir en inférer que la lumiere avoit tous les caracteres auxquels on doit reconnoître les corps. Mais quand on conſidere que l'ondulation ſuppoſe auſſi une violente agitation de la matiere éthérée; que le ſon produit des effets analogues à ceux d'un corps en mouvement; qu'il ſecoue, ébranle, briſe, & renverſe des maſſes entieres, il ne paroit pas que les effets de la lumiere ſuffiſent pour décider notre queſtion.

3. La réflexion de la lumiere ſuit encore les mêmes loix dans les deux ſyſtêmes. Mais les échos ſont une confirmation de celui des ondulations, au lieu que la force repulſive que Newton emploie paroit moins ſimple & moins naturelle. Le même milieu qui attire dans la réfraction, repouſſe dans la réflexion; cela ſemble un peu précaire. Cependant cette force repulſive eſt appuyée ſur tant de phenomenes, qu'on ne ſauroit la rejetter ſans un examen ultérieur; & comme en l'admettant, un réſultat ne differe pas de l'autre, la réflexion de la lumiere ne paroit pas non plus pouvoir nous fournir le cas déciſif que nous cherchons. D'ailleurs, ſans s'attacher à la force repulſive de Newton, ſi la lumiere eſt une émanation réelle du corps lumineux, elle doit ſe réfléchir comme les autres corps, & la loi de ſa réflexion ne dépend plus que de ſa figure & de ſon élaſticité, & de la nature des ſurfaces réfléchiſſantes.

4. Les mouvemens ne peuvent différer qu'en direction, & en viteſſe. Nous venons de voir que les deux ſyſtêmes donnent à la lumiere une même direction, ſoit lorſqu'elle ſe réfléchit, ou lorſqu'elle ſe réfracte; examinons encore ce qui arrive à l'égard de la viteſſe.

Selon le ſyſtême de Mr. Newton la lumiere accélere ſa viteſſe en entrant dans le milieu qui l'attire; mais comme ce même milieu retarde d'autant cette viteſſe à la ſortie, la lumiere aura la même viteſſe après l'émerſion qu'elle avoit avant l'incidence, ſi le milieu dans lequel elle rentre après s'être briſée eſt de même denſité que celui où elle ſe mouvoit avant la réfraction.

Il n'en eſt pas ainſi dans le ſyſtême de l'ondulation. C'eſt parce que les vibrations ſont retardées par le milieu plus denſe, que la lumiere s'y réfracte; elle ſe meut donc plus lentement dans un milieu denſe que dans un milieu plus rare. S'il eſt prouvé que les vibrations reprennent leur premiere viteſſe dès qu'elles ſe font dans un milieu ſemblable au premier, la ſeconde réfraction remet les choſes dans leur premier état. Mais on pourroit peut-être former quelques doutes ſur cette aſſertion; & à cet égard le ſyſtême de l'ondulation ne paroît pas auſſi rigidement démontrable que celui de l'émiſſion. Quoi qu'il en ſoit je ne vois pas que cette différence réelle entre les deux ſyſtêmes puiſſe fournir une expérience déciſive. La viteſſe de la lumiere eſt ſi prodigieuſe, qu'un accroiſſement ou un décroiſſement momentané ne ſauroit jamais être ſenſible pour nous.

Dans la réflexion le plus ou le moins de viteſſe du mobile ne change rien à l'égalité des angles d'incidence & de réflexion; ainſi à cet égard encore il n'y a rien qui puiſſe déceler ſi la lumiere réfléchie de la ſeconde ſurface du milieu plus denſe a été accélérée ou retardée en ſe plongeant dans ce milieu.

5. Après avoir conſidéré tous les cas qui peuvent donner un réſultat différent, je n'en ai trouvé qu'un ſeul qui ſemble propre à décider la queſtion, non pas encore ſur la nature même de la lumiere, mais au moins ſur la maniere dont elle ſe réfracte. Nous avons vû que la réfraction ſuit la même loi dans les deux ſyſtêmes, quelle que ſoit l'incidence du rayon; cela eſt vrai auſſi longtems qu'il y a une incidence actuelle: mais ſi le rayon de lumiere raſe horizontalement la ſurface du milieu denſe, s'il fait ce qu'on nommeroit en dioptrique un angle d'incidence de 90 degrés, les réſultats ne doivent plus être les mêmes dans les deux ſyſtêmes, & leur différence doit être extremement ſenſible. En effet dans le ſyſtême de Mr. Newton,

l'attraction agiſſant également à diſtances égales, quelle que ſoit la direction de la lumiere, cette force doit attirer le rayon raſant; le faire entrer dans le milieu denſe & lui donner une réfraction dont le ſinus, ſi le paſſage ſe fait de l'air dans le verre, ſera les deux tiers du ſinus total; c. à-d. que le rayon s'enfonçant dans le verre s'y briſera ſous un angle d'environ $41^d. 48'$; & s'il rencontre enſuite une autre ſurface perpendiculaire à celle-là, il rentrera dans l'air en ſe briſant de nouveau ſous un angle de 90^d; de ſorte que la nouvelle direction du rayon formera un angle droit avec ſa direction initiale.

Rien de tout cela ne doit arriver dans le ſyſtême de l'ondulation. La direction des vibrations étant une fois parallele à la ſurface du milieu denſe, & hors de ce milieu, il n'y a point de raiſon pourquoi elle devroit changer. Le rayon continuera par conſéquent ſon chemin en droite ligne, il raſera la ſurface du milieu denſe ſans la pénétrer en aucun ſens.

6. Il ſemble donc qu'il y auroit une expérience très aiſée à faire pour connoître lequel des deux cas oppoſés arrive. Il ſuffit d'un cube de cryſtal de verre de quelques pouces, dont on couvriroit exactement le côté expoſé aux rayons ſolaires, qu'on introduiroit dans une chambre obſcure par une petite fente horizontale. Après avoir placé ce cube ſur une table de façon que ſa baſe faſſe avec la table un angle égal à la hauteur actuelle du limbe ſupérieur du Soleil, on élevera la table juſqu'à ce que la lame de rayons raſe la face ſupérieure du cube, ce qu'on peut reconnoître dès que la diſtance entre la partie éclairée de la table derriere le cube, & ce cube, ſera à la hauteur de celui-ci, comme le ſinus total eſt au ſinus de la hauteur du Soleil.

Si dans cette poſition tout cet eſpace reſte obſcur, on en pourra conclure que l'explication Newtonienne de la réfraction n'eſt pas d'accord avec le phénomene; que ſi au contraire il arrive que le rayon tombe ſur la table au pied de la face poſtérieure du cube, ou en général au point où la double réfraction doit le faire tomber, il ſera évident qu'il y a eu réfraction. Ce dernier cas prouveroit deux choſes à la fois; l'une que la lumiere eſt un corps, & l'autre que la réfraction eſt l'effet d'une force attractive. Le premier cas prouveroit ſimplement que l'attraction n'eſt pas la cauſe de la réfraction des rayons; mais il ne décideroit pas encore que la lumiere ſoit plutôt propagée

par ondulation que par émiſſion; car il eſt très poſſible qu'un globule lumineux raſant avec une rapidité exceſſive une ſurface pénétrable pour lui, continue de ſuivre ſa direction en ligne droite ſans ſe détourner vers un milieu qui ne lui fait aucun obſtacle.

La facilité de cette expérience m'a engagé à la tenter auſſitôt que j'en ai eu conçu l'idée. J'ai fait faire une petite caiſſe de bois en forme de canal parallélepipédique d'environ quinze pouces de longueur, fermée à ſes deux extrémités, & ouverte par ſon côté ſupérieur. La hauteur & la largeur de ce canal ſont préciſément celles du cube de verre qui en occupe l'un des bouts, où il eſt arrêté par deux petits liſteaux; le bout oppoſé a un rebord pour y marquer exactement par un trait horizontal la hauteur où le rayon ſolaire devoit aller frapper en ligne droite après avoir raſé la ſurface ſupérieure du cube, au cas qu'il n'y eût point de réfraction; le reſte de la caiſſe étoit noirci intérieurement pour écarter la lumiere étrangere. Mais afin de mieux diſtinguer l'effet de la réfraction & d'élever le cube plus exactement à la hauteur requiſe, j'avois préparé divers quarrés de papier blanc, pour les poſer ſous ce cube.

Le récit des expériences que j'ai faites avec un inſtrument ſi ſimple ne ſera pas long. Pendant l'été de 1771 j'ai expoſé aux rayons du Soleil à diverſes repriſes dans une chambre obſcure le cube de verre enchaſſé à l'un des bouts du canal. Auſſi longtems que le faiſceau lumineux eſt tombé avec quelque obliquité ſur la face ſupérieure de ce cube, il y a eu réfraction, & cette réfraction a été bien ſenſible; l'éclat de la portion du papier blanc ſous le cube, que les rayons briſés illuminoient, ſe diſtinguoit par une ligne bien tranchante de la partie obſcure de ce quarré, laquelle ſelon les loix de la réfraction devoit effectivement ſe trouver dans l'ombre. Mais auſſitôt que l'obliquité d'incidence a été nulle, toute la lumiere au fond du cube a diſparu, & j'ai conſtamment vû le rayon ſolaire frapper au trait horizontal que j'avois tracé à l'autre extrémité du canal; j'ai même obſervé dans toutes ces expériences que la réfraction a ceſſé un peu avant que l'obliquité ait été exactement nulle, je veux dire avant que la direction du rayon ſolaire ait raſé la ſurface du verre; car quoique le trait horizontal fût tiré à la hauteur

précife du cube, j'ai toujours apperçu que le rayon a commencé de frapper le bout de la caiffe un peu au-deffous de ce trait horizontal; j'eftime cette différence à peu près une demi-ligne de Paris. Il ne feroit pas difficile à l'aide d'inftrumens plus parfaits de déterminer avec la plus grande précifion s'il y a effectivement un angle d'obliquité fi petit que la réfraction ceffe abfolument, avant que le rayon rafe la furface du milieu réfringent.

Quoi qu'il en foit de cette derniere obfervation qui n'eft ici qu'acceffoire, il me femble qu'il réfulte clairement de l'expérience que je viens de rapporter que la réfraction n'eft pas produite par une force attractive, & qu'il faut chercher à cette propriété de la lumiere quelque autre explication qui s'accorde mieux avec tous fes phénomenes. On fait d'ailleurs affez que cette attraction ne tient point à la gravitation univerfelle dont nous devons l'heureufe découverte à Newton lui-même. La gravitation de la lumiere vers le milieu tranfparent le moins denfe feroit au-delà de cent millions de fois plus forte que l'attraction qu'on obferve dans la matiere en général. En un mot l'attraction de la lumiere, fa repulfion, fes divers accès de facile tranfmiffion, & de rebrouffement, font tout au plus des faits obfervés par Newton, mais dont la théorie & l'explication feroient encore à trouver.

On pourroit, à toute force, objecter en faveur de l'attraction contre l'expérience rapportée, que le rayon en rafant la face fupérieure du verre a pû être attiré dans le cube, s'y brifer felon la loi connue, reffortir par la face latérale de derriere, & rafer cette face en vertu de fa feconde réfraction; ou que de là attiré une feconde fois dans le cube, il a pû après deux nouvelles réfractions gliffer fur la face inférieure du cryftal dans une direction parallele mais oppofée à fa direction primitive: on pourroit concevoir ainfi une troifieme, & même une quatrieme rentrée du rayon dans le cube, ce qui acheveroit la circulation complette, & cette circulation pourroit être cenfée fe répéter à l'infini. Mais à quelque face que la circulation s'arrêtât, le rayon devroit frapper quelque-part le canal, & fe faire remarquer à fon émerfion; ou fi la circulation ne finiffoit point, la lame lumineufe feroit vifible dans le cube même;

car c'eſt un fait certain que dans l'obſcurité les rayons de lumiere ſont apperçus non ſeulement quand l'œil eſt placé dans la direction de la lumiere, mais encore dans tous les autres points de vue; & d'ailleurs on ne ſauroit ſuppoſer que le rayon ſoit abſorbé puiſqu'on le voit frapper directement au bout du canal.

Je ſens bien qu'on peut éluder cette réponſe en ſuppoſant que l'attraction du verre ne ſauroit agir que ſur une lame de lumiere infiniment mince, qui gliſſe infiniment près de la ſurface attirante, tandis que le reſte du faiſceau lumineux étant hors de la ſphere d'attraction ira directement frapper au but. Je conviens que le pouvoir attractif dont il eſt ici queſtion ne doit être cenſé agir ſenſiblement que juſqu'à une certaine diſtance très petite; mais je ne penſe pas qu'en phyſique on puiſſe jamais prendre l'expreſſion d'infiniment petit dans l'exacte ſignification du terme. Il me ſemble donc qu'on doit opter ici entre affirmer que le verre n'attire aucun rayon du tout, ou accorder qu'il en attire un certain nombre dans toute l'étendue de ſa ſurface; or quelque petit que ſoit ce nombre, il paroit que ces rayons devroient être perceptibles dans l'obſcurité qui regne autour d'eux, ſinon par l'éclat de leur lumiere, au moins par les nuances colorées qui naitroient de la décompoſition du faiſceau; puiſque ſi l'attraction n'agit pas ſur toute la lame, elle doit au moins en détacher les rayons les plus réfrangibles. Il faut de plus ſe rappeller que dans cette expérience la lame lumineuſe va même frapper un peu au-deſſous de ſa direction en ligne droite, ce qui ſemble indiquer qu'elle s'y porte toute entiere; car on ne ſauroit dire que ce ſoit un effet de l'inflexion découverte par *Grimaldi*, puiſqu'il eſt connu par les expériences de Mr. Newton que cette inflexion agit préciſément en ſens contraire; qu'elle eſt, comme Grimaldi la nommoit, une véritable *diffraction* qui écarte les rayons de l'eſpace où naturellement l'ombre doit tomber, bien loin de les plier vers cette ombre.

Au reſte j'ai déjà dit que l'on ne ſauroit rien conclure de cette expérience contre le *ſyſtême* de l'émiſſion; ainſi la principale queſtion, celle

qui roule ſur la maniere dont la lumiere eſt propagée, reſte encore indéciſe.

7. On a à la vérité fait valoir en faveur de l'émiſſion deux obſervations qui au premier coup d'œil ſembloient déciſives, mais après un examen plus mûr il ne paroit pas qu'elles le ſoient.

La premiere eſt celle de l'aberration de la lumiere découverte par Bradley; elle ſuppoſe que le mouvement des rayons eſt uniforme à toutes les diſtances poſſibles; mais puiſque le ſon a également ce mouvement uniforme, on n'en ſauroit conclure que la lumiere ſoit plus corporelle que le ſon ne l'eſt.

8. L'autre obſervation, dont Newton lui-même s'eſt ſervi pour prouver l'émiſſion, c'eſt que les ondulations agiſſent en tout ſens, & dans toutes les directions latérales, tandis que la lumiere n'agit qu'en ligne droite. On ſait la ſolution ingénieuſe que Mr. Euler a donnée de cette difficulté; ſelon lui le ſon ſe propage toujours en ligne droite auſſi bien que la lumiere, & s'il ſemble parvenir à nous obliquement c'eſt que les corps ſolides transmettent le ſon, comme les milieux tranſparens transmettent les rayons lumineux. Une cloiſon, un mur, une colline ne ſont pas plus d'obſtacle au ſon, qu'une ſenêtre fermée ne fait aux rayons du jour. Il ſe pourroit même que le ſon ſubît dans ce paſſage une réfraction analogue à celle qu'on obſerve dans la lumiere.

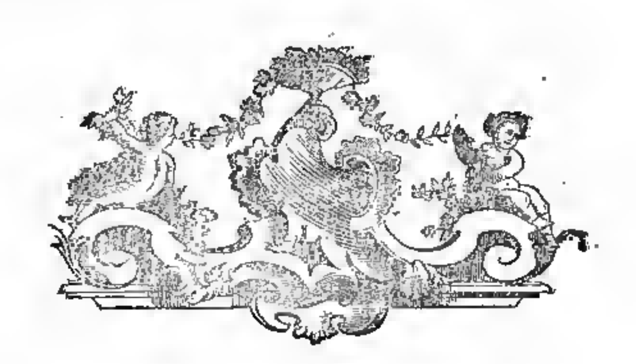
J'avoue que cette ſolution m'a toujours paru plus ingénieuſe que ſolide. D'où vient, ſi le ſon ne ſe propage qu'en lignes droites, comme la lumiere, paroit-il ſe renforcer dans un tuyau recourbé, en ſuivre les inflexions, & ſortir par l'autre extrémité? D'où vient entend-on les corps ſonores qu'on ne voit pas? & comment le ſon de ceux qu'on voit entre-t-il latéralement dans l'oreille? D'où vient que l'ouverture d'une porte ou d'une fenêtre qui n'eſt point dans la ligne de direction du ſon au ſens de l'ouïe, nous fait entendre diſtinctement un bruit que nous ne diſtinguons qu'à peine lorſque tout eſt fermé? D'ailleurs les corps noirs qui abſorbent la lumiere s'échauffent très-ſenſiblement aux rayons du Soleil;

cela

cela femble prouver que la lumiere eft un corps; obferve-t-on rien d'analogue dans les corps qui abforbent le fon? Quand un corps amortit les vibrations d'un fluide ambiant, c'eft une marque que ce corps n'a que peu ou point d'élafticité; mais s'il s'échauffe en amortiffant les vibrations de l'éther, pourquoi ne s'échauffe-t-il point en amortiffant celles de l'air groffier? Il n'y auroit cependant qu'une expérience décifive, un *experimentum crucis*, qui pût trancher la queftion; car à moins de cela on trouvera toujours quelque échappatoire; les réflexions multipliées du fon femblent furtout très commodes pour expliquer les ondulations latérales qu'on y remarque, & pour les ramener à une propagation rectiligne.

9. C'eft moins pour propofer cette expérience décifive, que pour expliquer ma penfée que je vai rapporter ici ce que j'ai imaginé à cet égard. On fait que les corps mous affoibliffent le fon jufqu'à un certain point; & qu'il n'eft pas impoffible de l'amortir tout à fait par leur moyen. Cela pofé, concevons une vafte chambre dont le platfond, le plancher & les parois foient tellement tapiffés d'une matiere propre à abforber le fon qu'il ne puiffe s'y former aucun écho tant foit peu perceptible. Suppofons enfuite que cette chambre communique immédiatement à une autre, par une porte ouverte, revétue de la même tapifferie, & dont l'ouverture feroit par ce moyen rétrécie à volonté. Maintenant fi du milieu de cette feconde chambre on excite un fon, foit de la voix, ou en frappant fur quelque corps fonore, le fon propagé uniquement en lignes droites ne pourra être entendu dans la piece tapiffée que précifément aux endroits par où ces droites prolongées pafferont, & par conféquent on pourra affigner diverfes places où le fon ne doit point pénétrer. Si, au contraire, les ondulations répandent le fon latéralement en tout fens, il n'y aura pas un point affignable dans cet appartement d'où l'on ne puiffe entendre le bruit de la chambre voifine. Dans ce dernier cas il femble qu'on fera en droit de conclure que la propagation du fon differe effentiellement de celle de la lumiere, & le fyftême de l'émiffion paroitroit en quelque maniere démontré.

Il eſt vrai que même dans ce cas-ci la lumiere offre encore quelque choſe d'analogue au ſon. Car quoiqu'elle ne ſuive que la ligne droite, elle peut cependant être viſible latéralement dans toute ſa traverſée. Mais il y a une différence ſi totale entre l'éclat d'un rayon de lumiere direct, & la foible lueur que ce rayon laiſſe échapper de tous côtés ſur ſon paſſage, qu'on ne peut jamais y être trompé; c'eſt ce qu'on ne ſauroit dire d'un ſon qui parvient obliquement à notre oreille; il eſt de la même nature que le ſon direct, & s'il en differe ce n'eſt qu'en intenſité. D'ailleurs la lumiere latérale eſt évidemment l'effet de la réflexion de quelques rayons ſur les particules de l'atmoſphere; mais le ſon qui eſt l'oſcillation de l'atmoſphere elle-même ne ſauroit être réfléchi que par des corps plus groſſiers que l'air qui nous environne.



EXTRAIT

des Observations météorologiques faites à Berlin en l'année 1772

PAR M. BEGUELIN.

L'échelle du baromètre est divisée en pouces & en lignes de Paris; la graduation des thermomètres est celle de Mr. de Réaumur, où l'espace entre le point du dégel 0, & la chaleur de l'eau bouillante contient 80 degrés. Les éclaircissemens sur la méthode d'observer sont contenus dans les Mémoires des années 1769 & 1770, p. 128 & 75.

TABLEAU

des hauteurs barométriques extrêmes & moyennes de chaque mois pour l'année 1772.

Mois.	Jours.	La plus grande élévation.	Jours.	La moindre élévation.	Variation totale.	Le milieu.	Hauteur moyenne.
Janvier.	le 1.	28″. 3‴.	le 8.	27″. 0‴.	1″. 3‴.	27″. 7‴, 5.	27″. 8‴, 7.
Février.	le 9.	28. 2.	le 23.	27. 3.	0. 11.	27. 8, 5.	27. 8, 7.
Mars.	le 2.	28. 3.	le 24.	27. 4.	0. 11.	27. 9, 5.	27. 9, 9.
Avril.	le 11.	28. 3, 25.	le 17.	27. 6, 25.	0. 9.	27. 10, 75.	27. 11, 4.
Mai.	le 4.	28. 4, 5.	le 1.	27. 8.	0. 8, 5.	28. 0, 25.	28. 0, 4.
Juin.	le 9. 14.	28. 4, 25.	le 2.	27. 8, 5.	0. 7, 75.	28. 0, 4.	28. 1, 5.
Juillet.	le 24.	28. 4.	le 28.	27. 7, 5.	0. 8, 5.	27. 11, 75.	28. 0, 3.
Août.	le 6.	28. 5.	le 21.	27. 9, 25.	0. 7, 75.	28. 1, 12.	28. 0, 36.
Septemb.	le 12.	28. 4.	le 17.	27. 6, 3.	0. 9, 7.	27. 11.	27. 11. 85.
Octobre.	le 19.	28. 6.	le 26.	27. 7.	0. 11.	28. 0, 5.	28. 2, 4.
Nov.	le 15.	28. 5.	le 21.	27. 7, 3.	0. 9, 7.	28. 0.	27. 11, 6.
Décemb.	le 25.	28. 7, 5.	le 11.	27. 5.	1. 2, 5.	28. 0, 25.	28. 1, 5.
Année 1772.	le 25. Déc.	28″. 7‴, 5.	le 8. Janv.	27″. 0‴.	1″. 7‴, 5.	27″. 11‴, 13.	27″. 11‴, 78

Remarque.

La hauteur moyenne du barométre étoit en 1769 = 28″. 0‴, 1.
en 1770 = 27. 10, 95.
en 1771 = 28. 0, 008.
Elle eſt en 1772 = 27. 11, 78.
ſomme = 111. 10, 838.

Ainſi la hauteur moyenne du barométre à Berlin, plus approchée eſt = 27″. 11‴, 709.

Pl. VI. La Planche qui ſuit cet Extrait repréſente le mouvement journalier du barométre pendant l'année entiere.

TABLEAU

des hauteurs extrêmes & moyennes du thermométre de Réaumur à 2 heures de l'après-midi pour chaque mois de l'année 1772.

Mois.	Jours.	Le plus haut degré.	Jours.	Le plus bas degré.	La différence.	Le milieu.	Chaleur moyenne.
Janvier.	le 13.	+ 3ᵈ, 25.	le 16.	— 5ᵈ.	8ᵈ, 25.	— 0ᵈ, 875.	— 0ᵈ, 25.
Février.	le 29.	12, 75.	le 20.	— 3.	15, 75.	+ 4, 875.	+ 3, 2.
Mars.	le 23.	13, 5.	le 14.	— 3.	16, 5.	5, 25.	5, 4.
Avril.	le 14.	15.	le 20.	+ 3, 25.	11, 75.	9, 125.	8, 6.
Mai.	le 31.	21, 5.	le 12.	5, 5.	16.	13, 5.	11, 5.
Juin.	le 27.	25.	le 11.	12.	13.	18, 5.	18, 13.
Juillet.	le 19.	24.	le 3. 9.	10, 5.	13, 5.	17, 25.	16, 9.
Août.	le 8.	21, 5.	le 12.	11.	10, 5.	16, 25.	17, 5.
Septembre.	le 6.	23.	le 28.	10.	13.	16, 5.	15, 4.
Octobre.	le 11.	16.	le 23.	5, 5.	10, 5.	10, 75.	12, 3.
Novembre.	le 7.	13, 5.	le 26.	2, 5.	11.	8.	6, 6.
Décembre.	le 19.	7, 5.	le 29.	— 3, 5.	11.	2.	2, 8.
Année 1772.	27. Juin.	25ᵈ.	16. Janv.	— 5ᵈ.	30ᵈ.	10ᵈ, 035.	9ᵈ, 78.

Le même Tableau pour les heures du matin & du soir.

Mois.	Jours.	Le plus haut deg.	Jours.	Le plus bas degré.	La différence.	Le milieu.	Chaleur moyenne.
Janvier.	le 12.	+ 3^{d}.	le 16.	— 6^{d}.	9^{d}.	— 1^{d}. 5.	— 1, 26.
Février.	le 29.	8.	le 6.	— 4, 25.	12, 25.	+ 1, 875.	+ 0, 6.
Mars.	le 23. 29.	7, 5.	le 15.	— 3, 5.	11.	+ 2.	2, 2.
Avril.	le 13.	11, 5.	le 17.	+ 1, 5.	10.	6, 5.	4, 8.
Mai.	le 31.	14, 5.	le 9.	2, 75.	11, 75.	8, 625.	7.
Juin.	le 27.	19.	le 11.	8.	11.	13, 5.	12, 9.
Juillet.	le 19.	18.	le 3.	8, 75.	9. 25.	13, 42.	12, 4.
Août.	le 8.	16, 5.	le 12.	10, 25.	6. 25.	13, 37.	12, 3.
Septembre.	le 6.	15.	le 12.	6, 25.	8. 75.	10, 625.	10, 5.
Octobre.	le 4.	10.	le 23.	— 0, 5.	10, 5.	4, 75.	6, 6.
Novembre.	le 8.	9, 5.	le 26.	— 0, 5.	10.	4, 5.	4, 6.
Décembre.	le 19.	6.	le 27.	— 3, 5.	9, 5.	1, 25.	1, 12.
Année 1772.	le 27. Juin.	19^{d}.	le 16. Janvier.	— 6^{d}.	25^{d}.	6^{d}, 58.	6^{d}, 14.

Remarque.

La chaleur moyenne du midi à Berlin a été en 1769 = 9^{d}, 16.
en 1770 = 9, 3.
en 1771 = 8, 3, 6.
en 1772 = 9, 78.

Ainsi la chaleur moyenne plus approchée est = 9^{d}, 15.
La chaleur moyenne de la nuit qui résulte de la comparaison de ces quatre années est = 5^{d}, 68.

TABLEAU

de la direction du vent, pendant l'année 1772.

Plage.	Janv.	Févr.	Mars.	Avril.	Mai.	Juin.	Juill.	Août.	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.	Total.
N.	0	0	0	1	3	2	2	0	0	0	0	0	8
N. E.	2	0	1	6	9	1	3	2	3	3	1	0	31
E.	5	2	10	3	0	1	0	2	4	5	0	4	36
S. E.	5	5	7	3	2	3	1	2	3	8	8	6	53
S.	4	4	2	1	1	2	2	0	3	4	4	3	30
S. W.	8	13	5	5	4	2	4	10	7	6	12	10	86
W.	4	3	5	6	4	7	12	7	7	5	3	6	69
N. W.	3	2	1	5	8	12	7	8	3	0	2	2	53

TABLEAU

de l'état de l'Atmosphere pendant l'année 1772.

	Janv.	Fév.	Mars.	Avr.	Mai.	Juin.	Juill.	Août.	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.	Total.	
Serein.	1	1	5	8	6	9	5	7	7	12	5	1	67 j.	
A moitié couv.	11	10	12	11	14	14	20	19	15	13	9	10	158	
Couvert.	19	18	14	11	11	7	6	5	8	6	16	20	141	
Petite pluie.	3	1	10	5	11	8	6	8	8	6	3	5	74	134
Pluie copieuse.	0	8	2	8	4	5	8	5	7	1	9	3	60	
Petite neige.	11	5	4	5	0	0	0	0	0	0	0	2	27	38
Neige copieuse.	5	4	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	11	
Bruine.	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	5	4	13	
Brouillards.	7	4	1	0	1	0	0	0	1	6	9	13	42	
Gelée continue.	15	4	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	31	
Orages.	0	0	0	2	1	3	3	2	2	0	0	0	13	
Grêle.	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	2	
Vent.	3	5	5	5	6	12	7	6	6	5	3	3	66	96
Grand vent.	4	2	0	0	3	2	3	3	6	4	3	0	30	
Lumieres Bor.	2	1	4	3	0	0	0	1	1	0	2	1	15	

OBSERVATIONS PLUS DÉTAILLÉES

sur chaque Mois.

JANVIER 1772.

Le Baromètre a été:

1 Jour entre 27". 0''' à 2'''. le 8. Jour de l'année où le mercure a été au plus bas degré.

3 jours - - 2 à 4. le 7. 9. 17.

2 - - - - - 4 à 6. le 16. 18.

5 - - - - - 6 à 8. le 12. 13. 18. 27. 29.

8 - - - - - 8 à 10. le 4. 6. 10. 14. 22. 26. 30. 31.

10 - - - - - 10 à 12. le 3. 5. 11. 15. 19-21. 23-25.

0 - - - - 28. 0 à 2.

2 - - - - - 2 à 3. le 1. 2.

Le Thermométre a été à 2 heures après midi:

1 jour entre les degrés	— 5	& — 4.	le 16.	Jour le plus froid de l'année.
2 jours - - - - -	— 4	& — 2.	le 15. 19.	
11 - - - - - - -	— 2	& 0.	le 2-5. 7. 14. 18. 20. 26. 30. 31.	
15 - - - - - - -	0	& 2.	le 1. 6. 8-11. 17. 21-25. 27-29.	
2 - - - - - - -	2.	& 3¼.	le 12. 13.	

La direction du vent.

2 jours	*N. E.*	le 1. 4.
5 -	*E.*	le 16. 21. 26-28.
5 -	*S. E.*	le 11. 17. 19. 24. 25.
4 -	*S.*	le 12. 22. 23. 31.
8 -	*S. W.*	le 3. 5-8. 20. 29. 30.
4 -	*W.*	le 2. 9. 10. 18.
3 -	*N. W.*	le 13-15.

Vent un peu fort, le 3. 8. 13. - - - - III jours.
Vent fort, le 4. 7. 10. 14. - - - - IV

L'état de l'Atmosphere.

1 jour serein, le 31.
11 jours à moitié couverts, le 1. 2. 4. 5. 7-10. 13-16. 17.
19 - couverts, le 3. 6. 11. 12. 14. 15. 18-30.
Pluie passagere, le 3. 12. 28. - - - - III jours.
Neige passagere, le 3-7. 10. 14-17. 31. - - - XI -
Neige continue, le 8. 11. 18. 28-29. - - - V -
Brouillards, le 11. 12. 19. 22-24. 27. - - VII -
Bruine, le 21. 22. 26. - - - - - III -
Gelée continue, le 1. 2. 4-9. 14-16. 18. 19. 30. 31. - XV -
Lumiere boréale sans Iris, le 1. 3. - - - II -

FÉVRIER 1772.

Le Barométre a été:

1 jour entre	27″. 3‴	à	4‴.	le 23.
5 jours - - -	4	à	6.	le 1. 2. 24. 26. 28.
5 - - - - -	6	à	8.	le 3. 14. 22. 27. 29.
11 - - - - -	8	à	10.	le 4. 6. 10. 11. 13. 15. 18-21. 25.
4 - - - - -	10	à	12.	le 5. 12. 16. 17.
3 - - 28″.	0	à	2.	le 7-9.

Le Thermométre a été à 2 heures après midi:

1 jour entre les degrés	— 3	&	— 2.	le 20.
1 - - - - - - -	— 2	&	0.	le 7.
10 jours - - - - - -	0	&	2.	le 1. 5. 6. 17-19. 21. 24. 25. 27.
10 - - - - - - -	2	&	4.	le 2-4. 8. 9. 11. 12. 15. 22. 23.
3 - - - - - - -	4	&	6.	le 10. 13. 16.
2 - - - - - - -	6	&	8.	le 14. 26.
1 - - - - - - -	8	&	10.	le 28.
1 - - - - - - -	10	&	13.	le 29.

La direction du vent.

2 jours	*E.*	le 1. 17.
5 -	*S.E.*	le 18-21. 23.
4 -	*S.*	le 2. 12. 13. 22.
13 -	*S.W.*	le 3. 5. 7-11. 14-16. 26. 28. 29.
3 -	*W.*	le 4. 25. 27.
2 -	*N.W.*	le 6. 24.

Vent fort, le 4. 8. 17. 20. 24. - - - - - V jours.

Vent très fort, le 3. 27. - - - - - II -

L'état

L'état de l'Atmosphere.

1 jour serein, le 16.
10 jours à moitié couverts, le 1. 3. 4. 7. 10. 13. 14. 17. 27. 29.
18 - couverts, le 2. 5. 6. 8. 9. 11. 12. 15. 18-26. 28.

Brouillards, le 5. 9. 11. 29. - - - -	IV jours.
Petite pluie, le 3. - - - - -	I -
Pluie copieuse, le 8. 9. 11. 15. 23. 26. 28. 29. -	VIII -
Petite neige, le 1. 3. 17. 20. 22. - - -	V -
Forte neige, le 6. 21. 23. 24. - - - -	IV -
Gelée continue, le 7. 20. 24. 25. - - -	IV -
Gelée de nuit, le 1. 5. 6. 17. 19. 21. - - -	VI -
Lumiere boréale blanche, le 6. - - - -	I -

MARS 1772.

Le Barométre a été:

1 jour entre	27", 4'''	à	6'''.	le 24.
7 jours - - -	6	à	8.	le 17. 18. 23. 25. 28-30.
9 - - - -	8	à	10.	le 10. 16. 19. 20-22. 26. 27. 31.
7 - - - -	10	à	12.	le 1. 4. 5. 8. 9. 11. 15.
6 - -	28". 0	à	2.	le 3. 6. 7. 12-14.
1 - - - - -	2	à	3.	le 2.

Le Thermométre a été à 2 heures aprés midi:

2 jours entre les degrés	— 3	&	— 2.	le 14. 15.
3 - - - - - -	— 2	&	0.	le 12. 13. 16.
4 - - - - - - -	0	&	2.	le 11. 17-19.
3 - - - - - - -	2	&	4.	le 2-4.
5 - - - - - - -	4	&	6.	le 6. 8. 10. 20. 25.
5 - - - - - - -	6	&	8.	le 1. 5. 7. 21. 31.
4 - - - - - - -	8	&	10.	le 9. 26. 27. 30.
3 - - - - - - -	10	&	12.	le 22. 24. 29.
2 - - - - - - -	12	&	13.	le 23. 25.

La direction du vent.

1 jour	*N.E.*	le 2.	
10 jours	*E.*	le 3. 11-18. 21.	
7 -	*S.E.*	le 4-8. 22. 23.	
2 -	*S.*	le 9. 20.	
5 -	*S.W.*	le 24. 26-29.	
5 -	*W.*	le 10. 19. 25. 30. 31.	
1 -	*N.W.*	le 1.	
Vent un peu fort,		le 13. 14. 28. 30. 31. - -	V jours.

L'état de l'Atmosphere.

5 jours	sereins,	le 2. 3. 21. 22. 23.	
12 -	à moitié couverts,	le 1. 4. 5. 9. 20. 24. 26-31.	
14 -	couverts,	le 6-8. 10-19. 25.	
Petite pluie,		le 7. 10. 11. 17. 19. 25. 27. 28. 30. 31.	X jours.
Pluie plus copieuse,		le 8. 18. - - - -	II -
Brouillard,		le 7. - - - - -	I -
Petite neige,		le 12. 13. 15. 19. - - -	IV -
Neige copieuse,		le 11. - - - - -	I -
Gelée continue,		le 12-17. - - - -	VI -
Gelée de nuit,		le 3. 4. 11. - - - -	III -
Petites lumieres boréales blanches,		le 5. 22. 28. 30. -	IV -

---

AVRIL 1772.

Le Barométre a été:

1 jour	entre	27″. 6‴	à	8‴.	le 27.
9 jours	- - -	8	à	10.	le 1. 2. 9. 12-14. 16. 19. 30.
7 -	- - - -	10	à	12.	le 8. 15. 20-22. 28. 29.
10 -	- -	28″. 0	à	2.	le 3. 4. 6. 7. 10. 18. 23. 25-27.
3 -	- - - -	2	à	$3\frac{1}{4}$.	le 5. 11. 24.

Le Thermométre a été à deux heures après midi:

1 jour	entre les degrés	3	&	4.	le 20.
5 jours	- - - - -	4	&	6.	le 3. 17. 19. 25. 27.
12	- - - - - -	6	&	8.	le 1.2.4.5.11.18.21-24.26.30.
4	- - - - - -	8	&	10.	le 10. 15. 28. 29.
2	- - - - - -	10	&	12.	le 6. 12.
4	- - - - - -	12	&	14.	le 7-9. 16
2	- - - - - -	14	&	15.	le 13. 14

La direction du vent.

1 jour		*N.*	le 23.
6 jours		*N.E.*	le 2. 15. 19. 20. 29. 30.
3	-	*E.*	le 3. 11. 12.
3	-	*S.E.*	le 6. 13. 16.
1	-	*S.*	le 7.
5	-	*S.W.*	le 8. 9. 14. 18. 28.
6	-	*W.*	le 1. 4. 5. 21. 26. 27.
5	-	*N.W.*	le 10. 17. 22. 24. 25.

Vent fort, le 2. 4. 10. 23. 30. - - - V jours.

L'état de l'Atmosphere.

8 jours sereins, le 2. 3. 6. 11-13. 21. 29.	
11 - à moitié couverts, le 1. 4. 5. 7. 9. 10. 14. 16. 18. 22. 23.	
11 - couverts, le 8. 15. 17. 19. 20. 24. 25. 26-28. 30.	
Pluie passagere, le 8. 22. 24-26. - - -	V jours.
Pluie forte, le 4. 9. 10. 14. 16. 17. 19. 30 -	VIII -
Neige passagere, le 23. - - - -	I -
Neige abondante, du 19 au 20. - - - -	I -
Orages, le 13 au loin, le 16 au *N.W.* de la ville -	II -
Lumieres boréales, le 3. 20. 25. - - -	III -

MAI 1772.

Le Barométre a été:

4 jours entre	27″. 8‴	à	10‴.	le	1. 25-27.
11 - - - -	10	à	12.	le	8. 9. 11-14. 22. 24. 28. 30. 31.
12 - - -	28″. 0	à	2.	le	2. 7. 10. 15-21. 23. 29.
1 - - - -	2	à	3.	le	6.
3 - - - -	3	à	$4\frac{1}{2}$.	le	3-5.

Le Thermométre a été à 2 heures après midi:

5 jours entre les degrés	5	&	7.	le 1. 12. 18. 19. 22.
0 - - - - - -	7	&	8.	
8 - - - - - -	8	&	10.	le 2. 8-10. 13. 14. 16. 20.
7 - - - - - -	10	&	12.	le 3. 4. 11. 15. 17. 21. 23.
4 - - - - - -	12	&	14.	le 5-7. 24.
5 - - - - - -	14	&	16.	le 25-29.
0 - - - - - -	16	&	18.	
1 - - - - - -	18	&	20.	le 30.
1 - - - - - -	20	&	$21\frac{1}{2}$.	le 31.

La direction du vent.

3 jours	*N.*	le 8. 28. 31.
9 -	*N.E.*	le 1-3. 5-10.
2 -	*S.E.*	le 11. 24.
1 -	*S.*	le 7.
4 -	*S.W.*	le 13. 25. 26. 30.
4 -	*W.*	le 4. 6. 20. 27.
8 -	*N.W.*	le 9. 14-19. 29.

Vent un peu fort, le 1. 6. 11. 17. 28. 30. - - VI jours.
Vent fort, le 8. 22. 24. - - - - III -

L'état de l'Atmosphere.

6 jours	sereins,	le 2. 3. 5. 6. 8. 30.	
14 -	à moitié couverts,	le 7. 9-11. 17. 20. 21. 23-25. 27-29. 31.	
11 -	couverts,	le 1. 4. 12-16. 18. 19. 22. 26.	

Petite pluie, le 1. 4. 9. 14-17. 23-26 - -	XI jours.
Pluie copieuse, le 12. 18. 19. 22. - - -	IV -
Brouillard, le 28. - - - - -	I -
Gresil, le 19. - - - - -	I -
Orage au loin à l'Est de la ville, le 26. - - -	I -

JUIN 1772.

Le Barométre a été:

1 jour	entre	27". 8‴	à	10‴.	le 2.
5 jours	- - -	10	à	12.	le 1. 5-7. 28.
13	- - -	28". 0	à	2.	le 3. 4. 8. 10. 11. 15-18. 21. 27. 29. 30.
11	- - - -	2	à	4.	le 9. 12-14. 19. 20. 22-26.

Le Thermométre a été à 2 heures après midi:

4	jours entre les degrés	12	&	14.	le 3. 10-12.
9	- - - - - -	14	&	16.	le 5-9. 13. 14. 19. 30.
3	- - - - - -	16	&	18.	le 4. 15. 18.
2	- - - - - -	18	&	20.	le 20. 23.
7	- - - - - -	20	&	22.	le 2. 16. 17. 21. 22. 24. 29.
3	- - - - - -	22	&	23.	le 1. 25. 26.
2	- - - - - -	23	&	25.	le 27. 28. Jours les plus chauds de l'année.

La direction du vent.

2 jours *N.* le 12. 15.
1 - *N.E.* le 13.
1 - *E.* le 14.
3 - *S.E.* le 1. 2. 24.
2 - *S.* le 9. 16.
2 - *S.W.* le 4. 28.
7 - *W.* le 3. 6. 7. 10. 25. 27. 30.
12 - *N.W.* le 5. 8. 11. 17-23. 26. 29.
Vent un peu fort, le 2-7. 12. 13. 19. 20. 28. 29. - XII jours.
Vent fort, le 8. 10. - - - - - II -

L'état de l'Atmosphere.

9 jours ſereins, le 1. 13-16. 18. 19. 23. 24.
14 - à moitié couverts, le 4. 8. 9. 10. 12. 17. 20-22. 25-29.
7 - couverts, le 2. 3. 5-7. 11. 30.
Pluie, le 4. 6. 8. 10. 22. 27. 29. 30. - - VIII jours.
Pluie abondante, le 2. 5. 7. 11. 17. - - - V -
Orages, le 2. 17. 30. tous médiocres, & un au loin le 28. IV -

---

JUILLET 1772.

Le Barométre a été:

1 jour entre 27". 7‴ à 8‴. le 28.
4 - - - - 8 à 10. le 9. 20. 21. 27.
10 - - - - 10 à 12. le 8. 10-14. 16. 17. 19. 26.
11 - - 28". 0 à 2. le 1-3. 6. 7. 15. 18. 22. 29-31.
5 - - - - 2 à 4. le 4. 5. 23-25.

Le Thermométre a été à 2 heures après midi:

2 jours	entre les degrés	10 & 12.	le 3. 9.
3	- - - - - -	12 & 14.	le 4. 8. 21.
7	- - - - - -	14 & 16.	le 2. 10. 13. 14. 22. 28. 29.
9	- - - - - -	16 & 18.	le 1. 5-7. 11. 12. 15. 16. 23.
6	- - - - - -	18 & 20.	le 17. 20. 24. 25. 30. 31.
3	- - - - - -	20 & 22.	le 18. 26. 27.
1	- - - - - -	22 & 24.	le 19.

La direction du vent.

2 jours	*N.*	le 24. 25.	
3 -	*N.E.*	le 4. 5. 23.	
1 -	*S. E.*	le 26.	
2 -	*S.*	le 19. 27.	
4 -	*S.W.*	le 18. 20. 30. 31.	
12 -	*W.*	le 6-9. 11-17. 28.	
7 -	*N.W.*	le 1-3. 10. 21. 22. 29.	

Vent fort, le 8. 10. 13. 14. 16. 21. 26. - - VII -
Vent très fort, le 9. 28. 29. - - - III -

L'état de l'Atmosphere.

5 jours sereins, le 6. 17. 19. 22. 23.
20 - à moitié couverts, le 5. 7-16. 18. 21. 24-27. 29-31.
6 - couverts, le 1-4. 20. 28.

Pluie passagere, le 1. 7. 9. 16. 25. 25. - - VI jours.
Pluie copieuse, le 2. 3. 13. 14. 20. 21. 28. 31. - VIII -
Petite grêle, le 13. - - - - - - I -
Orages, le 16. 20. 27. - - - - III -

AOUT 1772.

Le Baromêtre a été:

4 Jours entre 27". 9''' à 10'''. le 21. 24. 25. 31.
8 - - - - 10 à 12. le 3. 9. 15. 16. 20. 22. 23. 26.
14 - - - 28. 0 à 2. le 1. 2. 8. 10-14. 17-19. 27. 29. 30.
3 - - - - 2 à 4. le 4. 7. 28.
2 - - - - 4 à 5. le 5. 6.

Le Thermomêtre a été à 2 heures après midi:

1 jour entre les degrés 11 & 12. le 12.
2 jours - - - - 12 & 14. le 13. 15.
10 - - - - - 14 & 16. le 3. 4. 14. 16-19. 26-28.
4 - - - - - 16 & 18. le 10. 11. 24. 25.
11 - - - - - 18 & 20. le 2. 5-7. 9. 20. 22. 24. 29-31.
3 - - - - - 20 & $21\frac{1}{2}$. le 1. 8. 21.

La direction du vent.

2 jours *N.E.* le 5. 7.
2 - *E.* le 6. 8.
2 - *S.E.* le 1. 20.
10 - *S.W.* le 2. 3. 4. 11. 21-24. 29. 31.
7 - *W.* le 9. 10. 25-28. 30.
8 - *N.W.* le 12-19.

Vent médiocre, le 7. 10. 12. 14. 16. 21. - - VI jours.
Vent fort, le 13. 23. - - - - - II -
Vent très fort, le 27. - - - - - I -

L'état de l'Atmosphere.

7 jours sereins, le 6-8. 20. 28. 30. 31.
19 - à moitié couverts, le 1. 2. 4. 5. 9-11. 14. 15. 17-19. 21-25. 27. 29.
5 - couverts, le 3. 12. 13. 16. 26.

Pluie, le 4. 11. 12. 17-19. 21. 26. - - VIII jours.
Beaucoup de pluie, le 1-3. 9. 24. - - - V -
Orages, le 3. 9. - - - - - - - II -
Lumiere boréale blanche, le 31. - - - I -

SEPTEMBRE

SEPTEMBRE 1772.

Le Barométre a été:

1 jour entre	27″, 6‴	à 8‴.	le 17.
5 jours - - -	8	à 10.	le 1. 2. 18. 24. 25.
11 - - - -	10	à 12.	le 3. 7-10. 15. 16. 19. 23. 26. 30.
8 - -	28″. 0	à 2.	le 4. 6. 11. 14. 20. 22. 27. 29.
4 - - - - -	2	à 3.	le 5. 13. 21. 28.
1 - - - - -	3	à 4.	le 12.

Le Thermométre a été à 2 heures après midi:

4 jours entre les degrés	10 & 12.	le 12. 19. 28. 30.
10 - - - - - -	12 & 14.	le 3. 4. 11. 13. 18. 20. 22. 24. 27. 29.
5 - - - - - -	14 & 16.	le 2. 10. 14. 17. 21.
5 - - - - - -	16 & 18.	le 9. 15. 16. 23. 26.
4 - - - - - -	18 & 20.	le 1. 5. 8. 25.
1 - - - - - -	20 & 22.	le 7.
1 - - - - - -	22 & 23.	le 6.

La direction du vent.

3 jours	*N.E.*	le 11. 12. 27.
4 -	*E.*	le 9. 28-30.
3 -	*S.E.*	le 13. 14. 17.
3 -	*S.*	le 15. 21. 25.
7 -	*S.W.*	le 1. 16. 19. 22-24. 26.
7 -	*W.*	le 2. 3. 6. 7. 10. 18. 20.
3 -	*N.W.*	le 4. 5. 8.

Vent médiocre, le 11. 16. 20. 23. 25. 30. - - VI jours.
Vent bien fort, le 2. 6. 10. 14. 18. 29 - - VI -

L'état de l'Atmoſphere.

7 jours ſereins, le 5. 12-15. 20. 30.
15 - à moitié couverts, le 1. 3. 4-8. 10. 11. 18-21. 23. 26.
8 - couverts, le 2. 9. 16. 17. 22. 24. 27. 28.

Pluie paſſagere, le 6. 8. 9. 18. 22. 24. 25. 28. -	VIII jours.
Pluie abondante, le 1. 2. 7. 10. 17. 19. 27. - -	VII -
Brouillards, le 1. . - - - -	I -
Orages, le 10. 17. - - - - -	II -
Lumiere boréale, le 20. - - - - -	I -

OCTOBRE 1772.

Le Barométre a été:

1 jour entre 27″. 7‴ à 9‴. le 26.
2 jours - - - 9 à 10. le 25. 27.
1 - - - - 10 à 12. le 28.
8 - - 28″. 0 à 2. le 1. 4. 5. 13. 14. 29-31.
10 - - - - - 2 à 4. le 2. 3. 8. 9. 12. 14-17. 23.
9 - - - - 4 à 6. le 6. 7. 10. 11. 18-22.

Le Thermométre a été à deux heures après midi:

2 jours entre les degrés 5 & 6. le 21. 23.
2 - - - - - - 6 & 8. le 22. 24.
1 - - - - - - 8 & 10. le 20.
8 - - - - - - 10 & 12. le 14-16. 18. 19. 25. 27. 28.
11 - - - - - - 12 & 14. le 3.6.7.9.12.13.17.26.29-31.
7 - - - - - - 14 & 16. le 1. 2. 4. 5. 8. 10. 11.

La direction du vent.

3 jours *N.E.* le 6. 19. 21.
5 - *E.* le 10. 11. 20. 22. 23.
8 - *S.E.* le 3. 4. 7-9. 22. 23. 31.
4 - *S.* le 24. 25. 28. 30.
6 - *S.W.* le 1. 2. 14. 15. 26. 29.
5 - *W.* le 5. 16. 17. 18. 27.
Vent médiocrement fort, le 3. 13. 15. 23. 29. - - V jours.
Vent fort, le 8. 26. 27. 29. - - - - IV -

L'état de l'Atmosphere.

12 jours sereins, le 2. 5-8. 10. 11. 13. 17. 22. 24. 31.
13 - à moitié couverts, le 1. 4. 9. 12. 14. 15. 18-21. 26. 29. 30.
6 - couverts, le 3. 16. 23. 25. 27. 28.
Pluie médiocre, le 3. 4. 14. 25. 27. 28. - - VI jours.
Pluie continue, le 16. - - - - - I -
Bruine, le 6. - - - - - - I -
Brouillards, le 6. 19-21. 25. 29. - - - VI -
Gelée de nuit, le 23. 24. - - - - II -

NOVEMBRE 1772.

Le Baromêtre a été:

1 jour entre 27". 7‴ à 8‴. le 21.
8 jours - - - 8 à 10. le 8. 11-13. 22. 27-29.
9 - - - - 10 à 12. le 1. 4. 9. 10. 14. 19. 20. 24. 30.
9 - - 28". 0 à 2. le 2. 3. 6. 7. 17. 18. 23. 25. 26.
2 - - - - 2 à 4. le 5. 16.
1 - - - - 4 à 5. le 15.

Le Thermomètre a été à 2 heures après midi:

3 jours entre les degrés	2	&	4.	le 3. 26. 29.
13 - - - - - -	4	&	6.	le 4.14-18.21.23-25.27.28.30.
7 - - - - - -	6	&	8.	le 5. 9-11. 13. 20. 22.
4 - - - - - -	8	&	10.	le 2. 6. 12. 19.
1 - - - - - -	10	&	12.	le 1.
2 - - - - - -	12	&	$13\frac{1}{2}$.	le 7. 8.

La direction du vent.

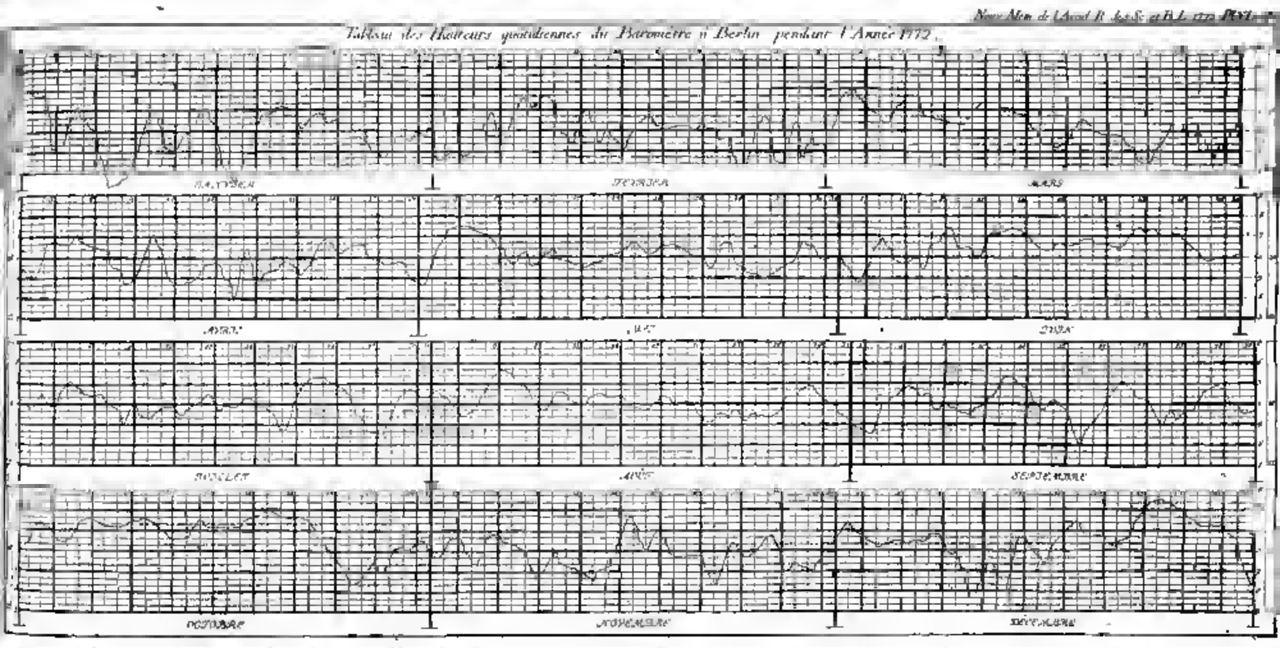
1 jour	*N.E.*	le 21.
8 jours	*S.E.*	le 3. 16-18. 26-29.
4 -	*S.*	le 1. 19. 24. 25.
12 -	*S.W.*	le 2. 4. 6-8. 10-12. 20. 22. 23. 30.
3 -	*W.*	le 5. 9. 15.
2 -	*N.W.*	le 13. 14.

Vent médiocrement fort,	le 11. 12. 13. - -	III jours.
Vent fort,	le 9. 10. 14. - - - -	III -

L'état de l'Atmosphere.

5 jours sereins, le 1. 8. 23. 26. 28.
9 - à moitié couverts, le 2. 5. 7. 16. 17. 19. 20. 22. 25.
16 - couverts, le 3. 4. 6. 9-15. 18. 21. 24. 27. 29. 30.

Brouillards,	le 3. 6. 10. 15. 18. 20. 21. 29. 30 -	IX jours.
Bruine,	le 1. 15. 21. 29. 30. - - - -	V -
Petite pluie,	le 2. 9. 12. - - - -	III -
Pluie continue,	le 4. 6. 10. 11. 14. 22. 24. 27. 29. -	IX -
Gelée blanche & de nuit,	le 25. 26. 28. - -	III -
Petites lumieres boréales,	le 24 & 27. - -	II -


Tableau des Hauteurs quotidiennes du Baromètre à Berlin pendant l'Année 1772.
JANVIER
FEVRIER
MARS
AVRIL
MAY
JUIN
JUILLET
AOÛT
SEPTEMBRE
OCTOBRE
NOVEMBRE
DECEMBRE

DÉCEMBRE 1772.

Le Barométre a été:

1 jour	entre 27″. 5‴	à 6‴.	le 11.	
1	- - - - - 6	à 8.	le 13.	
3 jours	- - - 8	à 10.	le 10. 12. 31.	
2	- - - - - 10	à 12.	le 9. 16.	
10	- - 28″. 0	à 2.	le 3-7. 14. 15. 17. 21. 22.	
9	- - - - - 2	à 4.	le 1. 2. 8. 18-20. 28-30.	
1	- - - - - 4	à 5.	le 27.	
1	- - - - - 5	à 6.	le 23.	
3	- - - - - 6	à 7½.	le 24-26.	le plus haut degré d'élévation du barométre dans l'année.

Le Thermométre a été à 2 heures après midi:

3 jours	entre les degrés — 3½	& — 2.	le 27-29.	
3	- - - - - - — 2	& 0.	le 26. 30. 31.	
7	- - - - - - - 0	& 2.	le 5-7. 14. 23-25.	
8	- - - - - - - 2	& 4.	le 4. 8-10. 12. 13. 15. 22.	
6	- - - - - - - 4	& 6.	le 1-3. 11. 16. 21.	
4	- - - - - - - 6	& 7.	le 17-20.	

La direction du vent.

4 jours	*E.*	le 3. 6. 8. 15.	
6	- *S. E.*	le 1. 2. 4. 5. 7. 23.	
3	- *S.*	le 9. 24. 25.	
10	- *S. W.*	le 10. 18. 19. 21. 26-31.	
6	- *W.*	le 11. 12. 16. 17. 20. 22.	
2	- *N. W.*	le 13. 14.	

Vent médiocrement fort, le 5. 11. 19. - - III jours.

L'état de l'Atmoſphere.

1 jour ſerein, le 23.
10 jours à moitié couverts, le 5. 11. 12. 14-16. 18. 25. 30. 31.
20 - couverts, le 1-4. 6-10. 13. 17. 19-22. 24. 26-29.

Nébuleux, le 2. 6-9. 13. 15. 19. 20. 23. 25-27.	-	XIII jours.
Bruine, le 1. 2. 6. 7.	- - - -	IV -
Pluie médiocre, le 3. 13. 14. 17. 20.	- - -	V -
Pluie forte, le 10. 15. 16.	- - -	III -
Neige, le 13. 24.	- - - -	II -
Givre, le 27-29.	- - - - -	III -
Gelée de nuit, le 15. 23. 25.	- - - -	III -
Gelée continue, le 26-31.	- - - -	VI -
Petite aurore boréale, le 18.	- - -	I -

Réſumé général.

Le vent de *S.W.* a encore dominé cette année comme la précédente; il a regné 86 jours, celui d'*Oueſt* 69, & celui de *N.W.* 53, en ſorte que la plage de l'Oueſt occupe ſeule plus de la moitié de l'année.

Il y a eu dans l'année 172 jours de pluie ou de neige, dont 60 de pluie abondante, & 11 de neige copieuſe; l'humidité a été plus également repartie ſur les diverſes ſaiſons, que l'année précédente, où elle tomba principalement ſur les trois mois d'été; le mois le plus ſec a été celui d'Octobre.

Il n'y a rien eu à obſerver à l'égard des météores. Les aurores boréales, toutes peu conſidérables & ſans couleur d'Iris, ont eu encore cette année-ci la déclinaiſon déjà obſervée d'environ 16 degrés du Nord vers l'Oueſt.

NOUVEAUX

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE

DES

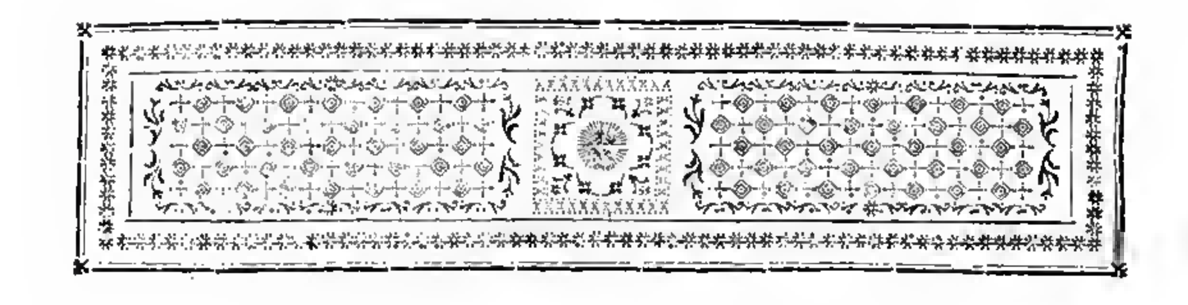
SCIENCES

ET

BELLES-LETTRES.

CLASSE

DE MATHÉMATIQUE.



SUR UNE NOUVELLE ESPECE DE CALCUL rélatif à la différentiation & à l'intégration des quantités variables.

PAR M. DE LA GRANGE.

Leibnitz a donné dans le premier Volume des *Miſcellanea Berolinenſia* un Mémoire intitulé *Symboliſmus memorabilis calculi algebraici, & infiniteſimalis in comparatione potentiarum & differentiarum &c.* dans lequel il fait voir l'analogie qui regne entre les différentielles de tous les ordres, du produit de deux, ou de plusieurs variables, & les puiſſances des mêmes ordres du binome, ou du polynome composé de la ſomme de ces mêmes variables. Ce grand Géometre a auſſi remarqué ailleurs que la même analogie ſubſiſtoit entre les puiſſances négatives & les intégrales (voyez le *Commercium epiſtolicum*, Epiſt. XVIII); mais ni lui ni aucun autre que je ſache n'a pouſſé plus loin ces ſortes de recherches, ſi on en excepte ſeulement Mr. Jean Bernoulli, qui dans la Lettre XIV du *Commercium cité* a montré comment on pouvoit dans certains cas trouver l'intégrale d'une différentielle donnée en cherchant la troiſieme proportionelle à la différence de la quantité donnée & à cette même quantité, & changeant enſuite les puiſſances poſitives en différences, & les négatives en ſommes ou intégrales. Quoi-

que le principe de cette analogie entre les puissances positives & les différentielles, & les puissances négatives & les intégrales, ne soit pas évident par lui-même, cependant comme les conclusions qu'on en tire n'en sont pas moins exactes, ainsi qu'on peut s'en convaincre *a posteriori*, je vais en faire usage dans ce Mémoire pour découvrir différens théoremes généraux, concernant les différentiations & les intégrations des fonctions de plusieurs variables; théoremes dont la plupart sont nouveaux, & auxquels il seroit d'ailleurs très difficile de parvenir par d'autres voies.

C'est une espece particuliere de calcul qui me paroît mériter d'être cultivée & qui peut donner lieu à beaucoup de découvertes utiles & importantes dans l'analyse; l'objet principal de ce Mémoire est de donner plusieurs ouvertures pour cela, en montrant les regles qu'on doit suivre dans ce calcul & la maniere de l'appliquer à différentes recherches; mais je crois devoir commencer par établir quelques notions générales & préliminaires sur la nature des fonctions d'une ou de plusieurs variables, lesquelles pourroient servir d'introduction à une théorie générale des fonctions.

1. Si u est une fonction quelconque finie d'une variable x, qu'on y mette $x + \xi$ à la place de x, & que par la théorie connue des séries on dégage la nouvelle variable ξ de la fonction, on sait que u deviendra de cette forme

$$u + p\xi + p'\xi + p''\xi^3 + p'''\xi^4 + \&c.$$

où p, p', p'' &c. seront de nouvelles fonctions de x, dérivées d'une certaine maniere de la fonction u.

2. Si u est une fonction de deux variables x, y, qu'on y mette $x + \xi$ à la place de x, $y + \psi$ à la place de y, qu'ensuite on dégage les quantités ξ, ψ par le moyen des séries, la fonction u deviendra de la forme

$$\begin{array}{lllll} u & + p\xi & + q\psi & & \\ & + p'\xi^2 & + q'\xi\psi & + r'\psi^2 & \\ & + p''\xi^3 & + q''\xi^2\psi & + r''\xi\psi^2 & + s''\psi^3 \\ & + \&c. & & & \end{array}$$

où p, q, p', q', r', p'', q'' &c. feront de nouvelles fonctions de x, y dérivées d'une certaine maniere de la fonction u.

De même si u étoit fonction de trois variables x, y, z, en mettant $x + \xi$, $y + \psi$, $z + \zeta$ à la place de x, y, z, & développant par les séries, cette fonction deviendroit de la forme

$$\begin{aligned} u &+ p\xi + q\psi + r\xi \\ &+ p'\xi^2 + q'\xi\psi + r'\psi^2 + \alpha'\xi\zeta + \beta'\psi\zeta + \gamma'\zeta^2 \\ &+ p''\xi^3 + q''\xi^2\psi + r''\xi\psi^2 + s''\psi^3 + \alpha''\xi\zeta^2 + \text{\&c.} \\ &+ \text{\&c.} \end{aligned}$$

& ainsi de suite, si la fonction u renfermoit quatre variables ou cinq &c.

3. Le calcul différentiel considéré dans toute sa généralité consiste à trouver, directement & par des procédés simples & faciles, les fonctions p, p', p'' &c. q, q', q'' &c. r, r' &c. dérivées de la fonction u; & le calcul intégral consiste à retrouver la fonction u par le moyen de ces dernieres fonctions.

Cette notion des calculs différentiel & intégral me paroît la plus claire & la plus simple qu'on ait encore donnée; elle est, comme l'on voit, indépendante de toute métaphysique, & de toute théorie des quantités infiniment petites ou évanouissantes.

4. Considérons plus particulierement le cas de l'Art. 1. où u est supposé une fonction de x seul, & voyons comment les fonctions u, p, p', p'' &c. dépendent les unes des autres.

Puisque la fonction u, en y mettant $x + \xi$ à la place de x, est devenue

$$u + p\xi + p'\xi^2 + p''\xi^3 + \text{\&c.}$$

si dans cette derniere fonction on met de nouveau $x + \omega$ à la place de x, il est clair qu'elle deviendra de la forme

$$
\begin{aligned}
u &+ p\omega + p'\omega^2 + p''\omega^3 + p'''\omega^4 + \&c.\\
&+ (p + \pi\omega + \varrho\omega^2 + \sigma\omega^3 + \&c.)\xi\\
&+ (p' + \pi'\omega + \varrho'\omega^2 + \sigma'\omega^3 + \&c.)\xi^2\\
&+ (p'' + \pi''\omega + \varrho''\omega^2 + \sigma''\omega^3 + \&c.)\xi^3\\
&+ \&c.
\end{aligned}
$$

où π, ϱ, σ &c. feront des fonctions de x dérivées de la fonction p de la même maniere que p, p', p'' &c. le font de la fonction u, & π', ϱ', σ' &c. feront des fonctions dérivées de même de la fonction p', & π'', ϱ'', σ'' &c. des fonctions dérivées de p'' & ainfi des autres.

D'un autre côté il eft facile de voir que l'expreffion précédente ne fera autre chofe que ce que devient la fonction u en y mettant à la fois $x + \xi + \omega$ à la place de x, ou bien ce que devient l'expreffion

$$u + p\xi + p'\xi^2 + p''\xi^3 + p'''\xi^4 + \&c.$$

en y mettant $\xi + \omega$ à la place de ξ, c'eft à dire

$$u + p(\xi + \omega) + p'(\xi + \omega)^2 + p''(\xi + \omega)^3 + \&c.$$

Or en développant les puiffances de $\xi + \omega$, & ordonnant les termes on aura

$$
\begin{aligned}
u &+ p\omega + p'\omega^2 + p''\omega^3 + p'''\omega^4 + \&c.\\
&+ (p + 2p'\omega + 3p''\omega^2 + 4p'''\omega^3 + \&c.)\xi\\
&+ (p' + 3p''\omega + 6p'''\omega^2 + 10p^{\text{IV}}\omega^3 + \&c.)\xi^2\\
&+ (p'' + 4p'''\omega + 10p^{\text{IV}}\omega^2 + 20p^{\text{V}}\omega^3 + \&c.)\xi^3\\
&+ \&c.
\end{aligned}
$$

Donc, comme cette formule doit être identique avec la précédente, on aura

$$
\begin{aligned}
\pi &= 2p', & \varrho &= 3p'', & \sigma &= 4p''' \ \&c.\\
\pi' &= 3p'', & \varrho' &= 6p''', & \sigma' &= 10p^{\text{IV}} \ \&c.\\
\pi'' &= 4p''', & \varrho'' &= 10p^{\text{IV}}, & \sigma'' &= 20p^{\text{V}} \ \&c.
\end{aligned}
$$

&c.

Donc $p' = \frac{\pi}{2}$, $p'' = \frac{\pi'}{3}$, $p''' = \frac{\pi''}{4}$ &c.

Or de la même maniere que p eſt dérivé de u, π l'eſt de p, π' l'eſt de p', π'' l'eſt de p'' & ainſi de ſuite; donc, ſi on fait $p = u'$, & qu'on déſigne de même par u'' une fonction dérivée de u' de la même maniere que u' l'eſt de u, & par u''' une fonction dérivée de même de u'', & ainſi de ſuite, on aura

$$p = u', \quad \pi = u'', \quad \text{donc} \quad p' = \frac{u''}{2},$$

$$\text{donc} \quad \pi' = \frac{u'''}{2}, \quad \text{donc} \quad p'' = \frac{u'''}{2.\,3},$$

$$\text{donc} \quad \pi'' = \frac{u^{\text{IV}}}{2.\,3}, \quad \text{donc} \quad p''' = \frac{u^{\text{IV}}}{2.\,3.\,4}$$

&c.

Ainſi la fonction u deviendra, en mettant $x + \xi$ à la place de x,

$$u + u'\xi + \frac{u''\xi^2}{2} + \frac{u'''\xi^3}{2.\,3} + \frac{u^{\text{IV}}\xi^4}{2.\,3.\,4} + \text{\&c.}$$

où les fonctions $u, u', u'', u''', u^{\text{IV}}$ &c. dérivent l'une de l'autre par une même loi, de ſorte qu'on pourra les trouver aiſément par une même opération répétée.

5. Si maintenant on ſuppoſe que u ſoit une fonction de deux variables x & y, & qu'on cherche ce qu'elle devient en y mettant à la fois $x + \xi$ à la place de x, & $y + \psi$ à la place de y, on ſera d'abord la premiere de ces deux ſubſtitutions, ce qui réduira la fonction u à celle-ci (Art. préc.)

$$u + u'\xi + \frac{u''\xi^2}{2} + \frac{u'''\xi^3}{2.\,3} + \text{\&c.}$$

enſuite on fera la ſubſtitution de $y + \psi$ à la place de y dans les fonctions u, u', u'', u''' &c. & elles ſe changeront, ſavoir

$$u \text{ en } u + u_{\prime}\psi + \frac{u_{\prime\prime}\psi^2}{2} + \frac{u_{\prime\prime\prime}\psi^3}{2.\,3} + \text{\&c.}$$

$$u' \text{ en } u' + u'_{\prime}\psi + \frac{u'_{\prime\prime}\psi^2}{2} + \frac{u'_{\prime\prime\prime}\psi^3}{2.\,3} + \text{\&c.}$$

$$u'' \text{ en } u'' + u'',' \psi + \frac{u'','' \psi^2}{2} + \frac{u'',''' \psi^3}{2.\,3} + \text{&c.}$$

&c.

Ainsi la fonction u deviendra après les deux substitutions dont il s'agit

$$\begin{aligned} & u + u'\xi + u,'\psi \\ & + \frac{u''\xi^2}{2} + \frac{u','\xi\psi}{1.\,1} + \frac{u,''\psi^2}{2} \\ & + \frac{u'''\xi^3}{2.\,3} + \frac{u'','\xi^2\psi}{2.\,1} + \frac{u','' \xi\psi^2}{1.\,2} + \frac{u,'''\psi^3}{2.\,3} \\ & + \text{&c.} \end{aligned}$$

Les accens qui sont avant la virgule se rapportent au changement de x en $x + \xi$, & ceux qui sont après la virgule se rapportent au changement de y en $y + \psi$.

En général si u est une fonction de x, y, z, t &c. & qu'on y mette à la place de ces variables, $x + \xi$, $y + \psi$, $z + \zeta$, $t + \theta$ &c. la fonction dont il s'agit deviendra u + un nombre indéfini de termes tels que

$$\frac{u^{\mu,\,\nu,\,\pi,\,\varrho\ \text{&c.}}\ \xi^{\mu}\psi^{\nu}\zeta^{\pi}\theta^{\varrho}\ \text{&c.}}{1.\,2.\,3 \cdots \mu \times 1.\,2.\,3 \cdots \nu \times 1.\,2.\,3 \cdots \pi \times 1.\,2.\,3 \cdots \varrho \times \text{&c.}}$$

μ, ν, π, ϱ étant supposés successivement 0, 1, 2, 3 &c.

6. Puisqu'en mettant $x + \xi$ à la place de x dans u, cette fonction devient $u + u'\xi + \frac{u''\xi^2}{2} + \frac{u'''\xi^3}{2.\,3} +$ &c. si on regarde ξ comme infiniment petit & qu'on néglige les puissances ξ^2, ξ^3 &c. on aura simplement $u'\xi$ pour l'accroissement de u; de sorte que désignant cet accroissement par du, & l'accroissement ξ de x par dx, on aura $du = u'dx$, & $u' = \frac{du}{dx}$; ainsi pour avoir la fonction u', il n'y aura qu'à chercher la différentielle du par les regles du calcul des infiniment petits, & la diviser ensuite par la différentielle dx.

Ayant $u' = \frac{du}{dx}$ on aura de même $u'' = \frac{d.\frac{du}{dx}}{dx} = \frac{d^2 u}{dx^2}$, $u''' = \frac{d.\frac{d^2 u}{dx^2}}{dx} = \frac{d^3 u}{dx^3}$ &c.; de sorte que x devenant $x + \xi$ la fonction u deviendra

$$u + \frac{du}{dx}\xi + \frac{d^2 u}{dx^2} \times \frac{\xi^2}{2} + \frac{d^3 u}{dx^3} \times \frac{\xi^3}{2.3} + \&c.$$

où du, d^2u, d^3u &c. désignent les différences premiere, seconde, troisieme &c. de u prise en faisant varier x de la différence infiniment petite dx.

Ce théoreme est connu depuis longtems, & Mr. Tailor en est, si je ne me trompe, le premier auteur; on peut le démontrer de différentes manieres; la précédente me paroît une des plus simples.

7. Si au lieu de faire varier x, on fait varier y dans la supposition que u soit une fonction de x & y, on aura de même $du = u''dy$, & de là $u' = \frac{du}{dy}$, donc $u'' = \frac{d^2 u}{dy^2}$, $u''' = \frac{d^3 u}{dy^3}$ &c.

Par le même principe on aura $u'' = \frac{du'}{dy} = \frac{d.\frac{du}{dx}}{dy} = \frac{d^2 u}{dxdy}$, où d^2u indique la différentielle seconde de u, en faisant varier d'abord x, ensuite y; or comme les variations de x & de y sont indépendantes l'une de l'autre, il est facile de comprendre que l'on aura également $u'' = \frac{du''}{dx} = \frac{d.\frac{du}{dy}}{dx} = \frac{d^2 u}{dydx}$, où d^2u exprime maintenant la différentielle seconde de u prise en faisant varier d'abord y & ensuite x, de sorte qu'on aura $\frac{d^2 u}{dxdy} = \frac{d^2 u}{dydx}$, ce qui montre qu'il est indifférent dans quel ordre soient écrites les différences dx, dy. En général donc on aura $u^{\mu,\nu} = \frac{d^{\mu+\nu}u}{dx^\mu dy^\nu}$, où $d^{\mu+\nu}u$ indiquera la différentielle $(\mu+\nu)^{me}$ de u prise en faisant varier μ fois x,

& ν fois y, quelque ordre qu'on ſuive d'ailleurs dans ces variations; de ſorte qu'il y aura autant de manieres différentes de trouver la valeur de $\frac{d^{\mu+\nu}u}{dx^\mu dy^\nu}$ qu'il y aura de permutations entre deux choſes différentes répétées l'une μ fois, l'autre ν fois; or le nombre de ces permutations eſt, comme on ſait, égal à

$$\frac{1.\,2.\,3\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,(\mu+\nu)}{1.\,2.\,3\,-\,-\,-\,\mu\times 1.\,2.\,3\,-\,-\,-\,\nu}.$$

Et ſi u eſt une fonction de pluſieurs variables x, y, z, t &c. on aura $u^{\mu,\nu,\pi,\varrho\,\&c.} = \frac{d.^{\mu+\nu+\pi+\varrho\,\&c.}u}{dx^\mu dy^\nu dz^\pi dt^\varrho\ \&c.}$ & cette fonction pourra ſe produire d'autant de manieres différentes qu'il y aura de permutations entre différentes choſes dont l'une ſeroit répétée μ fois, l'autre ν fois, la troiſieme π fois, la quatrieme ϱ fois &c.; en ſorte que par les regles connues le nombre dont il s'agit ſera

$$\frac{1.\,2.\,3.\,4.\,5\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,(\mu+\nu+\pi+\varrho+\&c.)}{1.2.3\,-\,-\,-\,\mu\times 1.2.3\,-\,-\,-\,\nu\times 1.2.3\,-\,-\,-\,\pi\times 1.2.3\,-\,-\,-\,\varrho\times\&c.}$$

lequel eſt auſſi le coëfficient du terme $x^\mu y^\nu z^\pi t^\varrho$ . . . . dans la puiſſance $(x+y+z+t+\&c.)^{\mu+\nu+\pi+\varrho+\&c.}$.

8. De là & de ce qu'on a dit dans l'Art. 5. il s'enſuit que ſi dans une fonction u d'un nombre quelconque de variables x, y, z, t &c. on met $x+\xi$, $y+\psi$, $z+\zeta$, $t+\theta$ à la place de ces variables, la fonction propoſée ſera augmentée d'un nombre indéfini de termes repréſentés chacun par

$$\frac{\xi^\mu.\psi^\nu.\zeta^\pi.\theta^\varrho.\,.\,:\,.}{1.2.3\,-\,-\,-\,\mu\times 1.2.3\,-\,-\,-\,\nu\times 1.2.3\,-\,-\,-\,\pi\times 1.2.3\,-\,-\,-\,\varrho\times\&c.}$$
$$\times\frac{d^{\mu+\nu+\pi+\varrho+\&c.}u}{dx^\mu dy^\nu dz^\pi dt^\varrho\ \&c.}$$

ou

ou ce qui revient au même par

$$\frac{M \xi^{\mu} \psi^{\nu} \zeta^{\pi} \theta^{\varrho} \ldots}{1.\ 2.\ 3 \ldots (\mu + \nu + \pi + \varrho \ \&c.)} \times \frac{d.^{\mu + \nu + \pi + \varrho + \&c} u}{dx^{\mu} dy^{\nu} dz^{\pi} dt^{\varrho} \ \&c.}$$

M étant le coëfficient du terme $x^{\mu} y^{\nu} z^{\pi} t^{\varrho}$ &c. dans le polynome $x + y + z + t +$ &c. élevé à la puiſſance $\mu + \nu + \pi + \varrho +$ &c.

Ainſi, pour avoir aiſément les différens termes qui doivent compoſer l'accroiſſement de la valeur de la fonction u lorſque x, y, z, t &c. deviennent $x + \xi$, $y + \psi$, $z + \zeta$, $t + \theta$ &c. il n'y aura qu'à conſidérer la ſérie

$$\frac{x + y + z + t + \&c.}{1} + \frac{(x + y + z + t + \&c.)^2}{1.\ 2}$$
$$+ \frac{(x + y + z + t + \&c.)^3}{1.\ 2.\ 3} + \&c.$$

& après avoir développé les puiſſances de $x + y + z + t +$ &c. on changera, dans chaque terme, x en $\frac{\xi}{dx}$, y en $\frac{\psi}{dy}$, z en $\frac{\zeta}{dz}$, t en $\frac{\theta}{dt}$ &c. & on multipliera le même terme par $d^{\lambda} u$, l'expoſant de la différentiation λ étant égal à la ſomme des expoſans de x, y, z, t &c. dans le même terme.

Or on ſait que

$$\frac{x + y + z + t + \&c.}{1} + \frac{(x + y + z + t + \&c.)^2}{1.\ 2}$$
$$+ \frac{(x + y + z + t + \&c.)^3}{1.\ 2.\ 3} + \&c. = e^{x + y + z + t + \&c.} - 1$$
$$= e^x \times e^y \times e^z \times e^t \times \&c. - 1$$
$$= \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.\ 2} + \frac{x^3}{1.\ 2.\ 3} + \&c.\right)$$
$$\times \left(1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.\ 2} + \frac{y^3}{1.\ 2.\ 3} + \&c.\right)$$
$$\times \left(1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.\ 2} + \frac{z^3}{1.\ 2.\ 3} + \&c.\right)$$

$$\times \left(1 + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{1.\,2} + \frac{t^3}{1.\,2.\,3} + \text{\&c.}\right)$$

$$\times \text{ \&c.} - 1.$$

Par conséquent il n'y aura qu'à faire le produit de ces différentes séries, & changer ensuite chaque terme comme nous l'avons dit ci-dessus.

9. De là il est facile de conclure que si l'on considere l'expression

$$e^{\frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\psi + \frac{du}{dz}\zeta + \text{\&c.}} - 1$$

& qu'après l'avoir développée suivant les puissances de du, on applique les exposans de ces puissances à la caractéristique d pour indiquer des différences du même ordre que les puissances, c'est à dire qu'on change du^λ en $d^\lambda u$, on aura l'accroissement cherché de la fonction u lorsque x, y, z &c. y deviennent $x + \xi$, $y + \psi$, $z + \zeta$ &c.

Ainsi dénotant cet accroissement par Δu, on aura la formule générale

$$\Delta u = e^{\frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\psi + \frac{du}{dz}\zeta + \text{\&c.}} - 1.$$

10. Maintenant, comme Δu exprime la différence premiere finie de u, si on dénote de même par $\Delta^2 u$, $\Delta^3 . u$ &c. les différences finies de u des ordres ultérieurs, on pourra trouver la valeur de chacune de ces différences en ne faisant qu'élever l'équation précédente au carré, ou cube &c. & y changeant ensuite les exposans des puissances en exposans des différences.

De cette maniere on aura donc en général

$$\Delta^\lambda . u = (e^{\frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\psi + \frac{du}{dz}\zeta + \text{\&c.}} - 1)^\lambda$$

& il ne s'agira plus que de développer le second membre de cette équation de la maniere que nous l'avons dit à l'égard de celle de l'Art. préc.

Mais il y a plus; on peut supposer que l'exposant λ devienne négatif, auquel cas l'équation subsistera également si ce n'est que les différences qui auront un exposant négatif devront être censées changées en sommes du

même ordre. Ainſi déſignant, comme à l'ordinaire, par $\int$ les ſommes ou les intégrales ordinaires, qui répondent aux différences infiniment petites marquées par la caractériſtique d, & par Σ les ſommes finies qui répondent aux différences finies marquées par la caractériſtique Δ, on aura $d^{-1} = \int$, $d^{-2} = \int^2$ &c. & de même $\Delta^{-1} = \Sigma$, $\Delta^{-2} = \Sigma^2$ &c., & l'équation précédente deviendra en faiſant λ négatif, ou bien mettant $-\lambda$ à la place de λ, & par conſéquent Σ^λ à la place de Δ^λ,

$$\Sigma^\lambda.u = \frac{1}{(e^{\frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\psi + \frac{du}{dz}\zeta + \&c.} - 1)^\lambda}.$$

On traitera le ſecond membre de cette équation d'une maniere ſemblable à celle que nous avons preſcrite ci-deſſus.

Quoique l'opération par laquelle nous avons paſſé de la différence Δu, à la différence $\Delta^\lambda u$, & à la ſomme $\Sigma^\lambda u$, ne ſoit pas fondée ſur des principes clairs & rigoureux, elle n'en eſt cependant pas moins exacte, comme on peut s'en aſſurer *a poſteriori;* mais il ſeroit peut-être très difficile d'en donner une démonſtration directe & analytique; cela tient en général à l'analogie qu'il y a entre les puiſſances poſitives & les différentiations, auſſi bien qu'entre les puiſſances négatives & les intégrations; analogie dont nous verrons encore d'autres exemples dans la ſuite de ce Mémoire.

11. Suppoſons que u ſoit une fonction de x ſeul, on aura dans ce cas $\frac{du}{dy} = 0$, $\frac{du}{dz} = 0$ &c.; par conſéquent $\Delta^\lambda.u = (e^{\frac{du}{dx}\xi} - 1)^\lambda$.

Conſidérons donc l'expreſſion $(e^\omega - 1)^\lambda$, & voyons comment elle peut ſe développer en une ſérie réglée ſur les puiſſances de ω. Il eſt d'abord clair que ſi on fait ω très petit on aura $e^\omega - 1 = \omega$, d'où il s'enſuit que le premier terme de la ſérie ſera néceſſairement ω^λ. Suppoſons donc

$$(e^\omega - 1)^\lambda = \omega^\lambda(1 + A\omega + B\omega^2 + C\omega^3 + D\omega^4 + \&c.$$

& prenant les logarithmes de part & d'autre on aura

$$\lambda l(e^\omega - 1) - \lambda l\omega = l(1 + A\omega + B\omega^2 + C\omega^3 + D\omega^4 + \&c.)$$

& différentiant

$$\lambda\left(\frac{e^\omega}{e^\omega - 1} - \frac{1}{\omega}\right) = \frac{A + 2B\omega + 3C\omega^2 + 4D\omega^3 + \&c.}{1 + A\omega + B\omega^2 + C\omega^3 + D\omega^4 + \&c.};$$

or $\frac{e^\omega}{e^\omega - 1} = \frac{1}{1 - e^{-\omega}} = \frac{1}{\omega - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^3}{2.3} - \frac{\omega^4}{2.3.4} + \&c.}$

donc substituant cette valeur & multipliant en croix, on aura

$$\lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{\omega}{2.3} + \frac{\omega^2}{2.3.4} - \&c.\right)(1 + A\omega + B\omega^2 + C\omega^3 + \&c.)$$
$$= \left(1 - \frac{\omega}{2} + \frac{\omega^2}{2.3} - \frac{\omega^3}{2.3.4} + \&c.\right)(A + 2B\omega + 3C\omega^2 + \&c.)$$

c'est à dire

$$\frac{\lambda}{2} + \lambda\left(\frac{A}{2} - \frac{1}{2.3}\right)\omega + \lambda\left(\frac{B}{2} - \frac{A}{2.3} + \frac{1}{2.3.4}\right)\omega^2$$
$$+ \lambda\left(\frac{C}{2} - \frac{B}{2.3} + \frac{A}{2.3.4} - \frac{1}{2.3.4.5}\right)\omega^3 + \&c.$$
$$= A + \left(2B - \frac{A}{2}\right)\omega + \left(3C - \frac{2B}{2} + \frac{A}{2.3}\right)\omega^2$$
$$+ \left(4D - \frac{3C}{2} + \frac{2B}{2.3} - \frac{A}{2.3.4}\right)\omega^3 + \&c.$$

d'où, en comparant les termes, on aura

$$A = \frac{\lambda}{2}$$
$$2B = \frac{(\lambda + 1)A}{2} - \frac{\lambda}{2.3}$$
$$3C = \frac{(\lambda + 2)B}{2} - \frac{(\lambda + 1)A}{2.3} + \frac{\lambda}{2.3.4}$$
$$4D = \frac{(\lambda + 3)C}{2} - \frac{(\lambda + 2)B}{2.3} + \frac{(\lambda + 1)A}{2.3.4} - \frac{\lambda}{2.3.4.5}$$
&c.

Ayant ainsi déterminé les coëfficiens A, B, C &c. on mettra $\frac{du}{dx}\xi$ à la place de ω, & changeant les puissances de du en des différentielles de u, on aura en général

$$\Delta^\lambda . u = \frac{d^\lambda u}{dx^\lambda}\xi^\lambda + A\frac{d^{\lambda+1} u}{dx^{\lambda+1}}\xi^{\lambda+1} + B\frac{d^{\lambda+2} u}{dx^{\lambda+2}}\xi^{\lambda+2}$$
$$+ C\frac{d^{\lambda+3} u}{dx^{\lambda+3}}\xi^{\lambda+3} + \&c.$$

Cette formule servira donc à trouver immédiatement la différence d'un ordre quelconque d'une fonction quelconque de x lorsque x augmente successivement de ξ, 2ξ, 3ξ &c. & cela au moyen des différentielles ordinaires; ce qui peut être d'une grande utilité dans la théorie des séries.

Faisons maintenant λ négatif, c'est à dire mettons $-\lambda$ à la place de λ, pour changer les différences en sommes, & l'on aura dans ce cas,

$$\Sigma^\lambda . u = \frac{\int^\lambda u\, dx^\lambda}{\xi^\lambda} - \alpha\frac{\int^{\lambda-1} u\, dx^{\lambda-1}}{\xi^{\lambda-1}} + \beta\frac{\int^{\lambda-2} u\, dx^{\lambda-2}}{\xi^{\lambda-2}}$$
$$- \gamma\frac{\int^{\lambda-3} u\, dx^{\lambda-3}}{\xi^{\lambda-3}} + \&c.$$

où

$$\alpha = \frac{\lambda}{2}$$
$$2\beta = \frac{(\lambda-1)\alpha}{2} + \frac{\lambda}{2.3}$$
$$3\gamma = \frac{(\lambda-2)\beta}{2} + \frac{(\lambda-1)\alpha}{2.3} + \frac{\lambda}{2.3.4}$$
$$4\delta = \frac{(\lambda-3)\gamma}{2} + \frac{(\lambda-2)\beta}{2.3} + \frac{(\lambda-1)\alpha}{2.3.4} + \frac{\lambda}{2.3.4.5}$$
&c.

Si $\lambda = 1$, on aura donc

$$\Sigma u = \frac{\int u\, dx}{\xi} - \alpha u + \beta\frac{du}{dx}\xi - \gamma\frac{d^2 u}{dx^2}\xi^2 + \delta\frac{d^3 u}{dx^3}\xi^3 - \&c.$$

parce que $\int^{-1} u\, dx^{-1} = \frac{du}{dx}$, $\int^{-2} u\, dx^{-2} = \frac{d^2 u}{dx^2}$ &c.

C'est la formule connue pour trouver la somme d'une série dont on connoît le terme général.

En effet soit $u = \Phi x$, on aura par la nature des sommations

$$\Sigma u = \Phi(x - \xi) + \Phi(x - 2\xi) + \&c.;$$

donc, si suivant la notation reçue on fait $\int \Phi x \, dx = \dot{\Phi} x$, $\frac{d\Phi x}{dx} = \Phi' x$, $\frac{d^2 \Phi x}{dx^2} = \Phi'' x$ &c., on aura

$$\Phi(x - \xi) + \Phi(x - 2\xi) + \Phi(x - 3\xi) + \&c.$$

$$= \frac{\dot{\Phi} x}{\xi} - \alpha \Phi x + \beta \Phi' x . \xi - \gamma \Phi'' x . \xi^2 + \&c.$$

Si maintenant dans cette formule on écrit $x - n\xi$ à la place de x, on aura de même

$$+ \Phi(x - (n + 1)\xi) + \Phi(x - (n + 2)\xi) + \&c.$$

$$= \frac{\dot{\Phi}(x - n\xi)}{\xi} - \alpha \Phi(x - n\xi) + \beta \Phi'(x - n\xi) . \xi$$

$$- \gamma \Phi''(x - n\xi) . \xi^2 + \&c.$$

Donc retranchant cette équation de la précédente il viendra

$$\Phi(x - \xi) + \Phi(x - 2\xi) + \Phi(x - 3\xi) + \&c. + \Phi(x - n\xi)$$

$$= \frac{\dot{\Phi} x - \dot{\Phi}(x - n\xi)}{\xi} - \alpha(\Phi x - \Phi(x - n\xi))$$

$$+ \beta\xi(\Phi' x - \Phi'(x - n\xi)) - \gamma\xi^2(\Phi'' x - \Phi''(x - n\xi)) + \&c.$$

Nous ne nous étendrons pas en détails sur cette matiere parce qu'elle a déjà été traitée dans différens Ouvrages, & surtout dans le Traité des Fluxions de M. Maclaurin, & dans les Institutions du calcul différentiel de M. Euler; on trouve dans ce dernier Ouvrage des Remarques curieuses & importantes sur la nature & les propriétés de nombres α, β, γ &c. dans le cas de $\lambda = 1$; mais personne que je sache n'avoit encore donné l'expression générale de ces nombres pour les différences & les sommes d'un ordre quelconque.

12. Reprenons l'équation de l'Art. 10. savoir

$$\Delta u = e^{\frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\psi + \frac{du}{dz}\zeta + \&c.} - 1$$

elle donnera celle-ci

$$\frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\psi + \frac{du}{dz}\zeta + \&c. = l(1 + \Delta u)$$

où il faudra, après avoir développé le logarithme $l(1 + \Delta u)$ suivant les puissances de Δu, appliquer les exposans de ces puissances à la caractéristique Δ. De cette maniere on aura donc

$$\frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\psi + \frac{du}{dz}\zeta + \&c.$$
$$= \Delta u - \frac{\Delta^2 u}{2} + \frac{\Delta^3 u}{3} - \frac{\Delta^4 u}{4} + \&c.$$

ce qui donne un moyen de trouver les valeurs de $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ &c. à l'aide des différences finies de la fonction u.

Mais ce n'est pas tout; on peut également élever les deux membres de l'équation à une puissance quelconque λ, positive ou négative, en sorte que l'on ait

$$\left(\frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\psi + \frac{du}{dz}\zeta + \&c.\right)^\lambda = (l(1 + \Delta u))^\lambda,$$

& cette équation sera toujours vraie pourvu qu'après le développement des deux membres suivant les puissances de du & de Δu, on change les puissances positives en différences & les négatives en sommes.

Pour cet effet considérons la quantité $(l(1 + \omega))^\lambda$ & voyons comment elle peut se développer en une série qui procede suivant les puissances de ω. Il est d'abord clair que si ω étoit très petit on auroit $l(1 + \omega) = \omega$, d'où il s'ensuit que le premier terme de la série dont il s'agit sera ω^λ, & qu'ainsi elle aura cette forme

$$\omega^\lambda(1 + M\omega + N\omega^2 + P\omega^3 + Q\omega^4 + \&c.)$$

Suppofons donc

$$(l(1+\omega))^\lambda = \omega^\lambda(1 + M\omega + N\omega^2 + P\omega^3 + \&c.)$$

& prenant les logarithmes de part & d'autre on aura

$$\lambda(ll(1+\omega) - l\omega) = l(1 + M\omega + N\omega^2 + P\omega^3 + \&c.)$$

d'où l'on tirera par la différentiation

$$\lambda\left(\frac{1}{(1+\omega)l(1+\omega)} - \frac{1}{\omega}\right)$$
$$= \frac{M + 2N\omega + 3P\omega^2 + 4Q\omega^3 + \&c.}{1 + M\omega + N\omega^2 + P\omega^3 + Q\omega^4 + \&c.}.$$

Or $l(1+\omega) = \omega - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^3}{3} - \frac{\omega^4}{4} + \&c.$

donc multipliant cette férie par $1 + \omega$ on aura

$$(1+\omega)l(1+\omega) = \omega + \frac{\omega^2}{2} - \frac{\omega^3}{2.3} + \frac{\omega^4}{3.4} - \frac{\omega^5}{4.5} + \&c.$$

donc fubftituant cette valeur, & multipliant en croix, il viendra

$$\lambda\left(-\frac{1}{2} + \frac{\omega}{2.3} - \frac{\omega^2}{3.4} + \&c.\right)(1 + M\omega + N\omega^2 + P\omega^3 + \&c.)$$
$$= \left(1 + \frac{\omega}{2} - \frac{\omega^2}{2.3} + \frac{\omega^3}{3.4} - \&c.\right)(M + 2N\omega + 3P\omega^2 + \&c.)$$

c'eft à dire

$$-\frac{\lambda}{2} + \lambda\left(-\frac{M}{2} + \frac{1}{2.3}\right)\omega + \lambda\left(-\frac{N}{2} + \frac{M}{2.3} - \frac{1}{3.4}\right)\omega^2$$
$$+ \lambda\left(-\frac{P}{2} + \frac{N}{2.3} - \frac{M}{3.4} + \frac{1}{4.5}\right)\omega^3 + \&c.$$
$$= M + \left(2N + \frac{M}{2}\right)\omega + \left(3P + \frac{2N}{2} - \frac{M}{2.3}\right)\omega^2$$
$$+ \left(4Q + \frac{3P}{2} - \frac{2N}{2.3} + \frac{M}{3.4}\right)\omega^3 + \&c.$$

De forte qu'en comparant les termes on aura

$M =$

$$M = -\frac{\lambda}{2}$$

$$2N = -\frac{(\lambda + 1)M}{2} + \frac{\lambda}{2.3}$$

$$3P = -\frac{(\lambda + 2)N}{2} + \frac{(\lambda + 1)M}{2.3} - \frac{\lambda}{3.4}$$

$$4Q = -\frac{(\lambda + 3)P}{2} + \frac{(\lambda + 2)N}{2.3} - \frac{(\lambda + 1)M}{3.4} + \frac{\lambda}{4.5}$$

&c.

Connoiſſant de cette maniere les coëfficiens numériques M, N, P &c. on aura donc

$$(l(1 + \Delta u))^\lambda = \Delta^\lambda u + M\Delta^{\lambda+1}u + N\Delta^{\lambda+2}u + \&c.$$

ce qu'il faudra ſubſtituer dans l'équation ci-deſſus.

13. Soit, comme dans l'Art. 11, u une fonction de x ſeul, alors l'équation dont il s'agit deviendra $\left(\frac{du}{dx}\xi\right)^\lambda = (l(1 + \Delta u))^\lambda$, ſavoir

$$\frac{d^\lambda u}{dx^\lambda}\xi^\lambda = \Delta^\lambda.u + M\Delta^{\lambda+1}.u + N\Delta^{\lambda+2}.u + P\Delta^{\lambda+3}.u + \&c.$$

ce qui donne le moyen de trouver la valeur de la différentielle d'un ordre quelconque de la fonction u à l'aide des différences finies de la même fonction.

Or ſi dans la même formule on fait λ négatif, c'eſt à dire ſi l'on y met $-\lambda$ à la place de λ, on aura, en changeant les différences en ſommes,

$$\frac{\int^\lambda u\,dx^\lambda}{\xi^\lambda} = \Sigma^\lambda u + \mu\Sigma^{\lambda-1}u + \nu\Sigma^{\lambda-2}u + \pi\Sigma^{\lambda-3}u + \&c.$$

où les coëfficiens μ, ν, π &c. ſeront déterminés par les formules ſuivantes

$$\mu = \frac{\lambda}{2}$$

$$2\nu = \frac{(\lambda - 1)\mu}{2} - \frac{\lambda}{2.3}$$

$$3\pi = \frac{(\lambda - 2)\nu}{2} - \frac{(\lambda - 1)\mu}{2.3} + \frac{\lambda}{3.4}$$

$$4\chi = \frac{(\lambda - 3)\pi}{2} - \frac{(\lambda - 2)\nu}{2.3} + \frac{(\lambda - 1)\mu}{3.4} - \frac{\lambda}{4.5}$$

&c.

Si on fait $\lambda = 1$, on aura donc

$$\frac{\int u\,dz}{\xi} = \Sigma u + \mu u + \nu\Delta u + \pi\Delta^2 u + \chi\Delta^3 u + \&c.$$

formule qui peut ſervir à calculer les aires des courbes par les ſommes & les différences des coordonnées équidiſtantes. Cotes, Stirling & d'autres ont déjà donné des formules pour calculer l'aire d'une courbe dont on connoit un certain nombre de coordonnées équidiſtantes; mais la formule précédente eſt différente de celles de ces Auteurs, & me paroit préférable en ce qu'on y emploie les différences ſucceſſives des coordonnées lesquelles vont ordinairement en diminuant, & ſurtout en ce qu'on y voit aiſément la loi des termes, de maniere qu'on peut continuer la ſérie auſſi loin que l'on veut.

Pour donner un exemple de l'uſage de cette formule, ſoit propoſé de trouver l'intégrale de $\frac{dx}{x}$ qu'on ſait d'ailleurs être $= \mathrm{l}x$; on aura donc dans ce cas $u = \frac{1}{x}$, & faiſant pour plus de ſimplicité $\xi = 1$, on aura

$$\mathrm{l}x = \Sigma.\frac{1}{x} + \frac{\mu}{x} + \nu\Delta.\frac{1}{x} + \pi\Delta^2.\frac{1}{x} + \chi\Delta^3.\frac{1}{x} + \&c.$$

Or puiſque $\xi = 1$, on aura

$$\Sigma.\frac{1}{x} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \&c.$$

$$\Delta.\frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(x+1)},$$

$$\Delta^2.\frac{1}{x} = -\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{2}{x(x+1)(x+2)}$$

$$\Delta^3.\frac{1}{x} = \frac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)} - \frac{2}{x(x+1)(x+2)}$$

$$= -\frac{2.\,3}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$

& en général

$$\Delta^\lambda.\frac{1}{x} = \pm\frac{1.\;2.\;\;3\;-\;-\;-\;-\;\lambda}{x(x+1)(x+2)\;-\;-\;-\;-\;(x+\lambda)}$$

le ſigne ſupérieur étant pour le cas où λ pair, & l'inférieur pour le cas où λ impair.

Donc ſubſtituant ces valeurs on aura

$$lx = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \&c.$$

$$+ \frac{\mu}{x} - \frac{\nu}{x(x+1)} + \frac{2\pi}{x(x+1)(x+2)}$$

$$- \frac{2.3\chi}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + \&c.$$

De même ſi on met $x - n$ à la place de x, n étant un nombre entier quelconque, on aura

$$l(x-n) = \frac{1}{x-n-1} + \frac{1}{x-n-2} + \frac{1}{x-n-3} + \&c.$$

$$+ \frac{\mu}{x-n} - \frac{\nu}{(x-n)(x-n+1)} +$$

$$\frac{2\pi}{(x-n)(x-n+1)(x-n+2)} + \&c.$$

par conſéquent en retranchant cette équation de la précédente on aura

$$l\frac{x}{x-n} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \&c. + \frac{1}{x-n}$$
$$+ \mu\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-n}\right) - \nu\left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x-n)(x-n+1)}\right)$$
$$+ 2\pi\left(\frac{1}{x(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x-n)(x-n+1)(x-n+2)}\right)$$
$$- 2.3\chi\left(\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)} - \frac{1}{(x-n)(x-n+1)(x-n+2)(x-n+3)}\right)$$
$$+ \&c.$$

Si l'on fait $n = 1$, on aura

$$l\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{\mu}{(x-1)x} + \frac{2\nu}{(x-1)x(x+1)}$$
$$- \frac{2.3\pi}{(x-1)x(x+1)(x+2)} + \&c.$$

ou bien en mettant x à la place de $x - 1$, & par conséquent $x + 1$ à la place de x

$$l\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{\mu}{x(x+1)} + \frac{2\nu}{x(x+1)(x+2)}$$
$$- \frac{2.3\pi}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{2.3.4\chi}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} - \&c.$$

c'est à dire

$$l\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{\mu}{1+x} + \frac{\nu}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)}\right.$$
$$- \frac{\pi}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)}$$
$$\left. + \frac{\chi}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x}{4}\right)} - \&c.\right)$$

14. Nous avons vu que toute fonction u de plusieurs variables x, y, z &c. devient $u + \Delta u$ lorsque ces variables deviennent $x + \xi$, $y + \psi$, $z + \zeta$ &c. où l'accroissement Δu est déterminé par la formule

$$\Delta u = e^{\frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\psi + \frac{du}{dz}\zeta + \&c.} - 1.$$

De même si l'on suppose que les variables x, y, z &c. deviennent $x + \xi'$, $y + \psi'$, $z + \zeta'$ &c. ξ', ψ', ζ' &c. étant des quantités différentes de ξ, ψ, ζ &c. & qu'on désigne par $\Delta' u$ l'accroissement correspondant de u, on aura

$$\Delta' u = e^{\frac{du}{dx}\xi' + \frac{du}{dy}\psi' + \frac{du}{dz}\zeta' + \&c.} - 1.$$

Or la premiere équation donne, comme on l'a déjà vu plus haut,

$$\mathrm{l}(1 + \Delta u) = \frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\psi + \frac{du}{dz}\zeta + \&c.$$

& comme les quantités ξ, ψ, ζ &c. sont indépendantes les unes des autres, il est clair qu'en supposant d'abord $\psi = 0$, $\zeta = 0$ &c. on aura $\frac{du}{dx}\xi = \mathrm{l}(1 + \Delta u)$ où Δu désigne l'accroissement de u qui a lieu tandis que x seul croît de ξ; de sorte qu'en désignant cet accroissement partiel de u par $\overset{\xi}{\Delta} u$, on aura

$$\frac{du}{dx} = \frac{\mathrm{l}(1 + \overset{\xi}{\Delta}.u)}{\xi}.$$

De même si on désigne par $\overset{\psi}{\Delta}.u$, $\overset{\zeta}{\Delta}.u$ &c. les accroissemens partiels de u qui ont lieu lorsque y, z &c. deviennent chacun à part $y + \psi$, $z + \zeta$ &c. on aura

$$\frac{du}{dy} = \frac{\mathrm{l}(1 + \overset{\psi}{\Delta}.u)}{\psi},$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{\mathrm{l}(1 + \overset{\zeta}{\Delta}.u)}{\zeta}$$

&c.

Ainſi l'on aura

$$\frac{du}{dx}\xi' + \frac{du}{dy}\psi' + \frac{du}{dz}\zeta' + \&c.$$
$$= \frac{\xi'}{\xi}\,l(1 + \overset{\xi}{\Delta} u) + \frac{\psi'}{\psi}\,l(1 + \overset{\psi}{\Delta} u) + \frac{\zeta'}{\zeta}\,l(1 + \overset{\zeta}{\Delta} u) + \&c.$$
$$= l(1 + \overset{\xi}{\Delta} u)^{\frac{\xi'}{\xi}} \times (1 + \overset{\psi}{\Delta} u)^{\frac{\psi'}{\psi}} \times (1 + \overset{\zeta}{\Delta} u)^{\frac{\zeta'}{\zeta}} \times \&c.$$

Donc

$$e^{\frac{du}{dx}\xi' + \frac{du}{dy}\psi' + \frac{du}{dz}\zeta' + \&c.}$$
$$= (1 + \overset{\xi}{\Delta} u)^{\frac{\xi'}{\xi}} \times (1 + \overset{\psi}{\Delta} u)^{\frac{\psi'}{\psi}} \times (1 + \overset{\zeta}{\Delta} u)^{\frac{\zeta'}{\zeta}} \times \&c.$$

Et par conſéquent

$$\Delta' u = (1 + \overset{\xi}{\Delta} u)^{\frac{\xi'}{\xi}} \times (1 + \overset{\psi}{\Delta} u)^{\frac{\psi'}{\psi}} \times (1 + \overset{\zeta}{\Delta} u)^{\frac{\zeta'}{\zeta}} \times \&c. - 1$$

équation par laquelle on pourra déterminer la valeur complette de la différence $\Delta' u$ de la fonction u lorſque les variables x, y, z &c. y croiſſent en même tems de ξ', ψ', ζ' &c., au moyen des différences partielles $\overset{\xi}{\Delta} u$, $\overset{\psi}{\Delta} u$ &c. de la même fonction, leſquelles réſultent lorſque les variables x, y, z &c. croiſſent ſéparément des quantités ξ, ψ, ζ &c.

Pour pouvoir faire uſage de cette équation il faudra développer les puiſſances de $1 + \overset{\xi}{\Delta} u$, $1 + \overset{\psi}{\Delta} u$ &c. & le produit de ces puiſſances, ſuivant les puiſſances de Δu, enſuite on appliquera à la caractériſtique Δ l'expoſant de la puiſſance à laquelle la quantité Δu ſe trouvera élevée, & on multipliera enſemble les quantités qui ſe trouveront au-deſſus de la lettre Δ; ainſi par exemple $(\overset{\xi}{\Delta} u)^2$ donnera $\overset{\xi\xi}{\Delta^2} u$, ce qui indiquera la différence ſeconde de u priſe en faiſant varier x ſeul ſucceſſivement de x; mais $\overset{\xi}{\Delta} u \times \overset{\psi}{\Delta} u$ donnera $\overset{\xi\psi}{\Delta^2} u$, ce qui indiquera de même la différence ſeconde de u, mais priſe en faiſant varier d'abord x de ξ, & enſuite y

de ψ; & ainſi des autres. La raiſon de cette opération eſt facile à appercevoir par la nature de notre calcul.

On pourra auſſi tirer de là la valeur de la différence d'un degré quelconque, & pour cela il n'y aura qu'à élever les deux membres de l'équation à une puiſſance dont l'expoſant ſoit le même que celui du degré de la différence; de cette maniere on aura en général

$$\Delta^{\prime\lambda}. u = ((1 + \overset{\xi}{\Delta} u)^{\frac{\xi'}{\xi}} \times (1 + \overset{\psi}{\Delta} u)^{\frac{\psi'}{\psi}} \times (1 + \overset{\zeta}{\Delta} u)^{\frac{\zeta'}{\zeta}} \times \&c. - 1)^{\lambda}$$

& changeant λ en $-\lambda$ on aura auſſi

$$\Sigma^{\prime\lambda} u = \frac{1}{((1 + \overset{\xi}{\Delta} u)^{\frac{\xi'}{\xi}} \times (1 + \overset{\psi}{\Delta} u)^{\frac{\psi'}{\psi}} \times (1 + \overset{\zeta}{\Delta} u)^{\frac{\zeta'}{\zeta}} \times \&c. - 1)^{\lambda}}.$$

où il faudra développer le ſecond membre de la maniere que nous l'avons dit ci-deſſus.

15. Les formules précédentes renferment la théorie des interpolations priſe dans toute la généralité poſſible; par exemple ſuppoſons d'abord que l'on ait une fonction u de x ſeul, dont on connoiſſe les différentes valeurs lorſque x devient ſucceſſivement $x + \xi$, $x + 2\xi$, $x + 3\xi$ &c. & qu'on demande la valeur de la même fonction lorſque x devient $x + \xi'$, ξ' étant une quantité quelconque. On aura donc dans ce cas $\psi = 0$, $\zeta = 0$ &c. & par conſéquent

$$\Delta' u = (1 + \overset{\xi}{\Delta} u)^{\frac{\xi'}{\xi}} - 1.$$

Or la puiſſance $(1 + \overset{\xi}{\Delta} u)^{\frac{\xi'}{\xi}}$ étant développée ſuivant la méthode ordinaire donne

$$1 + \frac{\xi'}{\xi}(\overset{\xi}{\Delta} u) + \frac{\xi'(\xi' - \xi)}{2\xi^2}(\overset{\xi}{\Delta} u)^2 + \frac{\xi'(\xi' - \xi)(\xi' - 2\xi)}{2.3\xi^3}(\overset{\xi}{\Delta} u)^3 + \&c.$$

Donc changeant $(\overset{\xi}{\Delta} u)^2$ en $\overset{\xi}{\Delta}{}^2 u$, $(\overset{\xi}{\Delta} u)^3$ en $\overset{\xi}{\Delta}{}^3. u$ & ainſi de ſuite, on aura

$$\Delta' u = \frac{\xi' \overset{\xi}{\Delta} u}{\xi} + \frac{\xi'(\xi'-\xi)\overset{\xi\xi}{\Delta^2} u}{2\xi^2} + \frac{\xi'(\xi'-\xi)(\xi'-2\xi)\overset{\xi^3}{\Delta^3}. u}{2.3\,\xi^3} + \&c.$$

c'eſt l'accroiſſement que doit prendre la fonction u lorſque x devient $= x + \xi'$; de ſorte que la valeur de la fonction u répondante à $x + \xi'$ ſera exprimée par la ſérie

$$u + \frac{\xi'}{\xi}\overset{\xi}{\Delta}. u + \frac{\xi'(\xi'-\xi)}{2\xi^2}\overset{\xi^2}{\Delta^2}. u + \frac{\xi'(\xi'-\xi)(\xi'-2\xi)}{2.3\,\xi^3}\overset{\xi^3}{\Delta^3} u + \&c.$$

Ainſi ſi l'on a une ſérie dont les termes ſucceſſifs ſoient exprimés par une même fonction de x, $x + \xi$, $x + 2\xi$, $x + 3\xi$ &c. la formule précédente donnera la valeur d'un terme quelconque intermédiaire répondant à $x + \xi'$, en prenant pour u le terme répondant à x, pour $\overset{\xi}{\Delta}. u$ la différence entre les deux termes répondans à $x + \xi$ & x, pour $\overset{\xi^2}{\Delta^2}. u$ la différence ſeconde entre les trois termes répondans à $x + 2\xi$, $x + \xi$, x; & ainſi de ſuite.

16. Suppoſons maintenant que u ſoit une fonction de deux variables x & y, on aura dans ce cas en faiſant $\zeta' = 0$ &c.

$$\Delta' u = (1 + \overset{\xi}{\Delta} u)^{\frac{\xi'}{\xi}} \times (1 + \overset{\psi}{\Delta} u)^{\frac{\psi'}{\psi}} - 1.$$

La quantité $(1 + \overset{\xi}{\Delta} u)^{\frac{\xi'}{\xi}}$ donne comme ci-deſſus la ſérie

$$1 + \frac{\xi'}{\xi}\overset{\xi}{\Delta}. u + \frac{\xi'(\xi'-\xi)}{2\xi^2}\overset{\xi^2}{\Delta^2}. u + \frac{\xi'(\xi'-\xi)(\xi'-2\xi)}{2.3\,\xi^3}\overset{\xi^3}{\Delta^3}. u + \&c.$$

& de même la quantité $(1 + \overset{\psi}{\Delta} u)^{\frac{\psi'}{\psi}}$ donnera la ſérie

$$1 + \frac{\psi'}{\psi}\overset{\psi}{\Delta}. u + \frac{\psi'(\psi'-\psi)}{2\psi^2}\overset{\psi^2}{\Delta^2}. u + \frac{\psi'(\psi'-\psi)(\psi'-2\psi)}{2.3\,\psi^3}\overset{\psi^3}{\Delta^3}. u + \&c.$$

Donc multipliant une ſérie par l'autre & ayant égard aux remarques faites vers la fin de l'Art. 13, on aura

1 +

$$
\begin{aligned}
1 &+ \frac{\xi'}{\xi}\overset{\xi}{\Delta}.\,u + \frac{\psi'}{\psi}\overset{\psi}{\Delta}.\,u \\
&+ \frac{\xi'(\xi'-\xi)}{2\,\xi^2}\overset{\xi^2}{\Delta^2}.\,u + \frac{\xi'\psi'}{\xi\psi}\overset{\xi\psi}{\Delta^2}.\,u + \frac{\psi'(\psi'-\psi)}{2\,\psi^2}\overset{\psi^2}{\Delta^2}.\,u \\
&+ \frac{\xi'(\xi'-\xi)(\xi'-2\xi)}{2.3\,\xi^3}\overset{\xi^3}{\Delta^3}.\,u + \frac{\xi'(\xi'-\xi)}{2\,\xi^2}\times\frac{\psi'}{\psi}\overset{\xi^2\psi}{\Delta^3}.\,u \\
&+ \frac{\psi'(\psi'-\psi)}{2\,\psi^2}\times\frac{\xi'}{\xi}\overset{\psi^2\xi}{\Delta^3}.\,u + \frac{\psi'(\psi'-\psi)(\psi'-2\psi)}{2.3\,\psi^3}\overset{\psi^2}{\Delta^3}.\,u \\
&+ \&c.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\Delta' u = & \frac{\xi'}{\xi}\overset{\xi}{\Delta}.\,u + \frac{\psi'}{\psi}\overset{\psi}{\Delta}.\,u \\
&+ \frac{\xi'(\xi'-\xi)}{2\,\xi^2}\overset{\xi^2}{\Delta^2}.\,u + \frac{\xi'\psi'}{\xi\psi}\overset{\xi\psi}{\Delta^2}.\,u + \frac{\psi'(\psi'-\psi)}{2\,\psi^2}\overset{\psi^2}{\Delta^2}.\,u \\
&+ \frac{\xi'(\xi'-\xi)(\xi'-2\xi)}{2.3\,\xi^3}\overset{\xi^3}{\Delta^3}.\,u + \frac{\xi'(\xi'-\xi)}{2\,\xi^2}\times\frac{\psi'}{\psi}\overset{\xi^2\psi}{\Delta^3}.\,u \\
&+ \frac{\psi'(\psi'-\psi)}{2\,\psi^2}\times\frac{\xi'}{\xi}\overset{\psi^2\xi}{\Delta^3}.\,u + \frac{\psi'(\psi'-\psi)(\psi'-2\psi)}{2.3\,\psi^3}\overset{\psi^3}{\Delta^3}.\,u \\
&+ \&c.
\end{aligned}
$$

c'eſt l'accroiſſement que doit prendre la fonction u lorſque x & y y deviennent à la fois $x + \xi'$, $y + \psi'$ &c.

Cette formule ſervira comme l'on voit pour l'interpolation des tables à double entrée; & elle s'accorde avec celle que Mr. Lambert a donnée pour le même objet dans la troiſieme Partie de ſes *Beytræge &c.*

On pourra déduire avec la même facilité, de notre équation générale, les formules pour l'interpolation des tables à triple, quadruple &c. entrée; c'eſt ſur quoi il ne nous paroit pas néceſſaire de nous étendre davantage.

17. Nous allons donner maintenant une méthode facile & générale de trouver immédiatement les différences d'un ordre quelconque d'une fonction

quelconque de plusieurs variables, sans passer par les différences des ordres inférieurs. Pour cela on considérera que puisque Δu désigne en général la différence premiere de u, $\Delta^2 u$ la différence premiere de Δu, ou la différence seconde de u & ainsi de suite, les valeurs successives de u seront

$$u$$
$$u + \Delta u$$
$$u + 2\Delta u + \Delta^2 u$$
$$u + 3\Delta u + 3\Delta^2 u + \Delta^3 u$$
&c.

& en général

$$u + m\Delta u + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 u + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3}\Delta^3 u + \&c.$$

De même, en désignant par Δx, $\Delta^2 x$ &c. Δy, $\Delta^2 y$ &c. Δz, $\Delta^2 z$ &c. les différences premieres, secondes &c. des variables x, y, z &c. on aura pour les valeurs successives de x

$$x$$
$$x + \Delta x$$
$$x + 2\Delta x + \Delta^2 x$$
$$x + 3\Delta x + 3\Delta^2 x + \Delta^3 x$$
&c.

$$x + m\Delta x + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 x + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3}\Delta^3 x + \&c.$$

& ainsi de suite pour les valeurs successives de y, z &c.

Donc en général, si u est une fonction quelconque de x, y, z &c. il est clair que tandis que u devient

$$u + m\Delta u + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 u + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3}\Delta^3 u + \&c.$$

x, y, z &c. deviendront

$$x + m\Delta x + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 x + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\Delta^3 x + \&c.$$

$$y + m\Delta y + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 y + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\Delta^3 y + \&c.$$

$$z + m\Delta z + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 z + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\Delta^3 z + \&c.$$

&c.

D'où il s'enfuit qu'en défignant par $\Phi(x, y, z \&c.)$ la valeur de u, en forte que

$$u = \Phi(x, y, z \&c.)$$

on aura auffi

$$u + m\Delta u + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 u + \&c.$$

$$= \Phi\Big(x + m\Delta x + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 x + \&c.,$$

$$y + m\Delta y + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 y + \&c.,$$

$$z + m\Delta z + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 z + \&c., \quad \&c.\Big)$$

équation qui devra avoir lieu, quel que foit le nombre m; de forte qu'après le développement des termes il n'y aura qu'à comparer ceux qui feront affectés d'une même puiffance de m, & l'on aura autant d'équations qu'il en faudra pour déterminer les valeurs de chacune des différences Δu, $\Delta^2 u$ &c.

18. Suppofons que les différences deviennent infiniment petites & qu'en même tems le nombre m devienne infiniment grand, on aura dans cette hypothefe $m(m-1) = m^2$, $m(m-1)(m-2) = m^3$ &c.; donc changeant la caractériftique Δ en d, on aura l'équation

$$u + m\mathrm{d}u + \frac{m^2\,\mathrm{d}^2 u}{2} + \frac{m^3\,\mathrm{d}^3 u}{2.\ 3} + \&c.$$

$$= \varphi\Big(x + m\mathrm{d}x + \frac{m^2\,\mathrm{d}^2 x}{2} + \frac{m^3\,\mathrm{d}^3 x}{2.\ 3} + \&c.,$$

$$y + m\mathrm{d}y + \frac{m^2\,\mathrm{d}^2 y}{2} + \frac{m^3\,\mathrm{d}^3 y}{2.\ 3} + \&c.,$$

$$z + m\mathrm{d}z + \frac{m^2\,\mathrm{d}^2 z}{2} + \frac{m^3\,\mathrm{d}^3 z}{2.\ 3} + \&c.,\quad \&c.\Big)$$

Ainſi ſi on développe la fonction $\varphi(- - - -)$ ſuivant les puiſſances de m, en ſorte qu'il en réſulte une ſérie de cette forme

$$P + mQ + m^2R + m^3S + \&c.$$

on aura

$$u = P, \quad \mathrm{d}u = Q, \quad \frac{\mathrm{d}^2 u}{2} = R, \quad \frac{\mathrm{d}^3 u}{2.3} = S \quad \&c.$$

Par où l'on voit comment on peut trouver ſur le champ tous les différentiels de u; c'eſt ce que nous allons éclaircir par quelques exemples.

19. Suppoſons que u ſoit une fonction de x ſeul, & que $\mathrm{d}x$ ſoit ſuppoſé conſtant, on aura donc dans ce cas l'équation $u = \varphi x$ &

$$u + m\mathrm{d}u + \frac{m^2\,\mathrm{d}^2 u}{2} + \frac{m^3\,\mathrm{d}^3 u}{2.\ 3} + \&c. = \varphi(x + m\mathrm{d}x).$$

de ſorte qu'il ne s'agira que de développer la quantité $\varphi(x + m\mathrm{d}x)$ ſuivant les puiſſances de m.

Soit par exemple $\varphi x = (a + bx)^r$, on aura

$$\varphi(x + m\mathrm{d}x) = (a + bx + mb\mathrm{d}x)^r = (a + bx)^r$$

$$+ m \times rb(a + bx)^{r-1}\mathrm{d}x + m^2 \times \frac{r(r-1)b^2}{2}(a + bx)^{r-2}\mathrm{d}x^2$$

$$+ m^3 \frac{r(r-1)(r-2)b^3}{2.\ 3}(a + bx)^{r-3}\mathrm{d}x^3 + \&c.$$

donc comparant les termes affectés des mêmes puiſſances de m

$$u = (a + bx)^r$$
$$\mathrm{d}u = rb(a + bx)^{r-1}\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}^2u = r(r-1)b^2(a + bx)^{r-2}\mathrm{d}x^2$$
&c.

& en général

$$\mathrm{d}^\lambda u = r(r-1)(r-2) \cdots (r-\lambda+1)b^\lambda(a+bx)^{r-\lambda}\mathrm{d}x^\lambda.$$

On remarquera ici, & la même remarque aura toujours lieu dans les cas ſemblables, que puiſque l'on a l'expreſſion générale de la différentielle de l'ordre λ, on pourra en faiſant λ négatif avoir celle de l'intégrale du même ordre λ; ainſi l'on aura

$$\int^\lambda u = r(r-1)(r-2) \cdots (r+\lambda+1)\frac{(a+bx)^{r+\lambda}}{b^\lambda \mathrm{d}x^\lambda};$$

or comme les facteurs r, $r-1$, $r-2$ &c. vont en diminuant, & que le dernier doit être $r+\lambda+1$ qui eſt au contraire plus grand que r, cela indique qu'il faut continuer la ſérie de ces facteurs du côté oppoſé, en employant les diviſions au lieu des multiplications de cette maniere

$$\frac{1}{(r+1)(r+2)(r+3) \cdots (r+\lambda)},$$

on aura donc en multipliant par $\mathrm{d}x^\lambda$

$$\int^\lambda u\,\mathrm{d}x^\lambda = \frac{(a+bx)^{r+\lambda}}{(r+1)(r+2)(r+3) \cdots (r+\lambda)b^\lambda};$$

ce qui s'accorde avec ce que l'on ſait d'ailleurs.

20. Dans le cas de l'exemple précédent il auroit été facile de trouver la valeur générale de $\mathrm{d}^\lambda u$ par la méthode ordinaire des différentiations, mais il n'en feroit pas de même ſi la fonction ϕx étoit tant ſoit peu plus compliquée.

Suppoſons en effet $\phi x = (a + bx + cx^2)^r = u$, on verra aiſément que les différentiels de ϕx ſeront exprimés par des ſéries dont il

ne ſera pas aiſé de trouver la loi, pour avoir l'expreſſion de $d^{\lambda}.\phi x$; ſuivant notre méthode il n'y aura qu'à mettre $x + m\,dx$ à la place de x, ce qui rendra $a + bx + cx^2$ égal à $a + bx + cx^2 + m(b + 2cx)\,dx + m^2c\,dx^2$; de ſorte que la difficulté ne conſiſtera qu'à réduire l'expreſſion

$$(a + bx + cx^2 + m(b + 2cx)dx + m^2c\,dx^2)^r$$

en une ſérie qui procede ſuivant les puiſſances de m.

Faiſons pour plus de ſimplicité

$$a + bx + cx^2 = p$$
$$b + 2cx = q$$

en ſorte que la quantité propoſée devienne

$$(p + mq\,dx + m^2c\,dx^2)^r.$$

Je la développe d'abord ainſi

$$(p + mq\,dx)^r + r(p + mq\,dx)^{r-1}cm^2dx^2$$
$$+ \frac{r(r-1)}{2}(p + mq\,dx)^{r-2}c^2m^4dx^4$$
$$+ \frac{r(r-1)(r-2)}{2.\ 3}(p + mq\,dx)^{r-3}c^3m^6dx^6$$
$$+ \&c.$$

& il ne s'agira plus que de développer de même les différentes puiſſances de $p + qm\,dx$.

Suppoſons qu'on veuille avoir en général le terme qui ſera affecté de la puiſſance m^{λ}, il eſt clair que ſi on dénote par $Am^{\lambda}dx^{\lambda}$ le terme affecté de m^{λ} dans la puiſſance $(p + mq\,dx)^r$, par $Bm^{\lambda-2}dx^{\lambda-2}$ le terme affecté de $m^{\lambda-2}$ dans la puiſſance $(p + mq\,dx)^{r-1}$, par $Cm^{\lambda-4}dx^{\lambda-4}$ le terme affecté de $m^{\lambda-4}$ dans la puiſſance $(p + mq\,dx)^{r-2}$ & ainſi de ſuite, il eſt clair, dis-je, que le terme affecté de m^{λ} dans la ſérie précédente ſera repréſenté par

$$\left(A + rBc + \frac{r(r-1)}{2}Cc^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3}Dc^3 + \&c.\right)m^\lambda dx^\lambda;$$

or le terme affecté de m^λ dans la férie $u + m du + \frac{m^2 d^2 u}{2} + \&c.$ eft évidemment

$$\frac{m^\lambda d^\lambda u}{1.2.3 \text{ - - - - } \lambda};$$

ainfi comparant ces deux termes on aura

$$d^\lambda u = 1.2.3 \text{ - - - } \lambda\left(A + rBc + \frac{r(r-1)}{2}Cc^2 + \&c.\right)dx^\lambda$$

où $u = p^r$.

Mais il eft facile de voir que l'on aura

$$A = \frac{r(r-1)(r-2) \text{ - - - } (r-\lambda+1)}{1.\ 2.\ 3 \text{ - - - - } \lambda}p^{r-\lambda}q^\lambda$$

$$B = \frac{(r-1)(r-2)(r-3) \text{ - - - } (r-\lambda+2)}{1.\ 2.\ 3 \text{ - - - - } \lambda-2}p^{r-\lambda+1}q^{\lambda-2}$$

$$C = \frac{(r-2)(r-3)(r-4) \text{ - - - - } (r-\lambda+3)}{1.\ 2.\ 3 \text{ - - - - } \lambda-4}p^{r-\lambda+2}q^{\lambda-4}$$

$$D = \frac{(r-3)(r-4)(r-5) \text{ - - - - } (r-\lambda+4)}{1.\ 2.\ 3 \text{ - - - - } \lambda-6}p^{r-\lambda+3}q^{\lambda-6}$$

&c.

Donc fubftituant ces valeurs, & faifant attention que

$$\frac{(r-1)(r-2) \text{ - - - } (r-\lambda+2)}{1.\ 2 \text{ - - - } \lambda-2} = \frac{r(r-1)(r-2) \text{ - - - } (r-\lambda+1)}{1.\ 2.\ 3 \text{ - - - - } \lambda} \times \frac{\lambda(\lambda-1)}{r(r-\lambda+1)}$$

$$\frac{(r-2)(r-3) \text{ - - - } (r-\lambda+3)}{1.\ 2 \text{ - - - - } \lambda-4} = \frac{r(r-1)(r-2) \text{ - - - } (r-\lambda+1)}{1.\ 2.\ 3 \text{ - - - - } \lambda} \times \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{r(r-1)(r-\lambda+1)(r-\lambda+2)}$$

& ainfi de fuite, on aura

$$\mathrm{d}^\lambda . p^r = r(r-1)(r-2) \text{ - - - - } (r-\lambda+1)p^{r-\lambda}q^\lambda \mathrm{d}x^\lambda$$
$$\times \left(1 + \frac{\lambda(\lambda-1)}{r-\lambda+1} \cdot \frac{cp}{q^2} + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{2(r-\lambda+1)(r-\lambda+2)} \cdot \frac{c^2p^2}{q^4} \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda(\lambda-1) \text{ - - - } (\lambda-5)}{2.3(r-\lambda+1)(r-\lambda+2)(r-\lambda+3)} \cdot \frac{c^3p^3}{q^6} + \&c.\right)$$

où

$$p = a + bx + cx^2$$
$$q = b + 2cx.$$

De là on peut, en changeant λ en $-\lambda$, tirer la valeur de $\int^\lambda p^r \mathrm{d}x^\lambda$, & l'on trouvera, d'après ce qui a été remarqué dans l'Art. préc.

$$\int^\lambda p^r \mathrm{d}x^\lambda = \frac{p^{r+\lambda}}{(r+1)(r+2) \text{ - - - - } (r+\lambda)q^\lambda}$$
$$\times \left(1 + \frac{\lambda(\lambda+1)}{r+\lambda+1} \cdot \frac{cp}{q^2} + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{2(r+\lambda+1)(r+\lambda+2)} \cdot \frac{c^2p^2}{q^4} \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda(\lambda+1) \text{ - - - } (\lambda+5)}{2.3(r+\lambda+1)(r+\lambda+2)(r+\lambda+3)} \cdot \frac{c^3p^3}{q^6} + \&c.\right).$$

Ainsi faisant $\lambda = 1$ on aura

$$\int p^r \mathrm{d}x = \frac{p^{r+1}}{(r+1)q}\left(1 + \frac{2cp}{(r+2)q^2} + \frac{3.4c^2p^2}{(r+2)(r+3)q^4} \right.$$
$$\left. + \frac{4.5.6c^3p^3}{(r+2)(r+3)(r+4)q^6} + \&c.\right)$$

ce qu'on peut aisément vérifier par la différentiation.

Si dans l'expression précédente on fait $2c = k$, on aura plus simplement

$$\int p^r \mathrm{d}x = \frac{p^{r+1}}{(r+1)q} + \frac{kp^{r+2}}{(r+1)(r+2)q^3} + \frac{1.3k^2p^{r+3}}{(r+1)(r+2)(r+3)q^5}$$
$$+ \frac{1.3.5k^3p^{r+4}}{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)q^7} + \&c.$$

& on reconnoîtra facilement la vérité de cette formule en remarquant que $\mathrm{d}p = q\mathrm{d}x$, & $\mathrm{d}q = k\mathrm{d}x$.

21. On

21. On peut encore trouver une autre expreſſion de $d^{\lambda} u$, laquelle reviendra au même pour le fond, mais qui pourra être regardée comme plus ſimple pour la forme.

Pour cela je reprends la quantité

$$(p + mq\,dx + m^2 c\,dx^2)^r$$

dont il s'agit de trouver le terme affecté de m^{λ}, & je fais pour un moment $dx = 2p\,dt$, elle deviendra

$$p^r \times (1 + 2mq\,dt + 4m\,pc\,dt^2)^r;$$

je conſidere maintenant que $4pc - q^2 = 4c(a + bx + cx^2) - (b + 2cx)^2 = 4ca - b^2$; d'où il s'enſuit que ſi on fait pour abréger

$$4ca - b^2 = h$$

on aura $4pc = h + q^2$, ce qui réduira l'expreſſion précédente à celle-ci:

$$p^r((1 + mq\,dt)^2 + m^2 h\,dt^2)^r.$$

Or la quantité $((1 + mq\,dt)^2 + m^2 h\,dt^2)^r$ ſe développe d'abord en cette ſérie

$$(1 + mq\,dt)^{2r} + r(1 + mq\,dt)^{2r-2} h m^2 dt^2$$

$$+ \frac{r(r-1)}{2}(1 + mq\,dt)^{2r-4} h^2 m^4 dt^4$$

$$+ \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3}(1 + mq\,dt)^{2r-6} h^3 m^6 dt^6$$

$$+ \&c.$$

enſuite développant encore chaque puiſſance de $1 + mq\,dt$, on trouvera que le terme affecté de m^{λ} ſera repréſenté par la ſérie

$$\frac{2r(2r-1)(2r-2)\;-\;-\;-\;-\;(2r-\lambda+1)}{1.\quad 2.\quad 3\;-\;-\;-\;-\;\lambda} m^\lambda q^\lambda \mathrm{d}t^\lambda$$
$$+\; r\,.\,\frac{(2r-2)(2r-3)\;-\;-\;-\;(2r-\lambda+1)}{1.\quad 2.\quad 3\;-\;-\;-\;\lambda-2} m^\lambda q^{\lambda-2} h\,\mathrm{d}t^\lambda$$
$$+\; \frac{r(r-1)}{2}\,.\,\frac{(2r-4)(2r-5)\;-\;-\;-\;(2r-\lambda+1)}{1.\quad 2.\quad 3\;-\;-\;-\;\lambda-4} m^\lambda q^{\lambda-4} h^2\,\mathrm{d}t^\lambda$$
$$+\;\&c.$$

Ainsi cette série multipliée par p^r sera égale au terme

$$\frac{m^\lambda \mathrm{d}^\lambda u}{1.\;2.\;3\;-\;-\;-\;-\;\lambda}.$$

de sorte qu'on aura, en remettant $\frac{\mathrm{d}x}{2p}$ à la place de $\mathrm{d}t$, & p^r à la place de u,

$$\mathrm{d}^\lambda.p^r = 2r(2r-1)(2r-2)\;-\;-\;-\;(2r-\lambda+1)\left(\frac{q}{2}\right)^\lambda p^{r-\lambda}\mathrm{d}x^\lambda$$
$$\times\left(1 + r\,\frac{\lambda(\lambda-1)}{2r(2r-1)}\,.\,\frac{h}{q^2} + \frac{r(r-1)}{2}\,.\,\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{2r(2r-1)(2r-2)(2r-3)}\,.\,\frac{h^2}{q^4}\right.$$
$$\left. + \frac{r(r-1)(r-2)}{2.\;3}\,.\,\frac{\lambda(\lambda-1)\;-\;-\;-\;(\lambda-5)}{2r(2r-1)\;-\;-\;-\;(2r-5)}\,.\,\frac{h^3}{q^6} + \&c.\right)$$

Si dans cette formule on fait $r = -\frac{1}{2}$, & $p = 1 - x^2$, par conséquent $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$, $q = -2x$, $h = -4$, on aura

$$\mathrm{d}^\lambda.\,\frac{1}{V(1-x^2)} = \frac{1.\;2.\;3\;-\;-\;-\;\lambda x^\lambda \mathrm{d}x^\lambda}{(1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}}}$$
$$\times\left(1 + \frac{1}{2}\,.\,\frac{\lambda(\lambda-1)}{1.\;2\,x^2} + \frac{1.\;3}{2.\;4}\,.\,\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{1.\;2.\;3.\;4\,x^4}\right.$$
$$\left. + \frac{1.\;3.\;5}{2.\;4.\;6}\,.\,\frac{\lambda(\lambda-1)\;-\;-\;-\;(\lambda-5)}{1.\;2\;-\;-\;-\;6\,x^6} + \&c.\right).$$

C'est la formule que Mr. Euler a trouvée par induction dans ses Institutions du calcul différentiel.

On peut aussi, dans la formule générale ci-dessus, faire λ négatif, & l'on aura alors, comme dans l'Art. précédent,

$$\int^{\lambda} p^r \mathrm{d}x^{\lambda} = \frac{p^{r+\lambda}}{(2r+1)(2r+2)\;-\;-\;-\;(2r+\lambda)\left(\frac{q}{2}\right)^{\lambda}}$$

$$\times \left(1 + r\frac{\lambda(\lambda+1)}{2r(2r-1)} \cdot \frac{h}{q^2} + \frac{r(r-1)}{2} \cdot \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{2r(2r-1)(2r-2)(2r-3)} \cdot \frac{h^2}{q^4}\right.$$

$$\left. + \frac{r(r-1)(r-2)}{2.\ 3} \cdot \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\;-\;-\;-\;(\lambda+5)}{2r(2r-1)(2r-2)\;-\;-\;-\;(2r-5)} \cdot \frac{h^3}{q^6} + \&c.\right).$$

Ainsi faisant $\lambda = 1$, on aura

$$\int p^r \mathrm{d}x = \frac{2p^{r+1}}{(2r+1)q}\left(1 + \frac{h}{(2r-1)q^2} + \frac{3h^2}{(2r-1)(2r-3)q^4}\right.$$

$$\left. + \frac{3.\ 5h^3}{(2r-1)(2r-3)(2r-5)q^6} + \&c.\right).$$

Au reste ces formules pour les intégrations sont en quelque sorte plus curieuses qu'utiles, parce qu'elles ont toujours l'inconvénient d'aller à l'infini, même quand l'intégrale peut être exprimée d'une maniere finie; mais elles n'en sont pas moins remarquables, puisqu'elles servent à montrer de plus en plus l'analogie qu'il y a entre les différentiations & les intégrations.

22. Soit à présent u une fonction de x & y, & supposons par exemple $u = xy$, on aura donc (Art. 18.)

$$u + m\mathrm{d}u + \frac{m^2\mathrm{d}^2u}{2} + \frac{m^3\mathrm{d}^3u}{2.\ 3} + \&c.$$

$$= \left(x + m\mathrm{d}x + \frac{m^2\mathrm{d}^2x}{2} + \frac{m^3\mathrm{d}^3x}{2.\ 3} + \&c.\right)$$

$$\times \left(y + m\mathrm{d}y + \frac{m^2\mathrm{d}^2y}{2} + \frac{m^3\mathrm{d}^3y}{2.\ 3} + \&c.\right)$$

$$= xy + m(x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x)$$

$$+ m^2\left(\frac{x\mathrm{d}^2y}{2} + \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{y\mathrm{d}^2x}{2}\right)$$

$$+ m^3\left(\frac{x\mathrm{d}^3y}{1.2.3} + \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}^2y}{1.\ 1.\ 2} + \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}^2x}{1.\ 1.\ 2} + \frac{y\mathrm{d}^3x}{1.2.3}\right)$$

$$+ \&c.$$

Donc comparant les termes affectés des mêmes puiſſances de m, on aura

$$u = xy$$
$$du = xdy + ydx$$
$$d^2u = xd^2y + 2dxdy + yd^2x$$
$$d^3u = xd^3y + 3dxd^2y + 3dyd^2x + yd^3x$$

&c.

& en général

$$d^\lambda u = yd^\lambda x + \lambda dy d^{\lambda-1}x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} d^2y d^{\lambda-2}x + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{2.\ 3} d^3y d^{\lambda-3}x + \&c.$$

c'eſt la ſérie que Leibnitz a donnée dans le Tome cité des *Miſcellanea Berolinenſia.*

Si dans cette ſérie on fait λ négatif, c'eſt à dire qu'on y mette $-\lambda$ à la place de λ, & qu'on change en conſéquence les différences dont l'expoſant ſera négatif en intégrales du même ordre, on aura

$$\int^\lambda u = y\int^\lambda x - \lambda dy \int^{\lambda+1} x + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} d^2y \int^{\lambda+2} x - \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{2.\ 3} d^3y \int^{\lambda+3} x + \&c.$$

or ſi on ſuppoſe, ce qui eſt permis, que la différentielle dx ſoit conſtante, on aura $\int x = \frac{x^2}{2dx}$, $\int^2 x = \frac{x^3}{2.\ 3dx^2}$ & en général

$$\int^\mu x = \frac{x^{\mu+1}}{2.\ 3.\ 4\ -\ -\ -\ (\mu+1)dx^\mu};$$

donc ſubſtituant ces valeurs dans l'équation précédente, & la multipliant toute par dx^λ, elle deviendra

$$\int^\lambda u\, dx^\lambda = \frac{x^{\lambda+1}y}{2.\ 3\ -\ -\ -\ (\lambda+1)} - \frac{\lambda x^{\lambda+2}dy}{2.\ 3\ -\ -\ -\ (\lambda+2)dx} + \frac{\lambda(\lambda+1)x^{\lambda+3}d^2y}{2.\ 2.\ 3\ -\ -\ -\ (\lambda+3)dx^2} - \&c.$$

Si dans la formule ci-dessus on met dx à la place de x, en sorte que $u = y dx$, il faudra mettre $\int^\lambda dx = \int^{\lambda-1} x$ à la place de $\int^\lambda x$, & ainsi des autres, & l'on aura

$$\int^\lambda y dx = y \int^{\lambda-1} x - \lambda dy \int^\lambda x + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} d^2 y \int^{\lambda+1} x - \&c.$$

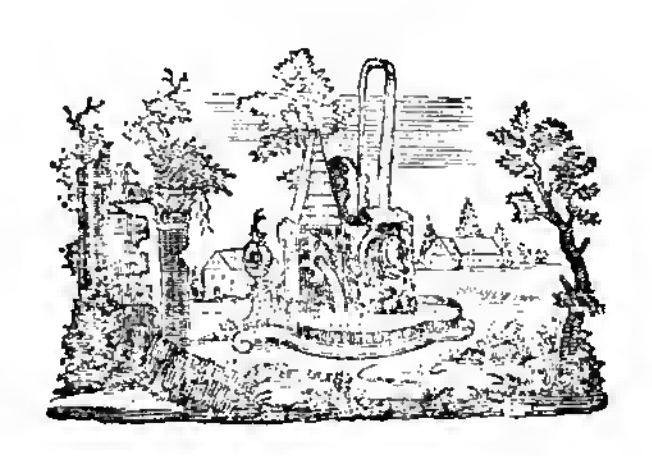
ou bien, en substituant les valeurs de $\int^{\lambda-1} x$, $\int^\lambda x$ &c. & multipliant toute l'équation par $dx^{\lambda-1}$

$$\int^\lambda y dx^\lambda = \frac{x^\lambda y}{2.3 \dots \lambda} - \frac{\lambda x^{\lambda+1} dy}{2.3 \dots (\lambda+1) dx}$$
$$+ \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} \cdot \frac{x^{\lambda+2} d^2 y}{2.3 \dots (\lambda+2) dx^2} - \&c.$$

Si $\lambda = 1$, on aura donc

$$\int y dx = xy - \frac{x^2 dy}{2 dx} + \frac{x^3 d^2 y}{2.3 dx^2} - \&c.$$

c'est la série que Mr. Jean Bernoulli a donnée dans les Actes de Leipsic de 1694.



SUR

LA FORME DES RACINES IMAGINAIRES DES ÉQUATIONS.

PAR M. DE LA GRANGE.

Il ſemble que les Analyſtes ayent toujours regardé comme vraie cette propoſition, que toutes les racines imaginaires des équations peuvent ſe réduire à la forme $A + B\sqrt{-1}$, A & B étant des quantités réelles; mais ce n'eſt que dans ces derniers tems qu'on eſt parvenu à la démontrer d'une maniere rigoureuſe & générale.

La premiere démonſtration qu'on ait donnée de ce beau théoreme eſt celle qui ſe trouve dans les Mémoires de cette Académie pour l'année 1746, & qui eſt due à Mr. d'Alembert; cette démonſtration eſt très ingénieuſe, & ne laiſſe, ce me ſemble, rien à deſirer du côté de l'exactitude; mais elle eſt indirecte, étant tirée de la conſidération des courbes & des ſuites infinies; & elle porte naturellement à croire qu'on peut arriver au même but par une analyſe plus ſimple, fondée uniquement ſur la théorie des équations. En effet, comme le radical imaginaire $\sqrt{-1}$ peut avoir indifféremment le ſigne $+$ ou $-$, il eſt clair que s'il y a dans une équation quelconque une racine qui ſoit repréſentée par $A + B\sqrt{-1}$, il devra y en avoir en même tems une autre qui le ſoit par $A - B\sqrt{-1}$; ainſi chaque facteur imaginaire tel que $x - A - B\sqrt{-1}$, ſera toujours accompagné du facteur correſpondant $x - A + B\sqrt{-1}$; en ſorte que le produit de ces facteurs ſera $x^2 - 2Ax + A^2 + B^2$, qui eſt un facteur du ſecond degré tout réel.

D'où il ſuit que toute équation pourra ſe décompoſer en des facteurs réels du premier ou du ſecond degré. Or cette propoſition paroit de na-

ture à pouvoir être démontrée par les ſeuls principes de la théorie des équations; & il eſt clair qu'il ſuffit pour cela de prouver que toute équation d'un degré plus haut que le ſecond peut toujours ſe partager en deux autres équations dont les coëfficiens ſoient des quantités réelles. C'eſt l'objet que Mr. Euler s'eſt propoſé dans les ſavantes recherches qu'il a données dans les Mémoires de 1749, ſur les racines imaginaires des équations. Il y conſidere ſéparément le cas où l'expoſant de l'équation eſt une puiſſance de deux, & celui où cet expoſant eſt une puiſſance de deux multipliée par un nombre quelconque impair; & dans ce dernier cas il trouve que toute équation du degré $2^n . m$ (m étant un nombre impair) peut être diviſée par une équation du degré 2^n dont le coëfficient du ſecond terme ſoit déterminé par une équation d'un degré impair, laquelle aura par conſéquent toujours une racine réelle; de là Mr. Euler conclut d'abord que les coëfficiens des autres termes auront auſſi des valeurs réelles, parce qu'il ſuppoſe qu'en éliminant ſucceſſivement les puiſſances de ces coëfficiens plus hautes que la premiere, à l'aide des différentes équations de condition qu'on aura entre tous les coëfficiens, on puiſſe toujours parvenir à déterminer les coëfficiens dont il s'agit par des fonctions rationelles de celui du ſecond terme; cette réduction paroit en effet toujours poſſible en général; il ſe trouve néanmoins des cas particuliers où elle ne ſauroit avoir lieu, & dans leſquels par conſéquent la démonſtration de Mr. Euler ſera inſuffiſante; mais cette démonſtration eſt ſurtout inſuffiſante à l'égard du premier cas où le degré de l'équation propoſée eſt ſuppoſé être une puiſſance de 2.

La réſolution de ce cas paroit d'abord beaucoup plus difficile; car lorsqu'on cherche à diviſer une équation ou degré 2^n par une autre équation d'un degré inférieur quelconque, on parvient toujours à des équations de degrés pairs pour la détermination de ſes coëfficiens; de ſorte que pour pouvoir s'aſſurer que l'un de ces coëfficiens ſera réel il faut que l'équation dont il dépend ait ſon dernier terme négatif. Quand on décompoſe une équation du quatrieme degré dont le ſecond terme eſt évanoui, en deux autres du ſecond degré ſuivant la méthode de Deſcartes, on trouve que les coëfficiens des ſeconds termes de ces diviſeurs ſont donnés par une équa-

tion du ſixieme degré, dont le dernier terme eſt eſſentiellement négatif, étant égal à un carré affecté du ſigne —; cette obſervation a porté Mr. Euler à penſer que la même choſe pourroit avoir lieu dans toute équation dont le degré ſera une puiſſance de 2, & où le ſecond terme ſera pareillement évanoui, lorſqu'on cherchera à la décompoſer en deux autres d'un degré moindre de la moitié. Mr. Euler tâche de démontrer par la nature même des racines de l'équation qui doit ſervir à déterminer les coëfficiens des ſeconds termes de ces diviſeurs, que cette équation aura toujours pour dernier terme un carré avec le ſigne négatif; mais il faut avouer que ſon raiſonnement eſt peu concluant; ainſi que Mr. le Chevalier de Foncenex l'a déjà remarqué dans le premier Volume des Mélanges de Turin, & comme nous le montrerons encore avec plus de détail dans ce Mémoire.

Cette raiſon a même engagé l'habile Géometre dont nous venons de parler à prendre un autre chemin pour parvenir à une démonſtration exacte du même théoreme, & on ne ſauroit diſconvenir que celle qu'il a donnée dans le Volume cité n'ait l'avantage de l'élégance & de la ſimplicité; mais d'un autre côté elle eſt auſſi ſujette à quelques-unes des difficultés qui ont lieu dans celle de Mr. Euler & qui viennent de ce qu'on y ſuppoſe fauſſement que dès que l'un des coëfficiens d'un diviſeur d'une équation quelconque eſt réel, tous les autres doivent l'être auſſi.

Il paroit donc par tout ce que nous venons de dire que le théoreme dont il s'agit n'a pas encore été démontré d'une maniere auſſi directe & auſſi rigoureuſe qu'on pourroit le deſirer. Comme je me ſuis depuis quelque tems particulierement appliqué à perfectionner la théorie des équations, j'ai cru devoir auſſi m'attacher à la diſcuſſion d'un point ſi important de cette théorie; c'eſt l'objet que je me ſuis propoſé dans ce Mémoire. En ſuppléant à ce qui manque à la démonſtration de Mr. Euler je tâcherai de faire en ſorte qu'il ne reſte plus de difficulté ni d'incertitude ſur cette matiere.

1. On ſait que toute équation d'un degré impair a néceſſairement une racine réelle poſitive, ſi ſon dernier terme eſt négatif, ou une racine réelle négative, ſi ſon dernier terme eſt poſitif; & de plus que toute équation d'un

d'un degré pair a néceſſairement deux racines réelles, l'une poſitive & l'autre négative, lorſque ſon dernier terme eſt négatif.

Ces théoremes ſont ſi connus que nous ne croyons pas devoir nous arrêter à les démontrer: il eſt vrai que la démonſtration qu'on en donne ordinairement eſt peu naturelle, étant tirée de la conſidération des lignes courbes; mais nous en avons donné ailleurs une plus directe, déduite des ſeuls principes de la compoſition des équations (voyez les Mémoires pour l'année 1767).

Hors les cas précédents on n'a point encore de caractere général par lequel on puiſſe reconnoître *a priori* ſi une équation a des racines réelles ou non; nous nous propoſons de donner dans une autre occaſion nos recherches ſur ce point, qu'on peut regarder comme un des plus importans de la théorie des équations.

2. Cela poſé il eſt d'abord clair que toute équation d'un degré impair telle que

$$x^{2m+1} - Ax^{2m} + Bx^{2m+1} - Cx^{2m-2} + \&c. - K = 0$$

pourra s'abaiſſer à un degré moindre d'une unité, c'eſt à dire au degré pair immédiatement inférieur.

Car comme on eſt aſſuré que cette équation doit avoir une racine réelle, ſi on dénote cette racine par a, on aura

$$a^{2m+1} - Aa^{2m} + Ba^{2m-1} - Ca^{2m-2} + \&c. - K = 0$$

donc

$$K = a^{2m-1} - Aa^{2m} + Ba^{2m-1} - Ca^{2m-2} + \&c.;$$

ce qui étant ſubſtitué dans l'équation précédente on aura celle-ci

$$\begin{aligned} & x^{2m+1} - a^{2m-1} \\ - & A(x^{2m} - a^{2m}) \\ + & B(x^{2m-1} - a^{2m-1}) \\ - & C(x^{2m-2} - a^{2m-2}) \\ + & \&c. = 0 \end{aligned}$$

laquelle se décompose naturellement en ces deux-ci

$$x - a = 0$$

$$x^{2m} - (a + A)x^{2m-1} + (a^2 + Aa + B)x^{2m} - (a^3 + Aa^2 + Ba + C)x^{2m+1} + \&c. = 0.$$

Ainsi il suffira de considérer les équations de degrés pairs.

3. Soit donc proposée l'équation générale

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \&c. + K = 0,$$

il s'agit de prouver que cette équation, lorsque m est un nombre pair plus grand que 2, peut toujours se décomposer en deux autres équations dont les coëfficiens soient des quantités réelles.

Supposons que

$$x^n - Mx^{n-1} + Nx^{n-2} - Px^{n-3} + \&c. + V = 0$$

soit un des facteurs de l'équation dont il s'agit; l'autre facteur sera de la forme

$$x^{m-n} - M'x^{m-n-1} + N'x^{m-n-2} - P'x^{m-n-3} + \&c. = 0$$

& pour déterminer les coëfficiens M, N, P &c., M', N', P' &c. qui sont au nombre de m, il n'y aura qu'à multiplier ces deux facteurs ensemble, & égaler ensuite chaque terme du produit, au terme de l'équation proposée dans lequel x aura le même exposant; on aura par là m équations qui serviront à déterminer tous les coëfficiens inconnus des facteurs supposés.

On peut aussi considérer simplement le facteur

$$x^n - Mx^{n-1} + Nx^{n-2} - Px^{n-3} + \&c.$$

& remarquer que, comme il doit diviser exactement l'équation proposée, si on fait la division à la maniere ordinaire & qu'on la pousse jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste où l'inconnue x monte à des puissances moindres que x^n, & qui par conséquent ne puisse plus donner des puissances entieres de x

dans le quotient, ce reſte devra être nul de lui-même, & indépendamment de la valeur de x; de ſorte que déſignant ce reſte par

$$\mu x^{n-1} + \nu x^{n-2} + \pi x^{n-3} + \&c. + \upsilon$$

il faudra que l'on ait à la fois les équations $\mu = 0$, $\nu = 0$, $\pi = 0$ &c. $\upsilon = 0$, lesquelles étant au nombre de n ſerviront à déterminer les n coëfficiens indéterminés M, N, P &c. V du facteur propoſé.

4. Telles ſont les méthodes qui ſe préſentent naturellement pour décompoſer une équation quelconque en deux autres de degrés inférieurs; mais pour notre objet il n'eſt pas néceſſaire d'exécuter cette décompoſition, il ſuffit de faire voir qu'elle eſt poſſible ſans tomber dans des quantités imaginaires.

Or ſi on ſuppoſe que dans les équations qui renferment les indéterminées M, N, P &c. on élimine toutes ces indéterminées hors une quelconque, par exemple M, on aura une équation finale en M qui montera à un degré d'autant plus élevé que le nombre de ces équations ſera plus grand, & la queſtion ſe réduira à ſavoir 1°. ſi cette équation aura au moins une racine réelle, 2°. ſi les valeurs des autres indéterminées N, P &c. correſpondantes à cette racine ſeront réelles auſſi.

5. Quant à la premiere condition on ne peut être aſſuré de ſon exiſtence que lorſque l'équation finale ſera d'un degré impair, ou d'un degré pair, mais avec le dernier terme négatif (Art. 1). A l'égard de la ſeconde, elle paroit d'abord une ſuite néceſſaire de la premiere; car comme on a entre les indéterminées M, N, P, Q &c. autant d'équations qu'il y a de ces indéterminées, il ſemble qu'on puiſſe toujours par les méthodes ordinaires de l'élimination parvenir à exprimer, par des fonctions rationelles d'une quelconque de ces indéterminées, les valeurs de toutes les autres; auquel cas il eſt clair que les valeurs de celles-ci ſeront néceſſairement réelles dès que la valeur de celle-là ſera réelle.

C'eſt en effet ce que la plupart des Analyſtes ont toujours ſuppoſé, & ſur quoi Mr. Euler & Mr. le Chevalier de Foncenex ont fondé principale-

ment leurs démonſtrations du théoreme dont il s'agit. Mais quoique cette propoſition ſoit vraie en général, il ſe trouve cependant des cas où elle devient abſolument fauſſe, comme nous l'avons déjà fait voir dans l'Art. 102. de nos *Réflexions ſur la réſolution algébrique des équations.* Suppoſons en effet qu'on ſoit parvenu par des éliminations réitérées à une équation entre les indéterminées M & N de la forme $PN - Q = 0$, P & Q étant des fonctions rationelles de M; on aura donc par là $N = \frac{Q}{P}$; en ſorte que N ſera toujours réelle dès que M le ſera; mais s'il arrive que la valeur réelle de M ſoit telle que les quantités P & Q évanouiſſent à la fois, on aura $N = \frac{0}{0}$, ce qui ne fera rien connoître: dans ce cas il ſera donc douteux ſi à la valeur réelle de M répond une valeur réelle de N ou non; en effet l'expreſſion indéterminée qu'on trouve pour N eſt une marque que cette quantité ne peut pas être donnée ſimplement par une équation du premier degré, mais qu'elle doit dépendre d'une équation d'un degré ſupérieur, en ſorte qu'à la même valeur de M puiſſent répondre différentes valeurs de N.

6. Pour éclaircir ceci par un exemple, je ſuppoſe que l'on ait l'équation du quatrieme degré

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

& qu'on veuille la décompoſer en deux du ſecond degré, repréſentées par

$$x^2 - Mx + N = 0,$$
$$x^2 - M'x + N' = 0;$$

on trouvera, en comparant le produit de ces deux-ci terme à terme avec celle-là, ces quatre équations

$$M + M' = A,$$
$$MM' + N + N' = B,$$
$$MN' + NM' = C,$$
$$NN' = D.$$

La premiere & la derniere donnent d'abord

$$M' = A - M,$$
$$N' = \frac{D}{N},$$

& ces valeurs étant fubftituées dans les deux autres, on aura

$$M(A - M) + N + \frac{D}{N} = B,$$
$$\frac{MD}{N} + N(A - M) = C,$$

lesquelles ferviront à déterminer M & N.

Suppofons qu'on veuille exprimer N par M, on multipliera la premiere par M, & on en retranchera la feconde, ce qui donnera

$$M^2(A - M) + 2MN - AN = BM - C$$

d'où l'on tire

$$N = \frac{C - BM + AM^2 - M^3}{A - 2M}$$

& cette valeur de N étant fubftituée dans l'une quelconque des deux équations précédentes donnera une équation finale en M qui montera au fixieme degré.

Maintenant je remarque que fi l'une des racines de cette équation fe trouve $= \frac{A}{2}$, & qu'on ait en même tems $C = \frac{AB}{2} - \frac{A^3}{8}$, cette valeur de M donnera $N = \frac{0}{0}$; & pour trouver la vérirable valeur de N dans ce cas il faudra reprendre les équations où N montoit au fecond degré, lesquelles, en y faifant $M = \frac{A}{2}$ & $C = \frac{AB}{2} - \frac{A^3}{8}$, fe réduiront à cette équation unique

$$N + \frac{D}{N} = B - \frac{A^2}{4}$$

favoir

$$N^2 + \left(\frac{A^2}{4} - B\right)N + D = 0$$

laquelle eſt, comme l'on voit, du ſecond degré & donnera par conſéquent deux valeurs différentes de N répondantes à la même valeur de $M = \frac{A}{2}$.

D'où l'on voit qu'il ne ſuffit pas d'être aſſuré que l'équation en M a néceſſairement une racine réelle, pour pouvoir l'être auſſi que le facteur $x^2 - Mx + N = 0$ ſera réel, puiſqu'il peut arriver que le coëfficient N ſoit imaginaire, ce qui aura lieu dans le cas que nous venons d'examiner ſi $\left(\frac{A^2}{4} - B\right)^2 - 4D = 0$.

7. Au reſte il eſt bon de remarquer que la valeur $\frac{A}{2}$ de M ſera néceſſairement une racine double de l'équation en M; c'eſt de quoi on peut ſe convaincre *a priori* par cette conſidération, que comme les deux facteurs $x^2 - Mx + N = 0$, $x^2 - M'x + N' = 0$ ſont ſemblables, les coëfficiens correſpondans M & M' doivent être les racines d'une même équation, ainſi que les coëfficiens N & N'; ce qui eſt d'ailleurs évident par les équations mêmes qui ſervent à déterminer ces quatre quantités, & qui ſont telles qu'elles demeurent les mêmes en y changeant M en M' & N en N'. Ainſi, comme on a trouvé $M' = A - M$, il s'enſuit que l'équation en M devra être telle que ſi M eſt une de ſes racines, $A - M$ en ſoit une auſſi; donc lorſque $M = \frac{A}{2}$, les deux racines M & $A - M$ deviendront égales.

On peut encore prouver la même choſe par la nature même de l'équation en M; car pour avoir cette équation il n'y aura, comme nous l'avons dit, qu'à ſubſtituer l'expreſſion générale de N trouvée ci-deſſus, & que nous déſignerons pour plus de ſimplicité par $\frac{Q}{P}$, dans l'équation $M(A - M) + N + \frac{D}{N} = B$, ce qui donnera en ôtant les fractions

$$Q^2 - (B - AM + M^2)QP + DP^2 = 0$$

où $P = A - 2M$ &

$$Q = C - BM + AM^2 - M^3;$$

maintenant il eſt clair que ſi l'on a en même tems $P = 0$ & $Q = 0$, non ſeulement l'équation précédente aura lieu elle-même, mais auſſi ſa différentielle, qui ſera

$$2Q\,dQ + (A - 2M)QP\,dM - (B - AM + M^2)(Q\,dP + P\,dQ)$$
$$+ \; 2DP\,dP = 0;$$

d'où il s'enſuit que la racine $M = \frac{A}{2}$ ſera néceſſairement une racine double.

8. Comme la voie de l'élimination eſt très longue, & que d'ailleurs elle ne pourroit jamais conduire qu'à des réſultats particuliers, il faudra tâcher de découvrir *a priori* le degré, & la nature de l'équation par laquelle la quantité M devra être déterminée, ainſi que la nature des fonctions qui exprimeront les valeurs des autres quantités N, P, Q &c. en M.

Pour cela on conſidérera que puiſque l'équation

$$x^n - Mx^{n-1} + Nx^{n-2} + \&c. = 0$$

eſt ſuppoſée être un facteur de l'équation propoſée

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \&c. = 0,$$

il faudra qu'elle ſoit formée du produit de n facteurs ſimples pris parmi les m facteurs ſimples de celle-ci; de ſorte que comme le nombre des manieres différentes de prendre n choſes parmi un nombre de choſes égal à m eſt exprimé, ſuivant la théorie des combinaiſons, par la formule

$$\frac{m(m-1)(m-2) \;\text{- - - -}\; (m-n+1)}{1.\;\; 2.\;\; 3 \;\text{- - - -}\; n}$$

il s'enſuit que l'équation propoſée admettra un pareil nombre de diviſeurs de la forme

$$x^n - Mx^{n-1} + Nx^{n-2} + \&c. = 0$$

& qu'ainſi chaque coëfficient M, N &c. ſera ſuſceptible d'autant de valeurs différentes, & par conſéquent devra être déterminé par une équation d'un degré marqué par la même formule.

9. Cette propoſition eſt connue depuis longtems des Géometres, & on a coutume de la prouver par un raiſonnement ſemblable à celui que nous venons de faire; mais il eſt facile de voir que cette preuve eſt ſujette à quelques difficultés. Car quoiqu'il ſoit démontré qu'une équation du degré m peut avoir autant de différens diviſeurs du degré n qu'il y a de manieres de combiner m choſes n à n, & qu'en même tems il paroiſſe hors de doute que les coëfficiens analogues de ces différens diviſeurs doivent être donnés par une même équation dont ils ſeront les racines; cependant il n'eſt pas évident que cette équation ne pourra pas avoir encore d'autres racines, puisqu'il arrive le plus ſouvent que les équations qu'on trouve pour la ſolution des problemes tant algébriques que géométriques renferment bien des racines inutiles, outre celles qui ſervent à la réſolution cherchée.

C'eſt pourquoi il ſemble qu'on ne ſauroit, à proprement parler, conclure autre choſe du raiſonnement ci-deſſus, ſinon que l'équation qui doit donner la valeur de chaque coëfficient du diviſeur cherché ne peut être d'un degré moindre que celui qu'on a aſſigné, ſans qu'on ſoit en droit de prononcer qu'elle ne peut pas être non plus d'un degré plus haut.

Si on joint cette objection à celles que Mr. d'Alembert a déjà propoſées dans le premier Volume de ſes Opuſcules (page 227), on conviendra aiſément que la propoſition dont il s'agit ſur le degré de l'équation par laquelle chaque coëfficient M, N &c. doit être déterminé, ne peut être admiſe ſans une démonſtration rigoureuſe; mais nous nous contenterons ici de renvoyer pour cet objet à la quatrieme Section de nos *Réflexions ſur la réſolution des équations* citées ci-deſſus, où nous avons démontré cette propoſition d'une maniere qui ne laiſſe rien à deſirer du coté de l'exactitude & de la généralité.

10. La queſtion ſe réduit donc maintenant à voir ſi, en ſuppoſant que m ſoit un nombre quelconque pair donné, on peut toujours prendre le nombre n moindre que m, & tel que le nombre

$$\frac{m(m-1)(m-2)\;-\;-\;-\;-\;(m-n+1)}{1\quad 2.\quad 3\;-\;-\;-\;-\;n},$$

qu'on ſait devoir être toujours entier, ſoit en même tems un nombre impair.

Il

Il eſt d'abord viſible que ſi m eſt un nombre pairement impair en ſorte que $m = 2i$, i un nombre impair autre que l'unité, il n'y aura qu'à prendre $n = 2$, ce qui donnera la formule

$$\frac{2i(2i-1)}{1.\ 2} = i(2i-1)$$

laquelle, à cauſe de i, & de $2i-1$ impairs, repréſentera néceſſairement un nombre impair. Si $m = 4i$, en ſuppoſant toujours i impair, on fera $n = 4$, ce qui donnera la formule

$$\frac{4i(4i-1)(4i-2)(4i-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = \frac{i(4i-1)(2i-1)(4i-3)}{1.\ 3}$$

laquelle repréſentera néceſſairement un nombre impair, à cauſe que i, $4i-1$, $2i-1$ & $4i-3$ ſont tous impairs.

On prouvera de même que ſi $m = 8i$ & qu'on prenne $n = 8$ on aura une formule qui ne donnera que des nombres impairs, & ainſi de ſuite; d'où l'on conclura en général que ſi $m = 2^r i$, i étant un nombre impair, autre que l'unité, & qu'on prenne $n = 2^r$, la formule

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ -\ -\ -\ -\ (m-n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ -\ -\ -\ -\ -\ n}$$

repréſentera néceſſairement des nombres impairs.

En effet il eſt clair qu'elle deviendra dans ce cas, en écrivant le dénominateur à rebours,

$$\frac{2^r i(2^r i-1)(2^r i-2)(2^r i-3)(2^r i-4)\ -\ -\ -\ (2^r i-2^r+1)}{2^r(2^r-1)(2^r-2)(2^r-3)(2^r-4)\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ 1}$$

c'eſt à dire en diviſant les facteurs correſpondans du numérateur & du dénominateur autant de fois par 2 qu'il eſt poſſible

$$\frac{i(2^r i-1)(2^{r-1}i-1)(2^r i-3)(2^{r-2}i-1)\ -\ -\ -\ (2^r i-2^r+1)}{(2^r-1)(2^{r-1}-1)(2^r-3)(2^{r-2}-1)\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ 1}$$

où l'on voit que le numérateur & le dénominateur ne renferment plus que des facteurs impairs; de ſorte que la diviſion faite on aura néceſſairement un quotient qui ſera un nombre impair.

11. Il eſt donc démontré que toute équation d'un degré pair $2^{r}i$ (i étant un nombre quelconque impair autre que l'unité) peut être diviſée par une équation du degré inférieur 2^{r}, dont chaque coëfficient ſera déterminé par une équation d'un degré impair; de ſorte qu'on ſera d'abord aſſuré qu'un quelconque de ces coëfficiens aura une valeur réelle, & qu'il ne reſtera plus qu'à prouver que les autres devront auſſi avoir des valeurs réelles; car quoique chaque coëfficient en particulier puiſſe avoir une valeur réelle, étant donné par une équation de degré impair, cependant on n'en ſauroit conclure que tous les coëfficiens auront à la fois des valeurs réelles; puisqu'il n'eſt pas démontré que les valeurs réelles que ces coëfficiens doivent avoir, ſoient préciſément celles qui ſe correſpondent & qui peuvent avoir lieu en même tems.

Or nous avons déjà fait voir plus haut que dès que l'un des coëfficiens eſt ſuppoſé connu, on peut toujours exprimer tous les autres par des fonctions rationelles de celui-là, à l'exception de quelques cas particuliers où il arrive que la détermination de ces coëfficiens demande encore la réſolution d'une équation de deux ou de pluſieurs dimenſions; ainſi tout ſe réduit à déterminer *a priori* quels ſont ces cas, & quel eſt le degré de l'équation qu'on a alors à réſoudre.

12. Cette queſtion dépend de celle dont nous avons donné la ſolution ailleurs (*Réflexions ſur la réſolution des équations*, *Sect. IV. Art.* 100.) & qui conſiſte à trouver la valeur d'une fonction quelconque des racines d'une équation donnée, lorſqu'on connoit déjà celle d'une autre fonction quelconque des mêmes racines. Car il eſt viſible que les coëfficiens M, N &c. du diviſeur

$$x^{n} - Mx^{n-1} + Nx^{n-2} - Px^{n-3} + \&c. = 0$$

ſont des fonctions des racines de l'équation propoſée

$$x^{m} - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \&c. = 0$$

& il eſt facile de conclure de ce que nous avons dit dans l'Art. 7, que le coëfficient M en particulier ſera égal à la ſomme de n quelconques des

m racines de la proposée, que le coëfficient N sera égal à la somme des produits deux à deux de ces n racines, que le coëfficient P sera égal à la somme de leurs produits trois à trois & ainsi de suite.

13. En appliquant donc à ce cas notre solution générale on verra qu'on peut toujours exprimer par des fonctions rationelles d'un quelconque des coëfficiens M, N, P &c. la valeur de chacun des autres, excepté les seuls cas, où l'équation par laquelle ce coëfficient-là doit être déterminé ayant des racines égales, on voudra prendre précisément une de ces racines pour sa valeur.

Alors chacun des autres coëfficiens devra nécessairement être déterminé par une équation dont le degré sera égal au nombre de ces racines égales, & dont les coëfficiens seront des fonctions rationelles du même coëfficient, qu'on suppose connu.

De là il s'ensuit

1°. Que si la valeur réelle que doit avoir nécessairement un quelconque des coëfficiens M, N, P &c. dans le cas de l'Art. 10, est une racine inégale de l'équation par laquelle ce coëfficient doit être déterminé, on sera assuré que tous les autres coëfficiens auront aussi nécessairement des valeurs réelles.

2°. Que si cette valeur est une racine égale de la même équation, alors pourvu que l'exposant de l'égalité soit impair, c'est à dire que ce soit une racine triple ou quintuple ou &c., on sera aussi assuré que les autres coëfficiens auront des valeurs réelles, puisqu'ils dépendront d'équations de degrés impairs; mais il n'en seroit pas de même si le degré de la multiplicité étoit pair.

14. Considérons en général une équation quelconque du degré μ laquelle ait ν racines inégales, π racines inégales entr'elles, mais dont chacune en ait $p - 1$ autres égales, ϱ racines inégales entr'elles, & dont chacune en ait $r - 1$ autres égales & ainsi de suite, en sorte que l'on ait $\mu = \nu + \pi p + \varrho r +$ &c.; on sait par la théorie des racines

égales, que l'équation proposée pourra toujours se décomposer, sans aucune extraction de racines, en différentes équations dont chacune renferme toutes les racines inégales du même ordre; c'est à dire en une équation du degré ν qui ne renferme que les racines simples & inégales; en une équation du degré π qui ne renferme que les racines inégales dont chacune se trouve p fois dans la proposée; en une équation du degré ϱ qui ne renferme que les racines inégales dont chacune se trouve r fois dans la proposée, & ainsi de suite.

Maintenant si on suppose que l'exposant μ soit un nombre quelconque impair, il faudra que la somme des nombres ν, πp, ϱr &c. soit un nombre impair, & par conséquent il faudra qu'un quelconque de ces nombres soit impair; si ν est impair l'équation du degré ν aura nécessairement une racine réelle laquelle sera une racine inégale de l'équation proposée; si πp est impair il faudra que π & p soient l'un & l'autre impairs; donc l'équation du degré π aura nécessairement une racine réelle qui sera une racine égale de la proposée, dont l'exposant d'égalité sera p, & par conséquent aussi impair; il en sera de même si ϱr est impair, & ainsi de suite.

15. De là & de ce qu'on a démontré plus haut, il s'ensuit donc que toute équation du degré $2^r i$ (i étant un nombre impair) pourra toujours avoir pour diviseur une équation du degré 2^r dont les coëfficiens seront nécessairement des quantités réelles (Art. 11 & 13); de sorte qu'en divisant l'équation proposée par cette derniere on aura pour quotient une autre équation du degré $2^r(i - 1)$ laquelle aura aussi tous ses coëfficiens réels.

Or comme i est supposé un nombre impair, $i - 1$ sera un nombre pair, qu'on pourra représenter en général par $2^s k$ (k étant un nombre impair), donc l'exposant $2\,(i - 1)$ deviendra $2^{r+s}k$, & on pourra prouver de même que l'équation de ce degré pourra se décomposer de nouveau en deux autres équations réelles, l'une du degré 2^{r+s}, & l'autre du degré $2^{r+s}(k - 1)$; & faisant $k - 1 = 2^t l$ (l étant un nombre impair) cette derniere équation aura pour exposant le nombre $2^{r+s+t}l$, & pourra par conséquent se partager de nouveau en deux équations, l'une du degré 2^{r+s+t}, l'autre du degré $2^{r+s+t}(l - 1)$; & ainsi de suite.

De ſorte que par cette méthode on pourra toujours décompoſer toute équation d'un degré pair quelconque en autant d'équations réelles dont les degrés ſoient marqués par des puiſſances de 2, qu'il y aura de pareilles puiſſances dans le degré de l'équation propoſée. Ainſi une équation du 6[me] degré pourra ſe décompoſer en deux, l'une du 2[d] degré, l'autre du 4[me]; une équation du 12[me] degré pourra ſe décompoſer en deux, l'une du 4[me] degré, l'autre du 8[me]; & ainſi du reſte.

16. Il ne reſte donc plus qu'à conſidérer les équations des degrés marqués par des puiſſances de 2; il eſt facile de voir que dans ce cas la formule de l'Art. 10. donnera toujours des nombres pairs, quelque nombre que l'on prenne pour n, au moins tant que n ſera moindre que m, comme il le faut; de ſorte que la détermination des coëfficiens M, N, P &c. des diviſeurs de ces ſortes d'équations dépendra toujours néceſſairement d'une équation de degré pair, dans laquelle on ne pourra par conſéquent s'aſſurer de l'exiſtence d'une racine réelle à moins que le dernier terme ne ſoit négatif (Art. 1).

Déſignons en général l'expoſant m de l'équation propoſée par 2^r, & ſuppoſons que l'expoſant n du diviſeur ſoit la moitié de celui-là, c'eſt à dire égal à 2^{r-1}; en ce cas la formule de l'Art. cité deviendra, en diſpoſant le dénominateur à rebours,

$$\frac{2^r\,(2^r-1)\,(2^r-2)\,(2^r-3)\;\cdots\cdots\;(2^{r-1}+1)}{2^{r-1}\,(2^{r-1}-1)\,(2^{r-1}-2)\,(2^{r-1}-3)\;\cdots\cdots\;1},$$

c'eſt à dire en diviſant les facteurs correſpondans du numérateur & du dénominateur autant de fois par 2 qu'il eſt poſſible,

$$\frac{2\,(2^r-1)\,(2^{r-1}-1)\,(2^r-3)\,(2^{r-2}-1)\;\cdots\;(2^r-2^{r-1}+1)}{1.\,(2^r-1)\,(2^{r-2}-1)\,(2^{r-1}-3)\,(2^{r-3}-1)\;\cdots\cdots\;1}$$

où l'on voit que tous les facteurs du numérateur ſont impairs à l'exception du premier qui eſt 2, & que tous ceux du dénominateur ſont auſſi impairs; d'où il s'enſuit que cette formule repréſentera toujours des nombres impairement pairs.

17. Cela posé, considérons l'équation par laquelle doit se déterminer le coëfficient M; elle sera, comme on vient de le voir, d'un degré impairement pair, & aura pour racines toutes les différentes sommes possibles qu'on peut faire des racines de l'équation proposée en ne prenant à la fois qu'un nombre de ces racines qui soit la moitié du nombre total (Art. 12).

Qu'on fasse maintenant dans cette équation $M = \frac{A - u}{2}$, A étant le coëfficient du second terme de l'équation proposée, & u une nouvelle inconnue, on aura une transformée en u du même degré, dont les racines seront exprimées par $A - 2M$, c'est à dire qu'elles seront égales aux différens résidus que l'on aura en retranchant successivement de la somme totale des racines de la proposée, somme qui est $= A$, le double des différentes sommes particulieres que l'on peut faire de ces racines en ne les prenant qu'au nombre de la moitié; de sorte que les racines dont il s'agit ne seront autre chose que les différences entre la somme de la moitié du nombre des racines de la proposée & la somme de l'autre moitié, en prenant ces sommes de toutes les différentes manieres possibles.

Par exemple, si l'équation proposée est du quatrieme degré & a par conséquent quatre racines a, b, c, d, on aura $A = a + b + c + d$, & les valeurs de M seront $a + b$, $a + c$, $a + d$, $b + c$, $b + d$, $c + d$; donc les valeurs de $u = A - 2M$ seront $c + d - a - b$, $b + d - a - c$, $b + c - a - d$, $a + d - b - c$, $a + c - b - d$, $a + b - c - d$; & ainsi des autres équations des degrés supérieurs.

18. De là il est d'abord facile de conclure que l'équation en u manquera de toutes les puissances impaires, puisqu'il est évident que chaque racine positive doit avoir nécessairement une racine négative égale; ce qu'on voit clairement dans l'exemple précédent, où les quantités $c + d - a - b$, $b + d - a - c$, $b + c - a - d$, sont les négatives des quantités $a + b - c - d$, $a + c - b - d$, $a + d - b - c$.

Donc si on fait $u^2 = t$, l'équation en u s'abaissera à un degré moindre de la moitié, & comme on a prouvé que le degré de l'équation en u est pairement impair, il s'ensuit que le degré de l'équation en t sera nécessairement impair; de sorte que cette équation aura nécessairement une racine réelle, laquelle sera positive si son dernier terme est négatif, & négative, s'il est positif (Art. 1); or pour que u, & par conséquent M, ait une valeur réelle, il faut que celle de t soit réelle & positive; par conséquent la question est réduite à voir si le dernier terme de l'équation en t sera négatif; & comme le dernier terme de toute équation d'un degré impair pris avec un signe contraire est égal au produit de toutes les racines, tout consistera à voir si le produit de toutes les différentes valeurs de t est une quantité positive ou non.

19. Pour parvenir à ce but avec plus de facilité considérons d'abord le cas où l'équation proposée est du quatrieme degré, & dans lequel nous avons déjà vu que les différentes valeurs de u sont

$$a + b - c - d, \quad a + c - b - d, \quad a + d - b - c,$$
$$c + d - a - b, \quad b + d - a - c, \quad b + c - a - d;$$

il est clair que comme les trois dernieres quantités sont égales aux trois premieres prises négativement, les différentes valeurs de u^2 ou t seront seulement ces trois

$$(a + b - c - d)^2, \quad (a + c - b - d)^2, \quad (a + d - b - c)^2;$$

de sorte que le produit de ces trois valeurs sera égal au carré de la quantité

$$(a + b - c - d)(a + c - b - d)(a + d - b - c),$$

& il ne s'agira plus que de voir si ce carré est toujours une quantité positive, quelles que soient les racines a, b, c, d; il est d'abord clair que si ces racines sont toutes réelles, la quantité précédente sera aussi toute réelle, en sorte que son carré sera nécessairement une quantité réelle positive; mais il peut n'en être pas de même s'il y a des racines imaginaires, d'autant que la forme des racines imaginaires est encore regardée comme inconnue.

20. Mr. Euler ayant ſuppoſé pour plus de facilité le coëfficient A du ſecond terme de la propoſée, nul, a trouvé à la place de la quantité précédente, celle-ci

$$(a + b)\ (a + c)\ (a + d)$$

qui, à cauſe de $a + b + c + d = 0$, eſt égale à celle-là diviſée par 8; & il ſe contente enſuite de dire que ce produit eſt déterminable, comme l'on ſait, par les quantités B, C, D, & qu'il ſera par conſéquent réel; mais pour que cette conſéquence ſoit légitime il faut prouver que l'on peut déterminer ce produit par une expreſſion rationelle des mêmes quantités; c'eſt ce que Mr. Euler n'a point fait, du moins d'une maniere directe & *a priori.*

Il eſt vrai que le carré

$$(a + b)^2\ (a + c)^2\ (a + d)^2$$

ſera toujours une fonction rationelle des coëfficiens B, C, D, mais la difficulté conſiſte préciſément à démontrer que ſa racine en ſera une auſſi.

Pour ſentir davantage la force de cette objection il n'y a qu'à conſidérer par exemple la quantité

$$(a - b)\ (a - c)\ (a - d)\ (b - c)\ (b - d)\ (c - d),$$

il eſt certain que le carré de cette quantité peut s'exprimer par une fonction rationelle des coëfficiens B, C, D, mais il n'en eſt pas ainſi de la quantité elle-même; en effet on trouve pour la valeur du carré dont il s'agit l'expreſſion

$$4^4D^3 - 2^3.4^2B^2D + 4^2.3^2C^2BD + 4^2B^4D - 4C^2B^3 - 3^3C^4,$$

laquelle n'eſt pas un carré en général; de ſorte qu'on ne ſauroit en conclure que ſa racine ſera toujours une quantité réelle.

21. Le caractere auquel on peut reconnoître *a priori* ſi une fonction propoſée des racines d'une équation quelconque peut ſe déterminer par une expreſſion rationelle des coëfficiens de cette équation, conſiſte, comme nous l'avons démontré dans notre Mémoire ſur les équations, en ce que cette

fonction

fonction doit être telle qu'elle ne change point de valeur, quelque permutation qu'on y fasse entre les racines dont elle est composée; ainsi il n'y a qu'à voir si cette condition a lieu ou non dans la fonction

$$(a + b - c - d)(a + c - b - d)(a + d - b - c);$$

comme les trois racines b, c, d y entrent également, il est d'abord visible que les permutations qu'on pourroit faire entre ces racines ne produiroient aucun changement dans la fonction; mais on ne peut pas dire tout à fait la même chose par rapport à la racine a, puisqu'elle n'est pas disposée à l'égard des autres comme celles-ci le sont entr'elles; voyons donc ce que donneront les échanges de a en b, en c, en d.

En changeant a en b les trois facteurs

$$a + b - c - d, \quad a + c - b - d, \quad a + d - b - c$$

se changent en ces trois-ci:

$$b + a - c - d, \quad b + c - a - d, \quad b + d - a - c,$$

par où l'on voit que le premier demeure le même, que le second devient le troisieme avec un signe contraire, & que le troisieme devient le second avec un signe contraire. On trouvera pareillement qu'en changeant a en c ou en d, il y aura toujours un des trois facteurs qui demeurera le même, tandis que les deux autres se changeront l'un dans l'autre en changeant en même tems de signes; d'où il est facile de conclure que le produit des trois facteurs demeurera toujours le même.

La circonstance qui fait que ce produit ne varie point, c'est que les facteurs qui se changent l'un dans l'autre, en changeant en même tems de signes, sont en nombre pair; car si les facteurs qui changent de signes étoient en nombre impair, alors il est facile de voir que le produit dont il s'agit conserveroit à la vérité la même valeur absolue, mais en changeant de signe; c'est là la raison pourquoi la fonction dont on a parlé ci-dessus (Art. 20.)

$$(a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)$$

ne sauroit être exprimée par les coëfficiens A, B, C, D d'une maniere rationelle; car en changeant, par exemple, a en b, le facteur $a - b$ devient simplement négatif, les facteurs $a - c$, $a - d$ se changent dans les facteurs $b - c$, $b - d$, & le dernier facteur $c - d$ demeure le même; de sorte que puisqu'il y en a un qui change simplement de signe, un qui demeure tout à fait le même, & quatre dont deux se changent dans les deux autres, il s'ensuit que le produit total devra devenir négatif.

22. Il est facile maintenant d'appliquer le même raisonnement au cas où il y aura plus de quatre racines, & de s'assurer *a priori* que le dernier terme de la *réduite* en t sera toujours un carré avec le signe $-$. Supposons, par exemple, que les racines de l'équation proposée soient au nombre de six, savoir a, b, c, d, e, f (quoiqu'à proprement parler nous n'ayons besoin de considérer ici que les équations dont les degrés sont des puissances de 2, cependant nous prendrons le cas d'une équation du sixieme degré, parce qu'il est plus simple que celui d'une équation du huitieme, & qu'il peut servir à faire voir que la proposition est générale pour toutes les équations des degrés pairs), on verra aisément par ce qui a été démontré plus haut que le dernier terme de la réduite en t sera égal au carré du produit de ces dix quantités

$$a + b + c - d - e - f,$$
$$a + b + d - c - e - f,$$
$$a + b + e - c - d - f,$$
$$a + b + f - c - d - e,$$
$$a + c + d - b - e - f,$$
$$a + c + e - b - d - f,$$
$$a + c + f - b - d - e,$$
$$a + d + e - b - c - f,$$
$$a + d + f - b - c - e,$$
$$a + e + f - b - c - d,$$

pris avec un ſigne contraire; de ſorte qu'il ne s'agira que de voir ſi ce produit demeure le même en faiſant toutes les permutations poſſibles entre les ſix racines a, b, c &c.; auquel cas on ſera aſſuré qu'il pourra être exprimé par une fonction rationelle des coëfficiens A, B, C &c. de l'équation propoſée.

Pour cela je remarque d'abord que les 10 quantités précédentes ſont telles qu'elles renferment toutes les permutations poſſibles entre les cinq racines b, c, d, e, f, puiſqu'elles ne ſont autre choſe que les différentes valeurs de la quantité $a + b + c - d - e - f$, qui réſultent de toutes les échanges poſſibles entre les cinq lettres b, c, d, e, f, la lettre a étant regardée comme fixe; d'où il s'enſuit qu'en faiſant le produit de ces 10 quantités on aura une fonction des racines a, b, c &c. qui ſera telle qu'elle ne recevra aucun changement par les permutations des cinq racines b, c, d, e, f entr'elles; de ſorte qu'il ſuffira de conſidérer les réſultats des échanges de la racine a dans les cinq autres; & comme les échanges de celles-ci entr'elles ne produiſent aucun changement dans la fonction dont il s'agit, il eſt clair qu'on aura le même réſultat ſoit qu'on change a en b ou a en c ou a en d ou &c.; par conſéquent, il ſuffira de conſidérer une ſeule échange comme celle de a en b, & ſi elle ne fait point varier le produit des dix quantités ci-deſſus on ſera aſſuré que ce produit ſera déterminable par une fonction rationelle des coëfficiens A, B, C &c. de l'équation propoſée.

Or, en changeant a en b, il eſt viſible que les quatre premieres quantités, où les lettres a & b ſe trouvent jointes avec le ſigne $+$, demeureront les mêmes, puiſque $a + b$ eſt la même choſe que $b + a$; & que les 6 dernieres, où les lettres a & b ont des ſignes différens, ſe changeront l'une dans l'autre en changeant en même tems de ſignes; d'où l'on conclura que le produit de toutes ces quantités demeurera néceſſairement le même, puiſque les facteurs qui changent de ſignes ſont en nombre pair.

23. On conſidérera maintenant que pour avoir les dix quantités qui ſont les facteurs du produit en queſtion il n'y a qu'à ajouter ſucceſſivement à

la racine a, les sommes des autres cinq racines prises deux à deux, & en retrancher en même tems les racines restantes; d'où il est d'abord facile de conclure que si le nombre de toutes les racines étoit $2n$, il faudroit, pour avoir les facteurs dont il s'agit, ajouter successivement à la racine a les sommes des autres $2n - 1$ racines prises $n - 1$ à $n - 1$, & en retrancher en même tems les racines restantes; moyennant quoi le nombre de ces facteurs sera exprimé, comme il résulte de la théorie des combinaisons, par

$$\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)\;\cdots\;(n+1)}{1.\;\;2.\;\;3\;\cdots\;(n-1)}.$$

Ensuite on considérera qu'en changeant a en b, quelques-uns de ces facteurs demeurent les mêmes, tandis que les autres se changent entr'eux en changeant en même tems de signes; de sorte que pour savoir le nombre de ces derniers il suffira de retrancher du nombre total, celui des facteurs qui demeurent les mêmes en changeant a en b. Or il est visible que ces facteurs-ci se trouveront en ajoutant successivement à la somme $a + b$ les différentes sommes des autres $2n - 2$ racines prises $n - 2$ à $n - 2$, & retranchant en même tems les racines restantes; de sorte que le nombre de ces facteurs invariables sera exprimé par

$$\frac{(2n-2)(2n-3)\;\cdots\;(n-1)}{1.\;\;2\;\cdots\;(n-2)},$$

donc, retranchant cette quantité de la précédente, on aura

$$\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)\;\cdots\;(n+1)}{1.\;\;2.\;\;3\;\cdots\;(n-1)} - \frac{(2n-2)(2n-3)\;\cdots\;(n+1)}{1.\;\;2\;\cdots\;(n-2)}$$

ou bien, en réduisant au même dénominateur,

$$\frac{(2n-2)(2n-3)(2n-4)\;\cdots\;(n)}{1.\;\;2.\;\;3\;\cdots\;(n-1)}$$

pour l'expression du nombre des facteurs qui s'échangent entr'eux en changeant en même tems de signes.

Ainsi la question est de voir si ce nombre sera toujours pair; or c'est ce qui est évident; car si on divise le haut & le bas de la fraction par $n - 1$, elle deviendra

$$2. \frac{(2n-3)\,(2n-4)\,(2n-5)\,\text{- - - - - - -}\,n}{1.\quad 2.\quad 3\,\text{- - - -}\,n-2};$$

mais la quantité

$$\frac{(2n-3)\,(2n-4)\,(2n-5)\,\text{- - - - - - -}\,n}{1.\quad 2.\quad 3\,\text{- - -}\,(n-2)}$$

est toujours un nombre entier, puisque c'est le coëfficient du $(n-1)^{me}$ terme d'un binome élevé à la puissance $2n - 3$; donc le double de ce nombre sera toujours nécessairement un nombre pair.

24. Nous venons donc de démontrer rigoureusement qu'en considérant une équation du degré 2^r comme exactement divisible par une autre équation du degré 2^{r-1}, le coëfficient M du second terme de celle-ci sera nécessairement déterminé par une équation telle qu'en y faisant $M = \frac{A-u}{2}$ (A étant le coëfficient du second terme de la proposée) & ensuite $u^2 = t$, il viendra une transformée en t d'un degré impair, & qui aura son dernier terme négatif en sorte que l'inconnue t aura toujours une valeur réelle positive; moyennant quoi la valeur de u sera aussi réelle.

Donc, puisque M a nécessairement une valeur réelle, il s'ensuit (Art. 13.) que tous les autres coëfficiens N, P, Q &c. du diviseur en question auront aussi chacun une valeur réelle, à moins que la valeur réelle de M ne soit une racine multiple de l'équation en M; auquel cas il peut arriver que les valeurs des autres coëfficiens soient imaginaires, comme nous l'avons déjà remarqué plus haut.

Il est donc nécessaire d'examiner ce cas, & de voir comment il faudroit s'y prendre pour trouver alors un diviseur tout rationel de l'équation proposée.

Je commence d'abord par remarquer que comme $u = \sqrt{t}$, on aura $M = \frac{A \pm \sqrt{t}}{2}$; d'où l'on voit que chaque valeur de t donnera deux valeurs de M, qui ne feront jamais égales, à moins que l'on n'ait $t = 0$; de plus il eſt clair que ſi toutes ces valeurs de t ſont inégales, celles de M le feront auſſi; de ſorte que l'équation en M n'aura proprement de racines égales que dans deux cas, l'un où l'équation en t en aura elle-même d'égales, l'autre, où l'équation en t aura une ou pluſieurs racines $= 0$.

Suppoſons d'abord que l'équation en t n'ait aucune racine $= 0$, mais qu'elle en ait pluſieurs égales entr'elles; comme cette équation eſt d'un degré impair, on prouvera par un raiſonnement ſemblable à celui de l'Art. 14. qu'elle aura néceſſairement une racine réelle inégale, ou égale d'un ordre d'égalité marqué par un nombre impair; d'où il eſt facile de conclure que l'équation en M aura auſſi néceſſairement une pareille racine, & même deux, en ſorte que chacun des autres coëfficiens N, P, Q &c. aura néceſſairement une valeur réelle (Art. 13.)

Ainſi, quelles que ſoient les racines de l'équation en t, pourvu qu'aucune d'elles ne ſoit nulle, on ſera aſſuré que les coëfficiens du diviſeur auront tous des valeurs réelles.

25. Il n'en eſt pas de même lorſque l'équation en t a une racine nulle, ce qui arrive quand ſon dernier terme ſe trouve $= 0$. Dans ce cas il eſt clair que la racine $t = 0$ donnera dans l'équation en M deux racines égales à $\frac{A}{2}$; de ſorte que chacun des autres coëfficiens N, P &c. dépendra néceſſairement d'une équation du ſecond degré qui pourra n'avoir aucune racine réelle; il eſt vrai que l'équation en t pourra avoir encore d'autres racines réelles; mais la difficulté conſiſte à prouver qu'elle en aura toujours de telles. En effet cette équation étant diviſée par t, ne montera plus qu'à un degré pair; de ſorte qu'il faudroit démontrer en général que le dernier terme ſera toujours négatif; ce qui d'ailleurs n'eſt pas vrai.

Pour donner un exemple de l'infuffifance de la méthode précédente dans le cas dont il s'agit nous reprendrons celui de l'Art. 6. où l'on propose de trouver un divifeur du fecond degré $x^2 - Mx + N = 0$ de l'équation générale du quatrieme degré $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$. En fubftituant l'expreffion de N en M, & faifant enfuite $M = \frac{A + u}{2} = \frac{A + \sqrt{t}}{2}$ on trouve cette réduite en t

$$t^3 - (3A^2 - 8B)t^2 + (3A^4 - 16A^2B + 16B^2 + 16AC - 64D)t - (A^3 - 4AB + 8C)^2 = 0$$

laquelle a, comme l'on voit, fon dernier terme toujours négatif.

Maintenant, fi l'on a

$$A^3 - 4AB + 8C = 0,$$

il eft clair que l'équation précédente aura d'abord la racine $t = 0$, laquelle donnant $M = \frac{A}{2}$ on tombera dans le cas que l'on a déjà examiné dans l'Art. cité, & où l'autre coëfficient N du divifeur $x^2 + Mx + N = 0$ dépendra d'une équation du fecond degré qui n'aura de racines réelles que tant que $4D$ ne furpaffera pas $\left(\frac{A^2}{4} - B\right)^2$; de forte que dans le cas où $D > \left(\frac{A^2}{8} - \frac{B}{2}\right)^2$ le coëfficient N fera imaginaire, & l'équation propofée du quatrieme degré fe trouvera par ce moyen décompofée en deux équations imaginaires du fecond degré, lefquelles feront

$$x^2 - \frac{A}{2} + N' = 0, \qquad x^2 - \frac{A}{2} + N'' = 0,$$

N' & N'' étant les racines de l'équation

$$N^2 + \left(\frac{A^2}{4} - B\right)N + D = 0.$$

Pour avoir donc des facteurs tout réels il faudra dans ce cas chercher une autre valeur de t; or l'équation en t étant toute divisée par t devient

$$t^2 - (3A^2 - 8B)t + 3A^4 - 16A^2B + 16B^2 + 16AC - 64D = 0$$

ou bien, en substituant à la place de C sa valeur $\frac{-A^3 + 4AB}{8}$,

$$t^2 - (3A^2 - 8B)t + (A^2 - 4B)^2 - 64D = 0,$$

dans laquelle on voit que le dernier terme sera positif si $(A^2 - 4B)^2 > 64D$; de sorte qu'on ne peut pas être assuré en général que cette équation aura des racines réelles, à moins que l'on ne considere la condition qui est particuliere aux équations du second degré.

26. Cependant si l'on observe que la condition $(A^2 - 4B)^2 > 64D$ est celle qui rend réelles les racines de l'équation en N ci-dessus, & que la condition opposée $(A^2 - 4B)^2 < 64D$ est celle qui rend le dernier terme de l'équation précédente en t, négatif, on en pourra conclure d'abord qu'il est toujours possible d'avoir pour les coëfficiens M & N des valeurs réelles.

En effet, soit 1°.

$$(A^2 - 4B)^2 - 64D = p,$$

(p désignant une quantité positive) on prendra dans ce cas la racine $t = 0$, laquelle donnera $M = \frac{A}{2}$ & $N = -\frac{A^2}{8} + \frac{B}{2} \pm \frac{\sqrt{p}}{8}$.

Soit 2°. $64D - (A^2 - 4B)^2 = p$, on prendra dans ce cas pour t la racine positive de l'équation

$$t^2 - (3A^2 - 8B)t - p = 0,$$

& l'on aura $M = \frac{A \pm \sqrt{t}}{2}$ & $N = \frac{C - BM + AM^2 - M^3}{A - 2M}$ (Art. 6.)

27. Mais

27. Mais pour pouvoir résoudre la difficulté dont il s'agit d'une maniere générale & applicable aux équations de tous les degrés il faut employer d'autres principes.

Repreoons pour cet effet l'équation proposée

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \&c. = 0$$

ou $m = 2^r$; & considérons les deux facteurs

$$x^n - Mx^{n-1} + Nx^{n-2} - Px^{n-3} + \&c. = 0$$

$$x^n - M'x^{n-1} + N'x^{n-2} - P'x^{n-3} + \&c. = 0$$

dont on suppose qu'elle soit formée, n étant $= 2^{r-1} = \frac{m}{2}$; qu'on fasse, ce qui est permis,

$$M = \frac{\alpha + \mu}{2}, \qquad M' = \frac{\alpha - \mu}{2}$$

$$N = \frac{\beta + \nu}{2}, \qquad N' = \frac{\beta - \nu}{2}$$

$$P = \frac{\gamma + \pi}{2}, \qquad P' = \frac{\gamma - \pi}{2}$$

&c.

c'est à dire qu'on introduise à la place des coëfficiens indéterminés M, M', N, N', P, P' &c. leurs sommes $M + M' = \alpha$, $N + N' = \beta$, $P + P' = \gamma$ &c. & leurs différences $M - M' = \mu$, $N - N' = \nu$, $P - P' = \pi$ &c., & l'on trouvera (Art. 3.) m, ou $2n$ équations entre les m indéterminées α, β, γ &c. μ, ν, π &c. par lesquelles on pourra déterminer chacune de ces inconnues.

Qu'on suppose maintenant

$$u = a\mu + b\nu + c\pi + \&c.$$

a, b, c &c. étant des coëfficiens quelconques arbitraires, & qu'on introduise partout l'indéterminée u à la place d'une quelconque des indéterminées μ, ν, π &c., par exemple, à la place de μ, en substituant

$\frac{u - bv - c\pi - \&c.}{a}$ au lieu de μ, on aura $2n$ équations entre les $2n$ inconnues α, β, γ &c. u, v, π &c., d'où éliminant les $2n - 1$ inconnues α, β, γ &c. v, π &c. il viendra une équation en u, qui ſera du même degré & aſſujettie aux mêmes conditions que celle de l'Art. 17, comme je vais le démontrer.

28. Dénotons les $2n$ racines de l'équation propoſée par x', x'', x''' &c. $x^{(2n)}$, & comme on ſuppoſe que cette équation ſoit le produit de ces deux-ci

$$x^n - Mx^{n-1} + Nx^{n-2} - Px^{n-3} + \&c. = 0$$
$$x^n - M'x^{n-1} + N'x^{n-2} - P'x^{n-3} + \&c. = 0$$

il eſt viſible par la théorie des équations que l'une de ces équations aura pour racines n quelconques des $2n$ racines x', x'', x''' &c. $x^{(2n)}$, & que l'autre aura pour racines les n racines reſtantes; ainſi prenant x', x'', x''' &c. $x^{(n)}$ pour les racines de

$$x^n - Mx^{n-1} + Nx^{n-2} - Px^{n-3} + \&c. = 0$$

& $x^{(n+1)}$, $x^{(n+2)}$, $x^{(n+3)}$ &c. $x^{(2n)}$ pour les racines de

$$x^n - M'x^{n-1} + N'x^{n-2} - P'x^{n-3} + \&c. = 0$$

on aura, comme l'on ſait,

$$M = x' + x'' + x''' + \&c. + x^{(n)},$$
$$N = x'x'' + x'x''' + x''x''' + \&c. + x^{(n-1)}x^{(n)},$$
$$P = x'x''x''' + x'x''x^{iv} + x''x'''x^{iv} + \&c. + x^{(n-2)}x^{(n-1)}x^{(n)},$$
&c.
$$M' = x^{(n+1)} + x^{(n+2)} + x^{(n+3)} + \&c. + x^{(2n)},$$
$$N' = x^{(n+1)}x^{(n+2)} + x^{(n+1)}x^{(n+3)} + x^{(n+2)}x^{(n+3)} + \&c. + x^{(2n-1)}x^{(2n)},$$
$$P' = x^{(n+1)}x^{(n+2)}x^{(n+3)} + x^{(n+1)}x^{(n+3)}x^{(n+4)} + x^{(n+2)}x^{(n+3)}x^{(n+4)} + \&c. + x^{(2n-2)}x^{(2n-1)}x^{(2n)},$$
&c.

Donc

$$\alpha = x' + x'' + x''' + \&c. + x^{(n)} + x^{(n+1)} + x^{(n+2)} + x^{(n+3)} + \&c. + x^{(2n)} = A,$$

$$\beta = x'x'' + x'x''' + x''x''' + \&c. + x^{(n-1)}x^{(n)} + x^{(n+1)}x^{(n+2)} + x^{(n+1)}x^{(n+3)} + x^{(n+2)}x^{(n+3)} + \&c. + x^{(2n-1)}x^{(2n)},$$

$$\gamma = x'x''x''' + x'x'''x^{\text{IV}} + x''x'''x^{\text{IV}} + \&c. + x^{(n-2)}x^{(n-1)}x^{(n)} + x^{(n+1)}x^{(n+2)}x^{(n+3)} + x^{(n+1)}x^{(n+3)}x^{(n+4)} + x^{(n+2)}x^{(n+3)}x^{(n+4)} + \&c. + x^{(2n-2)}x^{(2n-1)}x^{(2n)},$$

& ainſi de ſuite

$$\mu = x' + x'' + x''' + \&c. + x^{(n)} - x^{(n+1)} - x^{(n+2)} - x^{(n+3)} - \&c. - x^{(2n)},$$

$$\nu = x'x'' + x'x''' + x''x''' + \&c. + x^{(n-1)}x^{(n)} - x^{(n+1)}x^{(n+2)} - x^{(n+1)}x^{(n+3)} - x^{(n+2)}x^{(n+3)} - \&c. - x^{(2n-1)}x^{(2n)},$$

$$\pi = x'x''x''' + x'x'''x^{\text{IV}} + x''x'''x^{\text{IV}} + \&c. + x^{(n-2)}x^{(n-1)}x^{(n)} - x^{(n+1)}x^{(n+2)}x^{(n+3)} - x^{(n+1)}x^{(n+3)}x^{(n+4)} - x^{(n+2)}x^{(n+3)}x^{(n+4)} - \&c. - x^{(2n-2)}x^{(2n-1)}x^{(2n)},$$

& ainſi de ſuite.

Donc, puiſque $u = a\mu + b\nu + c\pi + \&c.$ on connoitra quelle fonction des racines x', x'', x''' &c. $x^{(2n)}$ doit être la quantité u; & de là on pourra déterminer *a priori* le degré & la forme de l'équation en u par la conſidération de ſes racines, lesquelles ne ſeront autre choſe que les différentes valeurs que la fonction dont il s'agit pourra recevoir, en faiſant entre les racines x', x'', x''' &c. $x^{(2n)}$ toutes les permutations poſſibles, comme nous l'avons expliqué ſuffiſamment ailleurs.

29. Donc, 1° comme le nombre des quantités x', x'', x''' &c. $x^{(2n)}$ eſt $2n$, on ſait que le nombre de toutes les permutations poſſibles ſera repréſenté par

$$1.\ 2.\ 3.\ 4\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ 2n;$$

mais il eſt viſible que les fonctions μ, ν, π &c. ne changent point de forme en faiſant toutes les permutations poſſibles entre les n quantités x', x'', x''' &c. $x^{(n)}$, permutations dont le nombre eſt exprimé par $1.\ 2.\ 3 - - - n$; & qu'il en eſt de même à l'égard des permutations entre les autres n quantités $x^{(n+1)}$, $x^{(n+1)}$, $x^{(n+2)}$ &c. $x^{(2n)}$; donc, puiſque chacune de ces permutations ſe combine avec toutes les autres dans le nombre total des combinaiſons $1.\ 2.\ 3\ -\ -\ -\ -\ (2n)$, il s'enſuit que pour avoir le nombre des combinaiſons utiles, c'eſt à dire qui donnent des expreſſions différentes de u, il faudra diviſer deux fois le nombre $1.\ 2.\ 3\ -\ -\ -\ 2n$ par le nombre $1.\ 2.\ 3\ -\ -\ -\ -\ -\ n$, ce qui donnera celui-ci $\frac{1.\ 2.\ 3\ -\ -\ -\ -\ -\ 2n}{(1.\ 2.\ 3\ -\ -\ -\ -\ -\ n)^2}$. ou bien

$$\frac{2n(2n-1)\ (2n-2)\ -\ -\ -\ -\ (n+1)}{n.\ (n-1)\ \ (n-2)\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ 1},$$

nombre qui, en ſuppoſant $m = 2^r$ & par conſéquent $n = 2^{r-1}$, ſera impairement pair, comme nous l'avons vu dans l'Art. 16.

2°. Il eſt clair que ſi l'on échange à la fois les quantités x', x'', x''' &c. $x^{(n)}$ en $x^{(n+1)}$, $x^{(n+2)}$, $x^{(n+3)}$ &c. $x^{(2n)}$, dans les expreſſions de μ, ν, π &c., ces expreſſions changeront ſimplement de ſignes ſans changer de valeur; donc toutes les valeurs particulieres de la fonction u ſeront deux à deux égales & de ſignes contraires; de ſorte que l'équation en u, dont le degré doit être impairement pair, manquera de toutes les puiſſances impaires, & pourra ſe transformer par la ſuppoſition de $u^2 = t$ en une équation en t d'un degré impair.

3°. On peut démontrer par un raiſonnement analogue à celui des Art. 22 & 23, que le dernier terme de la transformée en t dont nous parlons

ſera toujours négatif, étant néceſſairement égal au carré d'une fonction rationelle des coëfficiens A, B, C &c. de l'équation propoſée, affecté du ſigne —. Car il eſt d'abord clair que ſi on ſuppoſoit ſimplement $u = \mu$, on auroit le cas des Articles cités, puiſque les lettres a, b, c, d &c. dans les formules de ces Articles déſignent les mêmes quantités que nous avons repréſentées ci-deſſus par x', x'', x''' &c. $x^{(2n)}$, c'eſt à dire les racines de l'équation propoſée.

De plus, en examinant les raiſonnemens des mêmes Articles, il n'eſt pas difficile de voir qu'ils ne tiennent pas à la forme particuliere de la fonction μ, mais ſeulement à la propriété qu'a cette fonction de demeurer la même, tandis qu'on échange entr'elles les racines x', x'', x''' &c. $x^{(n)}$, ou les racines $x^{(n+1)}$, $x^{(n+2)}$, $x^{(n+3)}$ &c. $x^{(2n)}$, & de devenir négative quand on échange les premieres racines dans les dernieres; or cette propriété a lieu également dans les autres fonctions ν, π &c., & dans la fonction générale $a\mu + b\nu + c\pi +$ &c. comme nous l'avons déjà obſervé plus haut; de ſorte qu'on peut hardiment appliquer à l'équation ci-deſſus en u ou en t les mêmes concluſions qu'on a trouvées dans les Articles cités.

30. On eſt donc aſſuré que l'équation en t aura toujours une racine réelle poſitive, & que par conſéquent la quantité $u = \sqrt{t}$ aura toujours au moins une valeur réelle. Or dès qu'on connoitra la valeur de la quantité u on pourra déterminer par ſon moyen les valeurs des autres quantités α, β, γ &c. μ, ν, π &c. lesquelles ſont, ainſi que la quantité u, repréſentées par des fonctions des mêmes racines x', x'', x''' &c.; & de ce que nous avons démontré ailleurs (*Mém. de 1772. p. 207. & ſuiv.*) il s'enſuit que chacune de ces quantités α, β, γ &c. μ, ν, π &c. ſera donnée par une équation du premier degré ſeulement, ſi la valeur de u eſt une racine inégale de l'équation en u; mais ſi cette valeur eſt une racine égale, alors chacune des quantités α, β, γ &c. μ, ν, π &c. ſera donnée par une équation dont le degré aura un expoſant égal à celui de l'égalité de la racine u; or comme $u = \pm \sqrt{t}$, on voit d'abord que l'équation en u n'aura de racines égales qu'autant que la transformée en t en aura de telles, ou

qu'elle aura des racines nulles; car il eſt viſible que $t = 0$ donne deux valeurs égales à u.

Dans le premier cas, puiſque l'équation en t eſt d'un degré impair (Art. 29. N°. 2.), on pourra démontrer, comme on l'a fait plus haut (Art. 24), que cette équation ne pourra avoir que des racines égales d'un degré d'égalité marqué par des nombres impairs; d'où l'on conclura ſur le champ que, quelles que ſoient les racines de l'équation en t, pourvu qu'aucune ne ſoit nulle, on aura toujours non ſeulement pour u mais auſſi pour α, β, γ &c. μ, ν, π &c. des valeurs réelles; de ſorte que les coëfficiens M, N, P &c. M', N', P' &c. des deux facteurs de l'équation propoſée auront ſurement des valeurs réelles (Art. 27).

Le ſecond cas, c'eſt à dire celui où l'équation en t auroit quelque racine nulle, préſente d'abord les mêmes difficultés que l'on a déjà conſidérées dans l'Art. 25; mais je remarque qu'à cauſe de $u = a\mu + b\nu + c\pi +$ &c., où les coëfficiens a, b, c &c. ſont à volonté, on peut toujours prendre ces coëfficiens tels que le cas dont il s'agit n'ait pas lieu, à moins que parmi les valeurs correſpondantes de μ, ν, π &c. il ne s'en trouve qui ſoient nulles à la fois. Car ſuppoſons que les valeurs de μ, ν, π &c. ne ſoient jamais nulles en même tems, en ce cas il eſt viſible que ſi la quantité $t = u^2$ a des valeurs nulles, ce ne pourra être qu'en vertu de la relation qui ſe trouvera entre les coëfficiens a, b, c &c.; par conſéquent ces valeurs ceſſeront d'être nulles dès qu'on donnera d'autres valeurs aux mêmes coëfficiens; ainſi on ſera toujours le maître de faire en ſorte que l'équation en t n'ait aucune racine nulle.

Il ne reſte donc plus de difficulté que pour le cas où l'on auroit à la fois $\mu = 0$, $\nu = 0$, $\pi = 0$ &c.; mais il eſt viſible (Art. 27.) qu'on aura alors $M' = M$, $N' = N$, $P' = P$ &c. de ſorte que dans ce cas l'équation propoſée ne ſera autre choſe que celle-ci

$$x^n - Mx^{n-1} + Nx^{n-2} - Px^{n-3} + \text{\&c.} = 0$$

élevée au carré; par conſéquent la propoſée s'abaiſſera d'elle-même à un degré moindre de la moitié; & il eſt viſible que les valeurs des coëfficiens

M, N, P &c. devront être toutes rationelles, & par conſéquent réelles, autrement il feroit impoſſible que l'équation

$$x^n - Mx^{n-1} + Nx^{n-2} - Px^{n-3} + \&c. = 0$$

étant élévée au carré devînt rationelle & comparable à la propoſée

$$x^{2n} - Ax^{2n-1} + Bx^{2n-2} - Cx^{2n-3} + \&c. = 0.$$

D'ailleurs il eſt facile de prouver que les conditions $\mu = 0$, $\nu = 0$, $\pi = 0$ &c. emportent néceſſairement l'égalité entre les racines x', x'', x''' &c. $x^{(n)}$, & les racines $x^{(n+1)}$, $x^{(n+2)}$, $x^{(n+3)}$ &c. $x^{(2n)}$ en ſorte que la propoſée du degré $m = 2n$ aura toutes ſes racines égales deux à deux, & pourra par conſéquent s'abaiſſer à une équation du degré n qui aura les mêmes racines mais ſimples & inégales.

Ainſi toutes les difficultés ſont réſolues, & il ne reſte plus rien à deſirer pour la démonſtration complette du théoreme qui fait l'objet de ce Mémoire; nous allons le terminer par donner un exemple de l'application de la méthode qu'on vient d'expliquer.

31. Soit, comme dans l'Art. 6, l'équation générale du quatrieme degré

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

qu'on ſe propoſe de décompoſer en ces deux-ci:

$$x^2 - Mx + N = 0, \qquad x^2 - M'x + N' = 0;$$

en comparant terme à terme le produit de ces dernieres avec celle-là on aura d'abord

$$M + M' = A, \qquad MM' + N + N' = B,$$
$$MN' + M'N = C, \qquad NN' = D;$$

& faiſant

$$M = \frac{\alpha + \mu}{2}, \qquad N = \frac{\beta + \nu}{2}$$
$$M' = \frac{\alpha - \mu}{2}, \qquad N' = \frac{\beta - \nu}{2}$$

on aura

$$\alpha = A, \qquad \alpha^2 - \mu^2 + 4\beta = 4B,$$
$$\alpha\beta - \mu\nu = 2C, \qquad \beta^2 - \nu^2 = 4D$$

d'où l'on tire d'abord

$$\alpha = A, \qquad \beta = \frac{4B - A^2 + \mu^2}{4};$$

ſubſtituant enſuite ces valeurs dans les deux dernieres équations on aura

$$A\mu^2 - 4\mu\nu - A^3 + 4AB - 8C = 0$$
$$\mu^4 + 2(4B - A^2)\mu^2 - 16\nu^2 + (4B - A^2)^2 - 64D = 0.$$

On fera maintenant

$$u = a\mu + b\nu$$

& ſubſtituant par exemple $\frac{u - a\mu}{b}$ à la place de ν on aura ces deux équations-ci

$$\left(A - \frac{4a}{b}\right)\mu^2 - \frac{4\mu u}{b} - A^3 + 4AB - 8C = 0,$$
$$\mu^4 + \left(8B - 2A^2 - \frac{16a^2}{b^2}\right)\mu^2 + \frac{32a\mu u}{b^2} - \frac{16u^2}{b^2}$$
$$+ (4B - A^2)^2 - 64D = 0;$$

d'où l'on chaſſera μ pour avoir une réduite en u.

Suppoſons pour abréger

$$(A^3 - 4AB + 8C) = F$$
$$(4B - A^2)^2 - 64D = G$$
$$bA - 4a = f$$
$$8b^2B - 2b^2A - 16a^2 = g$$

on aura

$$f\mu^2 - 4\mu u - bF = 0$$
$$b^2\mu^4 + g\mu^2 + 32a\mu u - 16u^2 + b^2G = 0;$$

donc

donc $\mu^2 = \frac{4\mu u + bF}{f}$, &

$$\mu^4 = \frac{64\mu u^3}{f^3} + \frac{16bFu^2}{f^2} + \frac{8bF\mu u}{f^2} + \frac{b^2F^2}{f^2}$$

donc

$$64b^2\mu u^3 + 16b^3Fu^2 + 8Fb^3F\mu u + fb^4F^2$$
$$+ 4f^2g\mu u + f^2gbF + 32f^3a\mu u - 16f^3u^2$$
$$+ f^3b^2G = 0$$

d'où l'on tire

$$\mu = -\frac{16(b^3F - f^3)u^2 + fb^4F^2 + f^2gbF + f^3b^2G}{64b^2u^3 + 4fu(2b^3F + gf + 8af^2)};$$

ainsi il n'y aura plus qu'à ſubſtituer cette valeur dans la premiere équation $f\mu^2 - 4\mu u - bF = 0$, & l'on aura cette équation finale

$$f(16(b^3F - f^3)u^2 + bf(b^3F^2 + fgF + f^2bG))^2$$
$$+ 16(16(b^3F - f^3)u^2 + bf(b^3F^2 + fgF + f^2bG))$$
$$\times (16b^2u^2 + f(2b^3F + gf + 8af^2))u^2$$
$$- 16bF(16b^2u^2 + f(2b^3F + gf + 8af^2))^2u^2 = 0,$$

laquelle étant ordonnée par rapport à u montera au ſixieme degré & ne contiendra que des puiſſances paires de u; de ſorte qu'en faiſant $u^2 = t$, on aura celle-ci du troiſieme degré

$$t^3 + - - - - - \left(\frac{b^3F^2 + fgF + f^2bG}{16}\right)^2 = 0,$$

où l'on voit que le dernier terme eſt un carré avec le ſigne $-$, de ſorte que la quantité t aura toujours une valeur réelle poſitive; on voit de plus qu'à moins que l'on n'ait à la fois $F = 0$ & $G = 0$, on pourra toujours faire en ſorte que t n'ait aucune valeur nulle; car il n'y aura qu'à prendre a & b de maniere que l'on ait

$$b^3F^2 + fgF + f^2bG > \text{ ou } < 0;$$

je dis à moins que F & G ne ſoient nuls à la fois, car il eſt viſible qu'alors la quantité dont il s'agit ſera toujours nulle, quelque valeur que l'on donne à a & b; mais alors on aura

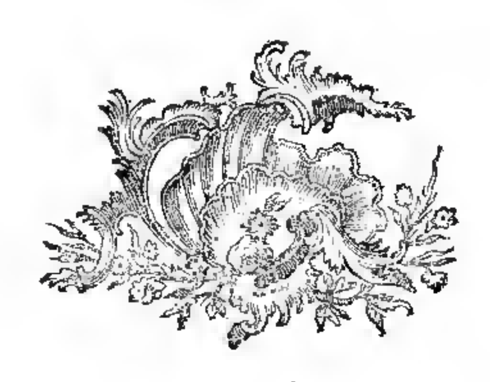
$$C = \frac{AB}{2} - \frac{A^3}{8}, \qquad D = \left(\frac{B}{2} - \frac{A^2}{4}\right)^2$$

& l'équation propoſée deviendra

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - \left(\frac{AB}{2} - \frac{A^3}{8}\right)x + \left(\frac{B}{2} - \frac{A^2}{4}\right)^2 = 0$$

laquelle eſt évidemment le carré de celle-ci

$$x^2 - \frac{A}{2}x + \frac{B}{2} - \frac{A^2}{4} = 0.$$



SUR

LES RÉFRACTIONS ASTRONOMIQUES.

PAR M. DE LA GRANGE.

1.

On ſait que les rayons qui traverſent obliquement notre atmoſphere ſe détournent de la ligne droite & décrivent des courbes concaves vers la ſurface de la Terre, en ſorte qu'ils nous parviennent toujours dans une direction moins inclinée à l'horizon que celle ſuivant laquelle ils ſont entrés dans l'atmoſphere.

Le changement qui en réſulte dans la hauteur apparente des aſtres eſt ce qu'on nomme en Aſtronomie *réfraction céleſte*, parce qu'en effet il n'eſt dû qu'à la réfraction continuelle que ſouffrent les rayons en pénétrant dans les couches ſucceſſives de l'atmoſphere, leſquelles augmentent toujours de denſité à meſure qu'elles s'approchent de la Terre. Ce phenomene n'a pas été tout à fait inconnu aux anciens Aſtronomes, mais les modernes ſont les ſeuls qui l'aient examiné avec aſſez d'exactitude pour pouvoir en tenir compre dans leurs obſervations.

Nous ne ferons point ici l'hiſtoire des travaux des différens Aſtronomes qui depuis Tycho Brahé juſqu'à préſent ſe ſont appliqués à la détermination de cet élement; notre objet eſt uniquement d'examiner cette matiere par la théorie & d'après les données que les nouvelles expériences de M. de Luc (*) peuvent fournir rélativement à la loi de la dilation de l'air dans les différentes couches de l'atmoſphere.

2. Si la ſurface de la Terre étoit plane & que par conſéquent les différentes couches de l'atmoſphere dont la denſité eſt uniforme ſe fuſſent auſſi,

(*) *Recherches ſur les modifications de l'Atmoſphere &c. à Geneve 1772.*

il n'y auroit aucune difficulté à déterminer l'effet de la réfraction d'un rayon qui traverseroit l'atmosphere sous un angle quelconque; car il est démontré que la réfraction seroit la même dans ce cas que si le rayon entroit immédiatement dans la couche la plus basse & par conséquent la plus dense de l'atmosphere, sans passer par toutes les autres couches intermédiaires; de sorte que, comme on connoit par expérience la puissance réfractive de l'air pour une densité quelconque, & qu'on peut avoir à chaque instant par l'observation du baromètre & du thermomètre la densité actuelle de l'air dans le lieu de l'observation, on seroit assuré de pouvoir toujours déterminer exactement la quantité de la réfraction astronomique pour telle hauteur des astres que l'on voudroit. Mais il n'en sera pas de même si on a égard, comme l'on doit, à la rondeur de la surface de la Terre, & par conséquent aussi à celle des différentes couches de l'atmosphere. Dans ce cas l'effet total de la réfraction dépend de la réfraction particuliere de chaque couche, & on ne peut le déterminer sans connoitre la nature de la courbe même que décrivent les rayons de la lumiere en traversant toute l'atmosphere; mais pour cela il faut connoitre auparavant la proportion selon laquelle l'air est différemment comprimé à différentes hauteurs, parce que la vertu réfractive de l'air varie toujours avec sa densité.

3. Voyons donc d'abord ce que l'expérience & la théorie peuvent nous donner de lumieres sur ce sujet.

Mr. Mariotte, & après lui Mrs. Amontons & Hawksbée ont trouvé, par des expériences réitérées & aussi exactes qu'il est possible, que l'air se comprime à proportion des poids dont il est chargé, en sorte que l'élasticité de l'air qui est nécessairement proportionelle au poids comprimant l'est aussi à sa densité: mais cette proportion ne subsiste que tant que la chaleur de l'air est la même; car les deux derniers Physiciens ont trouvé ensuite que quand la chaleur de l'air augmente, la densité restant la même, son élasticité augmente aussi dans la même proportion; d'où il s'ensuit qu'en général l'élasticité de l'air est en raison composée de sa densité & de la chaleur qui y regne.

Or comme le ressort de l'air dans un lieu quelconque est toujours nécessairement proportionel à la hauteur du baromètre dans ce même lieu, on

pourra prendre cette hauteur, que nous défignerons par y, pour la mefure de l'élafticité de l'air; par conféquent fi on défigne de plus par δ la denfité de ce même air, & par φ fa chaleur, on aura $y = m\delta\varphi$, m étant un coëfficient conftant qui doit être déterminé par l'expérience.

Maintenant fi on nomme x la hauteur du lieu au deffus du niveau de la mer, où la hauteur du baromètre eft y, il eft clair qu'en confidérant une colonne verticale d'air dont la hauteur foit infiniment petite dx, on aura $-dy$ pour la hauteur de la petite colonne de mercure qui y fera équilibre (je donne le figne $-$ à la differentielle dy parce que y diminue pendant que x augmente); par conféquent $-\frac{dy}{dx}$ fera le rapport de deux volumes également pefants de mercure & d'air, c'eft à dire le rapport des gravités fpécifiques ou des denfités de l'air & du mercure; en forte que prenant la denfité du mercure pour l'unité, on aura celle de l'air $\delta = -\frac{dy}{dx}$. Donc fubftituant cette valeur dans l'équation $y = m\delta\varphi$, on aura celle-ci $-\frac{dy}{y} = \frac{dx}{m\varphi}$; par laquelle on pourra connoître la rélation entre les hauteurs y du baromètre, pourvu qu'on connoiffe quelle fonction la quantité φ eft de x ou de y; mais cette derniere connoiffance nous manque encore, & Mr. de Luc qui a fait beaucoup de recherches favantes & utiles fur cet objet avoue qu'il n'a rien trouvé là-deffus qui ait pu le fatisfaire.

Cependant cet habile phyficien a découvert *a pofteriori* une regle affez fimple pour corriger les hauteurs des lieux déduites des obfervations du baromètre, fuivant les variations de la chaleur de l'air; & cette regle même pourroit fervir à découvrir la loi de ces variations à differentes hauteurs; c'eft ce qu'il eft bon de développer.

4. Mr. de Luc trouve d'abord que lorfque la chaleur de l'air eft telle que le thermomètre vulgairement dit de Réaumur eft à $16\frac{3}{4}$, la différence

des logarithmes tabulaires des hauteurs du baromètre exprimées en lignes (ces logarithmes étant regardés comme des nombres entiers) donne aſſez exactement en milliemes de toiſes la différence de hauteur des lieux où le baromètre a été obſervé; de ſorte qu'à proprement parler la différence des logarithmes multipliée par 10000000, c'eſt à dire par dix millions, eſt égale à la différence des hauteurs des ſtations exprimées en milliemes de toiſes, ou, ce qui revient au même, la différence des logarithmes des hauteurs du baromètre exprimées en lignes, donne la différence même des hauteurs des lieux exprimés en dixaines de mille toiſes.

Enſuite Mr. de Luc trouve que lorſque le thermomètre eſt au-deſſus, ou au-deſſous de $16^\circ \frac{3}{4}$, la correction à faire à la différence de hauteur trouvée par le calcul précédent pour chaque degré du thermomètre, eſt à cette différence même dans la raiſon conſtante de 1 à 215. (Voyez Tom. 2. Art. 588 & 607.)

Ces données vont nous ſervir pour déterminer la conſtante m dans l'équation $-\frac{dy}{y} = \frac{dx}{m\varphi}$ trouvée ci-deſſus, ainſi que l'expreſſion de la chaleur φ en degrés du thermomètre.

Car en ſuppoſant la quantité φ conſtante l'intégration donnera $\mathrm{l}b - \mathrm{l}y = \frac{x-a}{m\varphi}$, en dénotant par b la hauteur du baromètre qui répond à la hauteur $x = a$; d'où l'on voit que la différence des logarithmes des hauteurs b & y du baromètre eſt proportionelle à la différence $x - a$ de hauteur des deux ſtations.

Or ſi on ſuppoſe que la chaleur φ ſoit celle qui répond à $16^\circ \frac{3}{4}$ du thermomètre & qu'on prenne cette chaleur pour l'unité; qu'on exprime de plus les hauteurs b & y du baromètre en lignes, & les hauteurs a & x des lieux en dixaines de mille toiſes; qu'enfin on réduiſe les logarithmes hyperboliques $\mathrm{l}b$ & $\mathrm{l}y$ en tabulaires, en les diviſant par le logarithme hyperbolique de 10, & déſignant ceux-ci par la caractériſtique L, on

aura l'équation $Lb - Ly = \frac{x - a}{m l 10}$, laquelle devra se réduire, suivant Mr. de Luc, à celle-ci $Lb - Ly = x - a$; en sorte qu'on aura $m l 10 = 1$, c'est à dire $m = \frac{1}{l 10} = 0,4342945$.

Dénotons maintenant par t le nombre des degrés du thermométre au-dessus de $16^\circ \frac{3}{4}$, auxquels répondra une chaleur quelconque Φ; & il est facile de voir qu'on aura, suivant Mr. de Luc, l'équation $(Lb - Ly)\left(1 + \frac{t}{215}\right) = x - a$, savoir $Lb - Ly = \frac{x - a}{1 + \frac{t}{215}}$; & par conséquent $\Phi = 1 + \frac{t}{215}$.

Ainsi l'équation différentielle entre x & y deviendra

$$- \frac{dy}{y} = \frac{dx\, l 10}{1 + \frac{t}{215}}$$

où il ne s'agira plus que d'avoir la valeur de t en x ou en y; mais c'est ce qui n'est pas aisé; car quoiqu'il soit constant que la chaleur va en diminuant dans l'atmosphere à mesure qu'on s'éleve au-dessus de la surface de la Terre, on n'a pu découvrir encore ni par la théorie ni par l'expérience la loi de cette diminution.

5. Ne pouvant donc nous flatter de connoître la vraie valeur de t en x, nous sommes réduits à employer des hypotheses & des approximations.

Et premierement il est clair que le terme $\frac{t}{215}$ ne sauroit varier beaucoup dans toute l'étendue de l'atmosphere; car comme t exprime des degrés du thermométre de Réaumur, au-dessus ou au-dessous du terme de $16^\circ \frac{3}{4}$, quand on donneroit à t une variation de 55°, depuis le bas jusqu'au haut de l'atmosphere, ce qui seroit surement excessif, parce qu'en supposant la chaleur au bas de l'atmosphere de 25°, on auroit pour le haut

de l'atmofphere un froid de 40° au-deffous du terme de la congélation, on n'auroit pourtant qu'environ $\frac{1}{27}$ pour la plus grande valeur pofitive de $\frac{t}{215}$, & environ $-\frac{1}{4}$ pour la plus grande valeur négative de la même quantité. A plus forte raifon la variation du terme $\frac{t}{215}$ fera fort petite dans l'étendue de l'atmofphere qui répond à la hauteur de nos plus hautes montagnes; en forte que quand il ne fera queftion que de mefurer l'élévation des montagnes par le moyen du baromètre, on pourra fans erreur fenfible regarder la quantité t comme conftante, & pour plus d'exactitude on pourra prendre pour t le degré moyen entre ceux qu'on aura obfervés aux deux extrémités de la hauteur qu'il s'agit de mefurer.

Ainfi nommant c & t les degrés obfervés aux deux ftations, où les hauteurs du baromêtre font b & y, on aura pour la diftance perpendiculaire $x - a$ d'une ftation à l'autre la quantité $(L.b - Ly)\left(1 + \frac{c+t}{2.215}\right)$, en prenant $\frac{c+t}{2}$ pour la valeur moyenne de t.

Cette regle eft la même que celle que M. de Luc a trouvée *a pofteriori*, & qui s'accorde très bien avec les obfervations, comme on peut le voir par le tableau qu'il en a donné dans le Chap. V. de la quatrieme Partie de fon Ouvrage.

6. Si on pouvoit regarder cette regle comme tout à fait exacte il ne feroit pas difficile d'en déduire la véritable loi de la diminution de la chaleur de bas en haut. Mr. de Luc paroit croire que cette regle fuppofe que la chaleur diminue en progreffion arithmétique (Art. 658. de fon Ouvrage); mais on va voir que cette conclufion n'eft pas exacte.

L'équation donnée par la regle précédente eft celle-ci

$$(L.b - L.y)\left(1 + \frac{c+t}{2.215}\right) = x - a$$

ou

ou bien, en réduisant les logarithmes tabulaires $L.b$, $L.y$ aux logarithmes hyperboliques lb, ly, en multipliant ceux-là par $l\,10$,

$$(lb - ly)\left(1 + \frac{c+t}{2.215}\right) = (x - a)\,l\,10;$$

d'où l'on tire

$$lb - ly = \frac{(x-a)\,l\,10}{1 + \frac{c+t}{2.215}}$$

& différentiant $-\frac{dy}{y} = d.\frac{(x-a)\,l\,10}{1+\frac{c+t}{2.215}}$; mais on a par l'équation fondamentale $-\frac{dy}{y} = \frac{dx.\,l\,10}{1+\frac{t}{215}}$; donc il viendra l'équation

$$d.\frac{x-a}{1+\frac{c+t}{2.215}} = \frac{dx}{1+\frac{t}{215}}$$

par laquelle on pourra déterminer t en x, en observant que $t = c$ lorsque $x = a$; cette équation donne

$$\frac{dx}{x-a} = \frac{\left(1+\frac{t}{215}\right)dt}{(t-c)\left(1+\frac{c+t}{2.215}\right)} = \frac{dt}{t-c} + \frac{1}{2.215} \times \frac{dt}{1+\frac{c+t}{2.215}};$$

dont l'intégrale est

$$l(x-a) = l(t-c) + l\left(1+\frac{c+t}{2.215}\right) + lk,$$

k étant une constante arbitraire; d'où l'on tire

$$x - a = k(t-c)\left(1+\frac{c+t}{2.215}\right)$$

& comme en faisant $t = c$ on a déjà $x = a$, il est clair que la constante c demeure à volonté.

Si on néglige le terme $\frac{c+t}{2.215}$ vis à vis de l'unité, on a $t - c = \frac{x-a}{k}$, c'est à dire que les différences de chaleur sont proportionelles aux

différences de hauteur; en forte que les hauteurs étant prifes en progreffion arithmétique, les degrés de chaleur le feront auffi; mais on voit par notre formule que cette loi, qui eft celle de Mr. de Luc, n'eft vraie que par approximation.

7. Si on vouloit trouver une rélation entre t & y, il n'y auroit qu'à faire pour plus de fimplicité $\text{l}y = z$, & $\text{l}b = f$, pour avoir d'un côté $f - z = \frac{(x - a)\text{l}10}{1 + \frac{c + t}{2.215}}$, & de l'autre $- \text{d}z = \frac{\text{d}x\,\text{l}10}{1 + \frac{t}{215}}$; & l'on trouveroit

$$\text{d}x\,\text{l}10 = \text{d}.(f - z)\left(1 + \frac{c + t}{2.215}\right) = - \text{d}z\left(1 + \frac{t}{215}\right);$$

d'où l'on tireroit l'équation $\frac{\text{d}z}{f - z} = \frac{\text{d}t}{c - t}$, laquelle donne par l'intégration $c - t = k(f - z) = k(\text{l}b - \text{l}y)$; de forte que les différences de chaleur feroient proportionelles aux différences des logarithmes des hauteurs barométriques.

Il eft remarquable que cette loi eft celle que Mr. de Luc a trouvée pour la chaleur de l'eau bouillante à différentes hauteurs (Chap. VI. du *Supplément*); mais comme cet Auteur a obfervé qu'il n'y a aucune rélation fixe entre la chaleur de l'eau bouillante & celle de l'air, on eft en droit d'en conclure que la formule précédente n'eft nullement exacte; & qu'ainfi la regle que donne Mr. de Luc pour la correction des hauteurs déterminées par les obfervations du baromêtre en conféquence de la variation de la chaleur, n'eft pas tout à fait rigoureufe, mais feulement approchée.

8. Comme la chaleur de l'air diminue toujours à mefure qu'on s'éleve au-deffus de la furface de la Terre, il eft vifible que l'hypothefe la plus fimple qu'on puiffe faire rélativement à cette diminution eft celle, où l'on fuppofe que la chaleur décroiffe en progreffion arithmétique; ainfi il eft bon de voir auffi les réfultats que cette hypothefe doit donner.

Supposons donc en général $t = p - qx$, & si on nomme c & γ les degrés de chaleur qui ont lieu aux hauteurs a & α, on aura les deux équations $c = p - qa$, & $\gamma = p - q\alpha$, lesquelles serviront à déterminer les deux constantes p & q.

Substituant donc cette valeur de t dans l'équation différentielle $-\frac{dy}{y} = \frac{dx\,110}{1 + \frac{t}{215}}$ de l'Art. 4, elle deviendra celle-ci $-\frac{dy}{y} = \frac{dx\,110}{1 + \frac{p - qx}{215}}$, dont l'intégrale est $1\frac{b}{y} = \frac{215\,110}{q}\,1\frac{k}{1 + \frac{p - qx}{215}}$, k étant une constante qu'il faut déterminer en sorte que lorsque $y = b$ on ait $x = a$, ce qui donnera $1\frac{b}{y} = \frac{215\,110}{q}\,1.\frac{1 + \frac{p - qa}{215}}{1 + \frac{p - qx}{215}}$; & de là

$$\frac{y}{b} = \left(\frac{1 + \frac{p - qx}{215}}{1 + \frac{p - qa}{215}}\right)^{\frac{215\,110}{q}} = \left(1 - \frac{q}{215} \times \frac{x - a}{1 + \frac{c}{215}}\right)^{\frac{215\,110}{q}};$$

d'où l'on tire

$$x - a = \left(1 + \frac{c}{215}\right) \times \frac{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{q}{215\,110}}}{\frac{q}{215}}.$$

Si la quantité $\frac{q}{215\,110}$ étoit infiniment petite, on auroit $1 - \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{q}{215\,110}} = -\frac{q}{215\,110}\,1\frac{y}{b} = \frac{q}{215}\,\mathrm{L}\frac{b}{y}$; donc $x - a = \left(1 + \frac{c}{215}\right)\mathrm{L}\frac{b}{y}$. C'est le cas où la chaleur t seroit constante & $= c$; ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé plus haut.

Ainsi cette formule approchera d'autant plus d'être exacte que la quantité $\frac{q}{215110}$ sera plus petite. Or on a $q = \frac{c - \gamma}{\alpha - a}$, où $c - \gamma$ est la différence de chaleur qui répond à la différence de hauteur $\alpha - a$; donc si on prend pour l'un des termes de la chaleur la température des caves de l'observatoire qui est d'environ 10°, & pour l'autre le froid de la glace qui est à zéro du thermomètre, on aura $c - \gamma = 10^\circ$; & si on suppose que la hauteur à laquelle regne naturellement ce froid soit de 2000 toises, ce qui est peut-être trop fort, on aura $\alpha - a = \frac{1000}{5000} = \frac{1}{5}$; donc $q = 50$, & $\frac{q}{215110} = \frac{1}{10}$ à peu près.

Si l'on veut juger combien la quantité $1 - \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{q}{215110}}$ s'éloigne de $\frac{-q}{215110}\,l\,\frac{y}{b}$ pour une valeur donnée de $\frac{q}{215110}$, il n'y aura qu'à supposer $1 - \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{q}{215110}} = z$, & l'on aura $\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{q}{215110}} = 1 - z$, & prenant les logarithmes $\frac{-q}{215110}\,l\,\frac{y}{b} = -\,l(1 - z)$; en sorte que la différence cherchée sera $-\,l(1 - z) - z = \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \&c. < \frac{z^2}{2(1 + \frac{1}{2}z)^2}$ lorsque z est < 1. Cette différence sera donc d'autant plus petite que z sera plus petite, & par conséquent que $\frac{y}{b}$ sera plus grande. Donc le rapport de cette différence à la quantité $\frac{-q}{215110}\,l\,\frac{y}{b}$ sera $< \frac{z}{2 + z}$ à cause de $-\,l(1 - z) > \frac{z}{1 - \frac{z}{2}}$.

D'où il s'ensuit qu'en employant la formule qui résulte de notre hypothese pour calculer la hauteur des montagnes, l'écart sera d'autant plus grand que la quantité $\frac{y}{b}$ sera plus petite, mais sa plus grande valeur sera

toujours moindre que $\frac{z}{2}$ ou $\frac{1-\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{q}{215110}}}{2}$ du total. Or comme la plus grande hauteur où l'on ait monté est, suivant Mr. de la Condamine, celle du Coraçon, montagne de la Cordeliere qui est élevée au-dessus du niveau de la mer de 2470 toises, & qu'à cette hauteur le mercure se tenoit à 15 pouces 10 lignes, il s'ensuit que la plus petite valeur de $\frac{y}{b}$ que l'on puisse jamais avoir à calculer sera toujours $< \frac{1}{2}$. Or prenant $\frac{y}{b} = \frac{1}{2}$, & faisant comme ci-dessus $q = 50$, & $\frac{q}{215110} = \frac{1}{10}$, on trouve $z = 0{,}067$; donc $\frac{z}{2-z} = \frac{67}{1933} = \frac{1}{29}$, de sorte que sur une hauteur de 2470 toises on aura une erreur moindre que 85 toises.

Si on fait $\frac{y}{b} = \frac{3}{4}$, ce qui est à peu près le cas des plus hautes montagnes de l'Europe, on trouve $z = 0{,}03$, & $\frac{z}{2-z} = \frac{3}{197} = \frac{1}{66}$; ainsi sur une hauteur de 1000 toises, telle que celle du Mont-d'or en Auvergne, où le mercure s'est soutenu à environ 22 pouces, l'erreur sera moindre que 15 toises.

D'où l'on voit que la formule résultante de notre hypothese de la diminution de la chaleur en progression arithmétique donnera pour la hauteur des montagnes des résultats peu différens de ceux qui viennent de la formule reçue des physiciens, où la chaleur est regardée comme constante.

9. Mr. Euler dans ses *Recherches sur la réfraction* imprimées dans le Volume de cette Académie pour l'année 1754. suppose que la chaleur décroisse de bas en haut suivant une progression harmonique. Suivant cette hypothese la valeur de t seroit de la forme $\frac{p+qx}{1+mx}$, & l'on auroit trois

coëfficiens p, q, m à déterminer, en ſorte qu'on pourroit faire quadrer cette formule avec trois obſervations données. On pourroit même ſuppoſer plus généralement $z = \frac{a + bx + cx^2 + \&c.}{p + qx + rx^2 + \&c.}$ en y admettant autant de termes qu'on voudroit; mais il ſeroit inutile de s'étendre dans ces détails parce qu'il n'en pourroit jamais réſulter que des concluſions hypothétiques.

10. Je viens maintenant à l'objet principal de ce Mémoire, à la recherche de la loi de la réfraction de la lumiere dans l'atmoſphere; & je remarque d'abord que par des expériences très exactes faites par la Société Royale de Londres en 1699, & répétées pluſieurs années après par Mr. Hawksbée qui en donne le détail dans le Chap. IV de ſes *Expériences phyſico-méchaniques*, on a trouvé que l'angle dont la lumiere ſe détourne par la réfraction en paſſant du vuide dans l'air, ou d'un air d'une denſité donnée dans un autre air d'une autre denſité, eſt toujours proportionel à la différence de la denſité des deux milieux à travers leſquels la lumiere paſſe; en ſorte que ſi z eſt l'angle d'incidence & $z - \zeta$ l'angle de réfraction, on aura toujours ζ proportionel à l'excès de la denſité du ſecond milieu ſur celle du premier; par conſéquent nommant cette différence de denſité D on aura $\zeta = mD$, m étant un coëfficient conſtant à l'égard de D, toutes les autres circonſtances demeurant les mêmes.

Or par la loi générale de la réfraction on a, lorſque l'angle d'incidence z varie, les milieux reſtant les mêmes, $\frac{\sin(z - \zeta)}{\sin z} =$ à une quantité conſtante qu'on appelle la raiſon de réfraction, & qui dans l'air eſt très peu différente de l'unité; en ſorte que ſuppoſant cette raiſon $= 1 - n$ (n étant une très petite quantité, on aura $\sin(z - \zeta) = (1 - n) \sin z$; d'où l'on voit que l'angle ζ eſt néceſſairement très petit de l'ordre de n, & qu'ainſi on pourra mettre ſans erreur ſenſible $\sin z - \zeta \cos z$ à la place de $\sin(z - \zeta)$; ce qui donnera l'équation $\zeta \cos z = n \sin z$, ſavoir $\zeta = n \operatorname{tang} z$.

Donc, puisque l'angle très petit ζ est proportionel à D tant que z est constant, & que le même angle ζ est proportionel à tang z lorsque D est constant, il s'ensuit qu'on aura en général ζ dans la raison composée de D & de tang z; c'est à dire $\zeta = \lambda D$ tang z, λ étant un coëfficient constant & indépendant de D & de z.

Or dans une des expériences de M. Hawksbée dans laquelle le baromètre étoit à 29 pouces $7\frac{1}{2}$ lignes & le thermomètre à 60°, on a trouvé que l'angle d'incidence z étant 32°, l'angle de réfraction $z - \zeta$, en passant du vuide dans l'air naturel, étoit de 31° 59′ 24″, ce qui donne par conséquent $\zeta = 36''$. Donc, puisque dans ce cas D doit être égale à la densité naturelle de l'air qui est proportionelle à $-\frac{dy}{dz}$ (Art. 3.), ou à $\frac{y\,l\,10}{1+\frac{t}{215}}$ (Art. 5), on aura dans l'expérience de Mr. Hawksbée l'équation

$$36'' = \frac{\lambda y\,l\,10}{1+\frac{t}{215}} \text{ tang } 32°;$$

où y dénote la hauteur du baromètre en lignes, & t les degrés du thermomètre de Réaumur au-dessus de $16° \frac{3}{4}$ (Art. 4).

Comme Hawksbée se servoit d'un thermomètre particulier différent de celui de Réaumur, il faut, pour avoir la valeur de t qui convient à cette expérience, réduire les 60° de son thermomètre à des degrés de Réaumur, ce qu'on peut faire aisément d'après les éclaircissemens donnés par le traducteur de l'Ouvrage de Hawksbée; & l'on voit d'abord par la Table de la page 172 de l'édition françoise, que 60° de Hawksbée répondent à 47° du thermomètre de la Société royale, dans lequel le point de la congélation est à 77°, & dont 5° sont équivalens à 2° de Réaumur (page 176), en sorte que les 60 degrés dont il s'agit doivent répondre à 12° de Réaumur; or $12 = 16\frac{3}{4} - 4\frac{3}{4}$; donc on aura dans le cas présent $t = -4\frac{3}{4} = -\frac{19}{4}$.

A l'égard de la valeur de y qui indique la hauteur du baromêtre, il sembleroit qu'il n'y auroit qu'à prendre 29 pouces 7 lignes $\frac{1}{2}$ réduits en lignes; mais comme le pied anglois differe un peu du pied de Roi, la proportion du premier au second étant de 1351 à 1440, il faura faire $y = (29 \times 12 + 7\frac{1}{2})\frac{1351}{1440} = 287$.

Ainsi on aura $36'' = \frac{\lambda \times 287 \times 110}{1 - \frac{19}{4.215}}$ tang. $32°$, & de là

$$\lambda = \frac{841 \times 36''}{860 \times 287 \times 110 \times \text{tang. } 32°}$$

ou plutôt

$$\lambda = \frac{841 \sin 36''}{860 \times 287 \times 110 \times \text{tang. } 32°} = 0,0000041332$$

& $L.\lambda = 3,6162853$.

Pl. V. Fig. 4. 11. Maintenant soit C le centre de la Terre, AB sa surface, CAV la verticale au point A, $Apqr$ la courbe décrite par un rayon de lumiere qui traverse l'atmosphere, $plqm$ & $qmrn$ deux couches infiniment minces & concentriques à la Terre, dans chacune desquelles la densité de l'air est uniforme; nommons $AC = CP = r$, $Pp = x$, en sorte que $Cp = r + x$, $ACp = \phi$, & l'amplitude de la courbe $Ap = \varrho$; & il est clair que l'angle pqT (Tq étant tangente en q) sera $= d\varrho$, qu'en même tems cet angle sera celui qu'on a nommé ci-dessus ζ; de sorte qu'on aura $\zeta = d\varrho$; de plus il est clair que l'angle qrt sera l'angle d'incidence du rayon rq sur la couche qt, lequel a été nommé plus haut z, en sorte qu'on aura ici tang $z = \frac{ps}{qs} = \frac{(r+x)d\phi}{dx}$ & de là

$$d\phi = \frac{dx}{r+x} \text{ tang } z.$$

Enfin, comme la réfraction n'est dûe qu'à la différence de densité des deux couches contiguës pt & qr il faudra prendre pour D, non la quantité $-\frac{dy}{dx}$ qui est proportionelle à la densité même en pq, mais sa différen-

tielle,

tielle, à laquelle il faudra donner le ſigne —, à cauſe que la denſité eſt ſuppoſée diminuer à meſure que la hauteur x augmente; ainſi on aura $D = \mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\,\mathrm{d}.\frac{y\,\mathrm{l}\,10}{1+\frac{t}{215}}$; de ſorte qu'en faiſant ces ſubſtitutions dans l'équation $\zeta = \lambda D \tang z$, on aura celle-ci

$$\mathrm{d}\Phi = -\,\lambda\mathrm{d}.\frac{y\,\mathrm{l}\,10}{1+\frac{t}{215}} \times \tang z;$$

or il eſt viſible que $\mathrm{d}z = \text{ang.}\,Crq - Cqp = \text{ang.}\,Cqt - qCr - Cqp = \text{ang.}\,pqt - qCr = \mathrm{d}\varrho - \mathrm{d}\Phi$; donc ſubſtituant pour $\mathrm{d}\varrho$ & $\mathrm{d}\Phi$ les valeurs trouvées ci-deſſus, & diviſant l'équation par $\tang z$, on aura

$$\frac{\mathrm{d}z}{\tang z} = -\,\lambda\,\mathrm{d}.\frac{y\,\mathrm{l}\,10}{1+\frac{t}{215}} - \frac{\mathrm{d}x}{r+x}$$

équation intégrable, laquelle étant intégrée en ſorte que Z ſoit la valeur de z, & b, c celles de y, t lorſque $x = 0$, on aura

$$\mathrm{l}\,\frac{\sin z}{\sin Z} = \lambda\left(\frac{b\,\mathrm{l}\,10}{1+\frac{c}{215}} - \frac{y\,\mathrm{l}\,10}{1+\frac{t}{215}}\right) + \mathrm{l}\,\frac{r}{r+x}$$

d'où l'on tire

$$\sin z = \frac{\sin Z}{1+\frac{x}{r}} \times \frac{e^{\frac{\lambda b\,\mathrm{l}\,10}{1+\frac{c}{215}}}}{e^{\frac{\lambda y\,\mathrm{l}\,10}{1+\frac{t}{215}}}}$$

ou bien à cauſe de $e^{\mathrm{l}\,10} = 10$,

$$\sin z = \frac{\sin Z}{1+\frac{x}{r}} \times \frac{10^{\frac{\lambda b}{1+\frac{t}{215}}}}{10^{\frac{\lambda y}{1+\frac{t}{215}}}}.$$

Or il eſt viſible que Z eſt égal à l'angle VAT que fait avec la verticale VA la tangente AT de la courbe décrite par le rayon en traverſant l'atmoſphere; par conſéquent Z ſera la diſtance apparente de l'aſtre au zénith. De plus ſi on ſuppoſe que XY ſoit la tangente à la même courbe dans le point où le rayon entre dans l'atmoſphere, il eſt clair que l'angle ZXY ſera l'effet total de la réfraction, en ſorte que la véritable hauteur de l'aſtre ſera $90° - Z -$ angl. ZXY; & il eſt clair en même tems que cet angle ZXY, formé par les deux tangentes AX & YX, ſera l'amplitude totale de la courbe $Apqr$; c'eſt à dire la valeur de ϱ qui répond à toute l'étendue de la même courbe depuis le point A juſqu'au haut de l'atmoſphere. D'où l'on voit que le probleme de la réfraction conſiſte à déterminer la valeur totale de ϱ en Z.

Ainſi Z étant la diſtance apparente au zénith, ϱ ſera la réfraction, & la difficulté conſiſtera à déterminer ϱ en Z.

12. Pour cela je fais $u = \frac{e^{\frac{\lambda b l 10}{1+\frac{t}{215}}}}{e^{\frac{\lambda y l 10}{1+\frac{t}{215}}}}$, en ſorte que l'on ait

$\sin z = \frac{u \sin Z}{1+\frac{x}{r}}$, ce qui donnera,

$$\tan z = \frac{u \sin Z}{1+\frac{x}{r}} : \sqrt{\left(1 - \frac{u^2 \sin Z^2}{\left(1+\frac{x}{r}\right)^2}\right)};$$

de plus on a par la différentiation $\frac{du}{u} = - \lambda d . \frac{y\, l\, 10}{1 + \frac{t}{215}}$; donc substituant ces valeurs dans l'expression de $d\varrho$ trouvée ci-dessus il viendra

$$d\varrho = \frac{\sin Z\, du}{1 + \frac{x}{r}} : \sqrt{\left(1 - \frac{u^2 \sin Z^2}{\left(1 + \frac{x}{r}\right)^2}\right)}$$

d'où l'on tirera par l'intégration la valeur de ϱ en observant que ϱ doit être $= 0$ lorsque $x = 0$, auquel cas on a $u = 1$.

Je remarque d'abord que le terme $\frac{x}{r}$ est nécessairement fort petit vis à vis de 1; car r étant le rayon de la Terre, & la plus grande valeur de x devant être la hauteur de l'atmosphere, la plus grande valeur de $\frac{x}{r}$ sera le rapport de la hauteur de l'atmosphere au rayon de la Terre, rapport qui par l'observation des crépuscules est $=$ sec. $9^\circ - 1 = 0{,}0124625 < \frac{1}{80}$. Quand on voudroit même supposer que ce rapport est trop foible de moitié, & qu'il doit être porté à $\frac{1}{40}$, il resteroit toujours assez petit pour pouvoir être négligé vis à vis de 1, sans qu'il y ait d'erreur sensible à craindre.

Mais comme dans l'intégration la valeur de $\frac{x}{r}$ doit augmenter depuis 0 jusqu'à la valeur du rapport dont il s'agit, il est clair qu'on s'écartera encore moins de la vérité si, au lieu de négliger tout à fait cette quantité, on lui donne une valeur constante & moyenne entre la plus grande & la plus petite; & on aura d'autant moins d'erreur à craindre de cette hypothese que l'on n'a besoin que d'avoir la valeur totale de l'intégrale. Soit donc α cette valeur moyenne de $\frac{x}{r}$ que nous traiterons comme constante; & l'on aura

$$d\varrho = \frac{\sin Z\, du}{1 + \alpha} : \sqrt{\left(1 - \frac{\sin Z^2 . u^2}{(1 + \alpha)^2}\right)}$$

dont l'intégrale est

$$\varrho + k = \text{arc. fin} \frac{u \,\text{fin}\, Z}{1+\alpha};$$

k étant une conftante arbitraire; c'eft à dire

$$\text{fin}(\varrho + k) = \frac{u \,\text{fin}\, Z}{1+\alpha} = \frac{\text{fin}\, Z}{1+\alpha} \times \frac{e^{\frac{\lambda b\, l\, 10}{1+\frac{c}{215}}}}{e^{\frac{\lambda y\, l\, 10}{1+\frac{c}{215}}}};$$

or comme en faifant $\varrho = 0$ on doit avoir $u = 1$, on aura $\text{fin} k = \frac{\text{fin}\, Z}{1+\alpha}$; de plus il eft clair que pour avoir la valeur totale de la réfraction ϱ il faut faire $y = 0$, puifqu'au haut de l'atmofphere la hauteur du barométre doit être nulle; ainfi on aura

$$\text{fin}(\varrho + k) = \frac{\text{fin}\, Z}{1+\alpha} e^{\frac{\lambda b\, l\, 10}{1+\frac{c}{215}}} = \frac{\text{fin}\, Z}{1+\alpha} 10^{\frac{\lambda b}{1+\frac{c}{215}}}$$

& de là

$$\varrho = \text{arc. fin}\left(\frac{\text{fin}\, Z}{1+\alpha} 10^{\frac{\lambda b}{1+\frac{c}{215}}}\right) - \text{arc. fin}\left(\frac{\text{fin}\, Z}{1+\alpha}\right);$$

où ϱ exprime donc la réfraction qui a lieu pour un aftre dont la diftance apparente au zénith eft Z, b étant la hauteur du barométre en lignes & c le degré du thermométre de Réaumur au-deffus de $16^\circ \frac{3}{4}$ dans le lieu de l'obfervation; à l'égard de la fraction très petite α on pourra la déterminer *a pofteriori*, d'après les obfervations.

Pour faire ufage de cette formule on remarquera que $10^{\frac{\lambda b}{1+\frac{c}{215}}}$ eft le nombre qui répond au logarithme tabulaire $\frac{\lambda b}{1+\frac{c}{215}}$; en forte qu'on pourra la repréfenter plus commodément de cette maniere

$$\varrho = \text{arc. fin}\left(\frac{\text{fin}\, Z}{1+\alpha} N.\, \mathrm{L} \frac{\lambda b}{1+\frac{c}{215}}\right) - \text{arc. fin}\left(\frac{\text{fin}\, Z}{1+\alpha}\right).$$

13. Suppoſons le baromêtre à 28^p & le thermomêtre à $10°$, on aura dans ce cas $b = 12 \times 28 = 336$ & $c = 10 - 16\frac{3}{4} = -6\frac{3}{4}$; & l'on trouvera $\frac{\lambda b}{1+\frac{c}{215}} = \frac{336 \times 860\lambda}{833} = 0{,}00014338$;

& le nombre qui répondra à celui-ci comme logarithme ſera $1{,}000330201$; c'eſt la valeur de $N.\, \mathrm{L} \frac{\lambda b}{1+\frac{c}{215}}$ & ſon log. ſera $0{,}0001434$.

Maintenant ſoit, pour cette conſtitution de l'air, la réfraction horizontale $= \omega$, on aura, en faiſant dans la formule précédente $Z = 90°$ & $\varrho = \omega$, l'équation

$$\omega = \text{arc. fin}\frac{1{,}0003302}{1+\alpha} - \text{arc. fin}\frac{1}{1+\alpha};$$

d'où l'on tirera la valeur de α. Pour cela on mettra cette équation ſous la forme

$$\frac{1{,}0003302}{1+\alpha} = \text{fin}\left(\omega + \text{arc. fin}\frac{1}{1+\alpha}\right)$$

$$= \text{fin}\,\omega\, \sqrt{\left(1 - \frac{1}{(1+\alpha)^2}\right)} + \frac{\text{cof}\,\omega}{1+\alpha};$$

d'où en multipliant par $1+\alpha$, & diviſant par $\text{fin}\,\omega$, on tire

$$\sqrt{((1+\alpha)^2 - 1)} = \frac{1{,}0003302 - \text{cof}\,\omega}{\text{fin}\,\omega}.$$

Faiſons pour abréger

$$\Omega = \left(\frac{1{,}0003302 - \text{cof}\,\omega}{\text{fin}\,\omega}\right)^2$$

& l'on aura

$$\alpha = \frac{\Omega}{2} - \frac{\Omega^2}{8} + \&c.$$

Si on fait avec Mr. Bradlei $\omega = 33'$, on trouve $\Omega = 0{,}0015368$, $\Omega^2 = 0{,}0000024$; donc $\alpha = 0{,}0007681$; & de là $1 + \alpha = 1{,}0007681$; & $L . 1 + \alpha = 0{,}0003335$.

Mr. Mayer dans ſa Table des réfractions ſuppoſe la réfraction horizontale de $30' \, 50'', 8$ ſeulement pour la même conſtitution de l'air que ci-deſſus; ſuivant cette hypotheſe on trouvera $\Omega = 0{,}0017037$, & $\Omega^2 = 0{,}0000029$; & de là $\alpha = 0{,}0008514$, $1 + \alpha = 1{,}0008514$.

La valeur de α étant connue, on pourra conſtruire par notre formule une Table des réfractions pour toutes les hauteurs apparentes $90° — Z$ & pour telle hauteur du baromêtre & tel degré du thermomêtre qu'on voudra; & cette Table aura l'avantage d'être fondée ſur des données plus exactes, & ſur une théorie moins précaire qu'on ne l'a fait juſqu'à préſent.

14. Comme le nombre $\frac{\lambda b}{1 + \frac{c}{215}}$ eſt toujours extrêmement petit, il eſt clair qu'on aura à très peu près

$$N . L \frac{\lambda b}{1 + \frac{c}{215}} = e^{\frac{\lambda b l 10}{1 + \frac{c}{215}}} = 1 + \frac{\lambda b l 10}{1 + \frac{c}{215}};$$

ainſi la valeur de ϱ ſera

$$\varrho = \text{arc. ſin} \left(\frac{\text{ſin} Z}{1 + \alpha} \left(1 + \frac{\lambda b l 10}{1 + \frac{c}{215}} \right) \right) — \text{arc. ſin} \frac{\text{ſin} Z}{1 + \alpha}.$$

c'eſt à dire à très peu près

$$\varrho = \frac{\lambda b l 10}{1 + \frac{c}{215}} \times \frac{\text{ſin} Z}{1 + \alpha} : \sqrt{\left(1 — \frac{\text{ſin} Z^2}{(1 + \alpha)^2} \right)}$$

ou bien

$$\varrho = \frac{\lambda b l 10}{1 + \frac{c}{215}} \times \frac{\text{tang} Z}{\sqrt{\left(1 + \frac{2\alpha + \alpha^2}{\text{coſ} Z^2} \right)}};$$

ce qui fait voir que la réfraction est généralement proportionelle à la hauteur du baromètre, & à la tangente de la distance apparente de l'astre au zénith, lorsque cette distance est assez différente de 90° pour que $\frac{2\alpha}{\cot Z}$ soit une quantité très petite vis à vis de 1.

15. Si on vouloit intégrer rigoureusement l'équation

$$d\varrho = \frac{\sin Z\, du}{1 + \frac{x}{r}} \sqrt{\left(1 - \frac{u^2 \sin Z^2}{\left(1+\frac{x}{r}\right)^2}\right)}$$

de l'Art. 12, il faudroit connoître la valeur de x en u, ou de u en x, & par conséquent celle de y & t en x; laquelle dépend de la loi de la diminution de la chaleur, qui est encore inconnue.

La supposition la plus simple seroit de faire $1 + \frac{x}{r} = ku^m$, & comme $u = 1$ lorsque $x = 0$, on auroit d'abord $k = 1$; en sorte que $1 + \frac{x}{r} = u^m$, m étant un nombre qu'on pourroit déterminer par les observations. Cette valeur de $1 + x$ étant substituée dans l'équation précédente il en résulteroit celle-ci

$$d\varrho = \frac{d.\, u^{1-m} \sin Z}{(1 - m)\sqrt{(1 - u^{2-2m} \sin Z^2)}}$$

dont l'intégrale est

$$\varrho + H = \frac{\text{arc.} \sin (u^{1-m} \sin Z)}{1 - m}.$$

Or ϱ doit être nul lorsque $u = 1$; donc $H = \frac{Z}{1-m}$; & par conséquent

$$\varrho = \frac{\text{arc.} \sin (u^{1-m} \sin Z) - Z}{1 - m};$$

& faisant maintenant $y = 0$ pour avoir la valeur totale de ϱ, ce qui

donne $u = e^{\frac{\lambda b\,l\,10}{1+\frac{c}{215}}}$ & $u^{1-m} = e^{\frac{(1-m)\lambda b\,l\,10}{1+\frac{c}{215}}} = N.\,\mathrm{L}\frac{(1-m)\lambda b}{1+\frac{c}{215}}$;

on aura

$$\varrho = \frac{\text{arc. fin}\left(\text{fin}\,Z\,.\,N\,\mathrm{L}\frac{(1-m)\lambda b}{1+\frac{c}{215}}\right) - Z}{1-m}$$

équation qu'on peut, fi l'on veut, changer en celle-ci

$$\frac{\text{fin}\,(Z + (1-m)\varrho)}{\text{fin}\,Z} = N.\,\mathrm{L}\frac{(1-m)\lambda b}{1+\frac{c}{215}}.$$

16. Cette formule s'accorde avec celle que Mr. Simpfon a trouvée d'après l'hypothefe que la denfité de l'air diminue à très peu près en progreffion arithmétique; en effet la fuppofition que nous avons faite de

$$1 + \frac{x}{r} = u^m = \frac{e^{\frac{m\lambda b\,l\,10}{1+\frac{c}{215}}}}{e^{\frac{m\lambda y\,l\,10}{1+\frac{z}{215}}}},$$ donne, en prenant les logarithmes,

$$\frac{m\lambda b\,l\,10}{1+\frac{c}{215}} - \frac{m\lambda y\,l\,10}{1+\frac{z}{215}} = \mathrm{l}\left(1 + \frac{x}{r}\right);$$

or la quantité $\frac{y\,l\,10}{1+\frac{}{215}}$ eft (Art. 3, 4) proportionelle à la denfité de l'air à la hauteur x; d'où l'on voit que la différence des denfités de l'air à la furface de la Terre & à une hauteur quelconque x fera proportionelle à $\mathrm{l}\left(1 + \frac{x}{r}\right)$ ou, à très peu près, à $\frac{x}{r}$; mais cette hypothefe me paroit trop contraire aux obfervations pour pouvoir être admife.

Mr.

Mr. Simpson détermine les coëfficiens de sa formule en sorte que $Z = 90°$ donne $\varrho = 33'$, & $Z = 60°$ donne $\varrho = 1' 30''$; & il trouve $m - 1 = \frac{11}{2}$, $N . L \frac{(1 - m)\lambda b}{1 + \frac{c}{215}} = \sin 86° 58' \frac{1}{2} = 0,9986$ &c. On auroit donc $- \frac{11 \lambda b}{2\left(1 + \frac{c}{215}\right)} = \text{l.} \sin 86° 58' 30''$ $= 9,9993944 = - 1,9993944$; donc $\frac{11 \lambda b}{2\left(1 + \frac{c}{215}\right)} = 1 - 0,9993944 = 0,0006036$ & de là on trouvera

$$\frac{b}{1 + \frac{c}{215}} = 266,40.$$

Ainsi supposant le thermomètre à $16° \frac{3}{4}$, ce qui donnera $c = 0$, on auroit pour la hauteur du baromètre 266^l, c'est à dire $22^p\ 2^l$, ce qui est impossible; & si le thermomètre étoit plus bas, ce qui rendroit c négatif, la valeur de b seroit encore moindre.

On voit par là que la regle de Mr. Simpson ne peut subsister avec les données tirées des expériences de Mr. de Luc.

17. M. Bradley a trouvé que les réfractions étoient généralement parlant proportionelles aux tangentes de la distance au zénith diminuée d'une partie aliquote constante de la réfraction elle-même; de sorte que suivant cette regle on a $\varrho = \delta \text{ tang } (Z - \mu\varrho)$, δ & μ étant deux coëfficiens constants que Mr. Bradley détermine par les observations. Comme l'arc ϱ est toujours nécessairement très petit, on peut changer sans erreur sensible ϱ en $\frac{\text{tang.} \mu\varrho}{\mu}$; ce qui réduit la formule précédente à celle-ci: $\text{tang } \mu\varrho = \mu\delta \text{ tang } (Z - \mu\varrho)$, savoir $\frac{\sin \mu\varrho}{\cos \mu\varrho} = \frac{\mu\delta \sin (Z - \mu\varrho)}{\cos (Z - \mu\varrho)}$ & multipliant en croix, $\sin \mu\varrho \times \cos (Z - \mu\varrho) = \mu\delta \sin (Z - \mu\varrho) \times \cos \mu\varrho$, savoir $\sin Z - \sin (Z - 2\mu\varrho) = \mu\delta \sin Z + \mu\delta \sin (Z - 2\mu\varrho)$;

d'où $\frac{\sin (Z - 2\mu\varrho)}{\sin Z} = \frac{1 - \mu\delta}{1 + \mu\delta}$, ce qui se réduit comme l'on voit à la formule trouvée ci-dessus en faisant $2\mu = m - 1$, & $\frac{1 - \mu\delta}{1 + \mu\delta} = N . L \frac{(1 - m)\lambda b}{1 + \frac{c}{215}}$.

Ainsi la regle de Mr. Bradley est nécessairement sujette aux mêmes difficultés que celle de Mr. Simpson, à laquelle elle revient dans le fond.

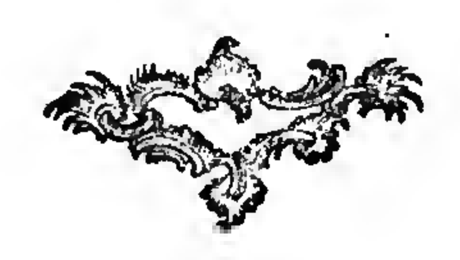
18. Mr. Mayer donne dans ses Tables une formule différente des précédentes, & qui en gardant nos dénominations se réduit à

$$\varrho = \frac{70'', 71 \; b \sin Z \operatorname{tang} \frac{1}{2} \omega}{(1 + 0,0046 (c - 16\frac{3}{4}))^{\frac{3}{2}}}$$

en prenant l'angle ω tel que

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{V(1 + 0,0046 (c - 16\frac{3}{4}))}{16\frac{1}{2} \operatorname{cos} Z};$$

mais comme Mr. Mayer ne nous a point appris le chemin qui l'y a conduit, on ne peut juger *a priori* de l'exactitude de cette regle; nous remarquerons seulement qu'elle s'éloigne assez de la regle générale suivant laquelle la réfraction est sensiblement proportionelle à la tangente de la distance apparente au zénith, lorsque cette distance est moindre que 70°.



REMARQUES
ſur quelques cas particuliers de l'équation indéterminée $A = Bt - Cu$. (*)

PAR M. JEAN BERNOULLI.

On ſuppoſe B & C premiers entr'eux, & $B < \frac{1}{2}C$; & on veut déterminer le plus petit nombre u tel que t ſoit un nombre entier.

PREMIER CAS.

Soit C un nombre pair & $A = \frac{C}{2} + 1$.

On a $t = Ar + mC$ & $u = As + mB$: & je dis qu'on a toujours

$$1°. \quad m = + \frac{r+1}{2}, \qquad \text{ſi } r = - l^{\epsilon},$$

$$2°. \quad m = - \left(\frac{r-1}{2}\right), \quad \text{ſi } r = + l^{\epsilon},$$

& il faut remarquer que r ſera toujours néceſſairement un nombre impair: car le produit de C par L^{ϵ} eſt pair; afin donc que ce produit diffère de 1 du produit de B par l^{ϵ}, il faut que non ſeulement B, mais auſſi que r ou l^{ϵ} ſoit impair.

SECOND CAS.

Soit C un nombre pair; $A = \frac{C}{2} + 1$; & que dans l'équation $A = (C - B)t - Cu$, B ait la même valeur qu'auparavant; je dis que m aura les mêmes valeurs que dans le premier cas, avec la ſeule différence que ſi m étoit auparavant négatif, il ſera poſitif à préſent, & *vice verſa*.

(*) V. Mém. 1768. p. 220.

TROISIEME CAS.

Soit C un nombre pair & $A = \frac{C}{2}$

on aura les équations

$$t = Ar + mC, \qquad u = A's + mB,$$

dans lesquelles, à cause de $A = A'D$, & de $C = C'D$, on a $A' = 1$, & je trouve que r est toujours négatif à cause de $\varrho = 1$ & que

$$m = \frac{r+1}{2} = 1;$$

il en résulte $u = \frac{B-1}{2}$ & $t = \frac{C}{2}$.

QUATRIEME CAS.

Soit C un nombre pair & $A = \frac{C}{2}$ & qu'on ait

$$A = (C - B)t - Cu$$

on aura, comme auparavant, m positif & $= \frac{r+1}{2} = 1$, $t = \frac{C}{2}$ & $u = \frac{C-B+1}{2}$.

CINQUIEME CAS.

Soit C un nombre impair & $A = \frac{C+1}{2}$

je trouve que

1°. si r est pair & négatif, on a $m = \frac{1}{2}r + 1$

2°. - - - - - positif, - - $m = -\frac{1}{2}r$

3°. si r est impair & négatif, - - $m = \frac{r+1}{2}$

4°. - - - - - positif, - - $m = -\left(\frac{r-1}{2}\right)$.

On a, dans ce dernier cas, $t = \frac{C+r}{2}$ & $u = \frac{B+s-1}{2}$.

SIXIEME CAS.

Soit C impair & $A = \frac{C-1}{2}$; on trouvera pour l'équation $\frac{C-1}{2} = (C-B)t - Cu$ les mêmes valeurs pour t & pour m que dans le cas précédent; mais comme on aura à préſent $+ l^{\varrho}$ au lieu de $- l^{\varrho}$, & réciproquement, il faudra prendre les m en conſéquence; par ex. on vient de trouver $t = \frac{C+r}{2}$ dans le 5e Cas N°. 4, ce ſera actuellement le N°. 3. qu'il faudra appliquer; le u n'eſt pas différent, pour ainſi dire, on a $u = \frac{C-B+s-1}{2}$.

SEPTIEME CAS.

Soit C impair & $A = \frac{C-1}{2}$

on ſe trouvera dans le cinquieme cas en tout point, excepté que par le N°. 4, par exemple,

$$t = \frac{C-r}{2} \quad \& \quad u = \frac{B-s-1}{2}.$$

HUITIEME CAS.

On aura les mêmes réſultats pour t & u dans l'équation $\frac{C+1}{2} = (C-B)t - Cu$, ſavoir $t = \frac{C-r}{2}$, $u = \frac{C-B-s-1}{2}$. Et les mêmes valeurs de m rélativement à r.



OBSERVATIONS D'ÉCLIPSES

tirées des Journaux de l'Obſervatoire Royal. (*)

PAR M. JEAN BERNOULLI.

I.

Obſervations d'Éclipſes des Satellites de Jupiter.

LE 9 JUIN 1771. à III^h. 26' T.V. on voyoit encore le II^d Satellite, mais pas à III^h, 28'. Le crépuſcule faiſoit preſqu'entierement diſparoître les autres Satellites; cependant je voyois deux des bandes encore parfaitement.

Le 14 à XV^h. 22'. 25" de la pendule *A*,
& XIV. 22. 4 T.V. Immerſion du I^r Satellite, un peu douteuſe à cauſe du crépuſcule; mais je voyois encore bien les autres Satellites & le ciel étoit très clair.

Le 26 à XI^h. 46'. 29" *A*
ou X. 41. 37 T.V. Immerſion du IIIe Satellite bonne, au clair de Lune près qui étoit aſſez vif.

NOVEMBRE le 3 à VI^h. 55'. 22" *A*
ou VII. 16. 35 T.V. Emerſion du I^r Satellite fort douteuſe à cauſe du peu de hauteur de Jupiter.

En 1772. Le tems contraire, la grande déclinaiſon de Jupiter, mes abſences & mes indiſpoſitions &c. m'ont empêché pendant plus d'une année de faire des obſervations d'éclipſes de Satellites; mais en attendant que

(*) Lû le 6 Mai 1773.

j'aye pu en reprendre la ſuite, M. Steudel (*), après s'être exercé à obſerver des paſſages à la Lunette méridienne & même quelques éclipſes de Satellites, en a fait pluſieurs que j'ai conſignées dans mon Journal d'obſervations, après les avoir réduites ſur les données que fourniſſent les paſſages; & comme elles peuvent donner lieu à quelques objections & qu'elles ne ſont pas en grand nombre, il ne ſera pas ſuperflu d'entrer dans quelques détails ſur ces réductions.

AOUT le 28 à XII^h. 30'. 45" de la pendule *A*
ou IX. 26. 55 T.V. Immerſion du I^r Satellite; les bandes étoient très viſibles.

Remarque.

Suivant la marche de la pendule à raiſon de + 2'. 30" en 2 jours & l'obſervation du Soleil le 28, elle auroit avancé à X^h. du ſoir de 3. 3'. 49"; or les réductions des obſervations des étoiles donnent

pour β ♑ - -	III^h.	3'.	56"
β Dauphin	III.	1.	47½
α - - -	III.	1.	51
β ♒ - -	III.	8.	57.

En ſauvant les erreurs de Calcul, il ſe peut qu'il y ait erreur de 2' pour β & α Dauphin, & de 5' pour β ♒, ou qu'on ſe ſoit trompé ſur les étoiles; j'adopte III^h. 3'. 50".

L'éclipſe eſt annoncée à Vienne pour IX^h. 39'. 18".
La différence eſt - - - 12. 23.

SEPTEMBRE le 4 à II^h. 36'. 43" *A*. Emerſion du I^r Satellite.

Suivant l'obſervation du Soleil le 4, la pendule avançoit à midi de III^h. 12'. 13", & vers minuit de III^h. 12'. 35", comparant entr'elles les obſervations du Soleil & celles des étoiles qui donnent

pour λ ♒ - III^h. 12'. 50".
Fomahan III. 12. 53.

(*) Candidat en Médecine & Amateur d'Aſtronomie.

On peut ſoupçonner que la lunette n'eſt pas dans le niveau, que l'axe panche du côté de l'Eſt, & que l'avance de la pendule eſt plûtôt plus grande que III^h. 12'. 53" que moindre; mais ſouſtrayant III^h. 12'. 53" de II^h. 36'. 43' il reſte XI^h. 23'. 50"; or cette émerſion étant annoncée à Vienne pour - XI. 36. 18

la différence - - - 12. 28, juſtement celle que le P. Hell ſuppoſe entre les Méridiens de Vienne & de Berlin, tirée de données ſi douteuſes, confirme qu'on ne doit pas toujours faire fond même ſur les réſultats les plus probables.

OCTOBRE le *6*.	Emerſion du I^r Satellite à -	VII^h.	51'.	42"	*A*
	La pendule retardant alors ſuivant				
	les obſerv. du Soleil le 5 & le 7 de		21.	38	
	de ε Pégaſe le *6* -		21.	39	
	α ♒ - - -		21.	41	
	γ - - -		21.	41.	
	Si l'axe de la lunette panche à l'Eſt				
	le retard *n*'eſt pas ſi grand; nous				
	le ſuppoſerons de - -		21.	35	
	donc Emerſion du I^r Satellite à	VIII.	13.	17	T. V.
	annoncée à Vienne pour	VIII.	25.	23	
	différence - -		12.	6.	
Le 11.	Immerſion du IIIe Satellite à	X.	58.	51	*A*
	Suivant les obſ. du Soleil le 11 & le 12				
	A avançoit alors ſur le T. V. de	—	30.	15	
	donc Immerſion obſervée à Berlin à	XI.	29.	6	T. V.
	annoncée à Vienne pour	XI.	40.	18	
	la différence eſt -		11.	12.	

OCTOBRE

OCTOBRE le 13. Emersion du Ir Satellite observée avec le téleſcope grégorien un peu moins fort que la lunette, à - IXh. 36′. 43″

La pendule avançoit alors ſur le T.V. ſuivant les obſervations du Soleil

le 11 & le 12 de	—	33. 29
12 & le 15	—	33. 51
celles de α ♒ le 13	—	33. 32
γ - - -	—	33. 32
ζ Pégaſe	—	33. 31
λ ♒ -	—	33. 33
Fomahan	—	33. 31
β Pégaſe.	—	33. 31
γ Pégaſe	—	33. 32.

Ici l'obſervation de Fomahan ne décide rien ſur la ſituation de l'axe de la lunette, & peut plutôt la faire ſoupçonner juſte pour ce jour. Suppoſant donc le retard de la pendule de - - — 33. 30

on a Emerſion du Ir. Satellite à X. 10. 13 T.V.

Elle eſt annoncée à Vienne pour 22. 45

La différence eſt - - 12. 32

Le 19. Emerſion du IId. Satellite obſ. à VII. 55. 10 *A*

Le ciel étoit ſerein & Jupiter près du Méridien; j'ai fait moi-même cette obſervation & j'avoue que le moment précis de l'Emerſion m'a échappé; mais à VIIIh. 55′ je ne voyois pas encore le Satellite & à VIIIh. 56′ il étoit déjà aſſez gros.

	Or les obſervations du Soleil du 17 au 19 donnent pour ce tems l'avance de *A* ſur le T.V.	—	43.	37	
	celles du 19 au 23 -	—	43.	35	
	celles de γ ♒ le 19 -	—	43.	37	
	& de Fomahan -	—	43.	36	
	Ainſi en la ſuppoſant de -	—	43.	36	
	Emerſion du II^d. Satellite à	VIII.	38.	46	T.V.
	Elle eſt annoncée à Vienne pour		51.	51	
	La différence eſt - -		13.	5	
OCTOBRE le 19.	Emerſion du IVe. Satellite obſervée par M. Steudel à -	VIII.	32.	14	*A*
	ou en ajoutant - -		43.	39	
	à -	IX.	15.	53	T.V.
	Elle eſt annoncée à Vienne pour	IX.	34.	34	
	La différence eſt - -		18.	41	
Le 22.	Emerſion du I^r. Satellite à -	V.	48.	42	*A*
	Beaucoup de vent, mais le ciel ſerein & les bandes très viſibles.				
	Suivant l'obſervation du Soleil le même jour *A* ſur T.V.	—	48.	17	
	celle de β ♒ - -	—	48.	20	
	δ ♑ - -	—	48.	21	
	α ♒ - -	—	48.	21	
	ζ Pégaſe -	—	48.	18	
	λ ♒ - -	—	48.	20	
	δ - -	—	48.	21	
	Fomahan -	—	48.	10	

Ces obſervations peuvent faire ſoupçonner l'inſtrument d'avoir panché vers l'Eſt, mais comme quelques-unes ſont marquées douteuſes, je me ſuis diſpenſé d'y appliquer mes formules, & j'ai ſuppoſé ſimplement l'erreur de la pendule de — 48′. 15″

Donc Emerſion du I^r. Satellite obſ. à	VI.	36.	57	T.V.
annoncée à Vienne pour -	VI.	48.	54	.
La différence eſt - -		11.	57	

Mr. Steudel ajoute à ſon obſervation la remarque ſuivante:

„L'on diſtinguoit encore une tache noire au-deſſus de la ſeconde bande (ſupérieure dans le tube), & voici la poſition des Satellites au tems de l'émerſion du 1^r.



A VI^h. 35′ la tache avoit déjà paſſé le diamètre vertical & ſe trouvoit en *c*.

A VII^h. 30′ elle étoit avancée vers le bord, elle paroiſſoit allongée & plus enfoncée dans les bandes.

A VII^h. 40′ elle n'étoit plus gueres viſible & je la diſtinguois à peine."

DÉCEMBRE le 23. Emerſion du I^r. Satellite à - III^h. 9′. 43″ *A*

Ciel couvert; lorſque le tems s'éclaircit, le Satellite étoit déjà, mais à peine, viſible, d'où je conclus, dit Mr. S. que ſon émerſion ne s'eſt faite que quelques ſecondes avant.

Or ſuivant une obſervation d'Algénib le 23, la pendule retardoit alors ſur le T. V. de	II^h.	6'.	9"
& ſuivant une obſervation du Soleil le 25	II.	6.	8
d'où reſulteroit			
Emerſion du I^r. Satellite à -	V.	15.	51
annoncée à Vienne pour -	V.	27.	25
La différence eſt - -		11.	34

II.

Obſervations d'Eclipſes du Soleil.

Le 3 Avril 1772. J'ai obſervé avec la Lunette de Dollond la fin de l'Eclipſe de Soleil, & comme elle étoit horizontale il m'a fallu faire l'obſervation au quatrieme étage & me ſervir de ma montre à ſecondes, comparée avec la pendule *N*.

J'ai vu la fin le matin à -	VI^h. 17'. 2" *N*
- - - ou à -	VI. 1. 56 T.V.

Le 26 Octobre. J'ai obſervé l'éclipſe de ce matin avec la grande lunette de Dollond & à la pendule *A* qui retardoit

le 25 à midi ſur le T. V. de -	52'. 25"
- 26 - - - -	53. 53
au commencement de l'éclipſe de -	52. 36
à la fin - - - - -	52. 39

Le commencement m'a échappé & à VIII^h. 10' *A*, ou IX^h. $2\frac{1}{2}$ T.V. l'éclipſe étoit déjà aſſez avancée.

J'ai pris enſuite aſſez exactement, à ce que je crois, pluſieurs diſtances de cornes avec le micrometre objectif appliqué à la même lunette; je vais les rapporter, mais en prévenant que j'ai retrouvé dans le micrometre les mêmes défauts que j'ai indiqués dans mon Journal pour les inſtru-

mens (*); car après avoir trouvé à IX^h. 15′ T.V. le diametre du Soleil de $3\frac{1}{2}^p + \frac{1}{20} + \frac{22}{500}$ ou de 32′. 23″, 0, à peu près tel que l'indique la connoissance des tems, il n'étoit que de $3\frac{1}{2}^p$. 1^v. 8^c. ou de 32′. 7″, 8 à IX. 50′. Par ces inégalités mes observations deviennent sans doute très défectueuses, mais elles peuvent engager ceux qui ont de tels instrumens à manier, à ne pas s'y fier avec trop d'assurance & sans de fréquentes vérifications. Voici les distances que j'ai prises:

A VIII^h. 15′. 37″ *A*	ou	IX^h. 8′. 13″ T.V.	Distance des cornes		1^p. $\frac{0}{20}$. $\frac{0}{500}$	ou	9′. 0″,6
18. 37	- -	11. 13 -	-	-	1. 4. 9	-	10. 48, 7
20. 44	- -	13. 20 -	-	-	1. 6. 12½	-	11. 55, 8
27. 24	- -	20. 1 -	-	-	1½. 1. 17	-	13. 51, 3
30. 10	- -	22. 47 -	-	-	1½. 3. 0	-	14. 27, 0
41. 41	- -	34. 18 -	-	-	1½. 6. 1	-	15. 49, 2
46. 13	- -	38. 50 -	-	-	1½. 6. 2	-	15. 50, 3
48. 59	- -	41. 36 -	-	-	1½. 5. 22	-	15. 44, 8
51. 55	- -	44. 33 -	-	-	1½. 5. 5	-	15. 26, 4
IX. 0. 33	- -	53. 11 -	-	-	1½. 1. 17	-	13. 51, 3
17. 35	- -	X. 10. 13 -	-	-	0. 10. 0	-	4. 30, 3

J'ai ensuite noté la fin au plus tard à IX^h. 19′, 52″ *A*
ou X. 12. 31″ T. V.

Mrs. Bode & Steudel, pour s'exercer, ont observé cette éclipse par projection.

III.

Observations d'Eclipses de la Lune.

Le 23 Octobre 1771. J'ai observé pour la premiere fois un phénomene de cette espece & j'ai remarqué avec surprise la grande incertitude que jete la pénombre sur ces observations. J'ai fait usage de la Lunette de Dollond & je crois avoir vu la fin pour le plus tard à - VI^h. 24′. 10″ *A*
c'est à dire à - VI. 47. 0 T. V.

(*) Le principal de ces défauts consiste en ce que la séparation entre les deux demi-objectifs est trop grande & que le micrometre n'a pas les vis au moyen desquelles on pourroit y remédier suivant les *Mémoires de Marseille* p. 97.

Le 11 Octobre 1772. Une forte indisposition m'obligea de quitter l'Observatoire avant que la Lune fût visible, mais Mrs. Bode & Steudel se sont exercés à observer l'éclipse de ce jour, & j'ai fait la réduction de leurs observations. Mr. Steudel, en faisant usage de la machine parallatique & des deux tubes de 4 pieds, l'un acromatique, l'autre ordinaire, a noté les instans suivans à la pendule *R* que je fais marcher conformément au tems sidéral. La Lune s'étant levée totalement éclipsée, Mr. Steudel a vu:

	R	ou soustrayant	Tems vrai
L'Emersion à -	VIII. 4. 30	54. 30	VII. 10. 0
celle d'Aristarchus à	- 16. 41	54. 32	- 22. 9
Copernic -	- 30. 30	54. 34	- 35. 56
Tycho -	- 34. 10	54. 35	- 39. 30
Platon -	- 35. 15	54. 35	- 40. 40
Maginus -	- 39. 10	54. 36	- 44. 34
Manilius -	- 48. 0	54. 37	- 53. 23
Possidonius -	- 54. 30	54. 38	- 59. 52
Prom. acutum	- 59. 30	54. 39	VIII. 4. 51
Prom. Somnii	IX. 5. 1	54. 40	- 10. 21
Mer des crises	- 10. 0	54. 41	- 15. 19
Langrenus -	- 10. 40	54. 41	- 15. 59
Firmicus -	- 11. 20	54. 41	- 16. 39
La fin de l'ombre -	- 13. 13	54. 41	- 18. 32
- de la pénombre	- 16. 40	54. 42	- 21. 58
ou	- 17. 00		- 22. 18

Or le 11 à midi *A* sur T.V.	— 29′. 29″	& sur *R*	1ʰ. 22′. 51″
le 12 - -	— 31. 10	-	1. 28. 7
donc le 11 *R* montroit à midi	- -	-	0. 53. 22
le 12 - -	- -	-	0, 56. 57
la différence est - -	- -	-	— 3. 35

Si on vouloit donc réduire ces observations avec la derniere exactitude, il faudroit considérer qu'abstraction faite du gain de la pendule sur le T.V. la fin de l'obscurcissement total a eu lieu à VIIIʰ. 4′. 30″ — 53′. 22″ ou à VIIʰ. 11′. 8″; il faudroit réduire ces VIIʰ. 11′. 8″ en tems de la pendule par l'analogie 24ʰ : 3′. 35″ : : *x* : *y*: soustraire *y* de VIIIʰ. 4′. 30″, & pour être encore plus exact, réitérer la même opération

ſur ce nouveau réſultat; mais nous réſerverons cette peine pour des obſervations plus importantes, & nous nous contenterons de conſidérer que la pendule doit avoir gagné 1'. 8" en $7\frac{1}{5}$ d'heure & 1" en 6' à 7' de tems, & en appliquant dans cette ſuppoſition aux inſtans obſervés les corrections diſtribuées dans la ſeconde colonne, nous adopterons ceux de la troiſieme comme indiquant le tems vrai.

Mr. Bode a obſervé avec Mr. Lambert & il s'eſt ſervi de la grande Lunette de Dollond; comme ils ont négligé les ſecondes je me contente d'ajouter 30' aux inſtans qu'ils ont obſervés à la pendule *A* & que voici:

Emerſion dabord à	VI^h.	41' *A*	ou	VII^h.	10' T.V.	
- - Kepler	-	56	- -	-	26	
- - Copernic	VII.	5	- -	-	35	
- - Platon	-	8	- -	-	38	commence à ſortir
- - Tycho	-	10	- -	-	40	
- - Mer des criſes	-	40	-	VIII.	10	commence à quitter
- fin	- - -	49	- -	-	19.	



ESSAIS

sur un Algorithme déduit du principe de la raison suffisante (*).

Par M. Beguelin.

SECTION I.

1.

Quoique la science des nombres soit de nécessité géométrique, fondée sur le principe de contradiction, on sait assez que les signes des nombres, & les méthodes d'en exprimer les diverses combinaisons ne sont pas d'une nécessité absolue. C'est une affaire de choix, ou de convention.

2. L'Algorithme décadique, qui est le plus généralement adopté a l'avantage d'exprimer avec un petit nombre d'élémens des quantités extrêmement grandes. Cependant il ne paroit pas qu'il y ait eû une raison suffisante de lui donner la préférence sur tous les autres algorithmes possibles. On croit communément que le choix de la progression décimale n'est fondé que sur le nombre des doigts, & quoi qu'il en soit il est certain que les opérations arithmétiques établies sur cet algorithme sont très pénibles dès que les nombres sont considérables; d'ailleurs les rapports de ces nombres entr'eux y sont tellement cachés qu'il est extrémement difficile de les découvrir.

3. Il est évident que plus on diminuera le nombre des élémens primitifs, plus les opérations arithmétiques seront simplifiées, & plutôt aussi on pourra se promettre d'appercevoir la nature des nombres & leurs rapports mutuels dans leur expression. C'est la raison qui fit imaginer à Leibnitz l'arithméti-

(*) Lûs à l'Académie le 20 Février & le 25 Juin 1772.

l'Arithmétique dyadique, qui réduit les chiffres aux deux élémens les plus ſimples, le zéro, & l'unité.

4. L'Arithmétique binaire réuniroit tous les avantages poſſibles, & par conſéquent elle ſeroit fondée ſur le principe du choix, ſi elle n'avoit pas deux inconvéniens: l'un c'eſt que les élémens ont leur place affectée, comme dans l'Arithmétique vulgaire ou décadique; ce qui ôte à cet algorithme le grand avantage qu'a le calcul littéral de tranſpoſer les élémens à ſon gré. L'autre inconvénient c'eſt qu'il faut trop de chiffres pour exprimer un nombre médiocrement grand. Un nombre quelconque n qui n'aura dans l'algorithme vulgaire que $\frac{3}{10}n + 1$ chiffres, en exige $n + 1$ dans la dyadique; ainſi pour les grands nombres ce rapport eſt comme de 10 à 3.

5. Il ſemble donc qu'un algorithme qui remédieroit à ces deux inconvéniens, & qui réuniroit les avantages de l'Arithmétique commune, & de la binaire, ſeroit le plus propre à découvrir les propriétés des nombres, autant qu'il eſt poſſible d'y parvenir dans l'immenſe quantité de rapports qu'ils renferment.

6. Il eſt aiſé de déterminer les conditions de cet algorithme; il doit ſuivre la progreſſion binaire, comme la plus ſimple; il doit retenir les chiffres vulgaires comme les plus commodes, & les mieux connus; ainſi ce n'eſt proprement que l'expreſſion des expoſans des puiſſances du nombre 2, en ſupprimant le nombre lui-même.

7. Cette méthode abrege conſidérablement les chiffres Leibnitziens; puiſque de tous les nombres compris entre deux termes conſécutifs de la progreſſion binaire, il n'y a que le dernier ſeul qui contienne autant de chiffres que la notation dyadique en exige; tous les autres en demandent moins, & ſuivent à cet égard la loi des onces, ou des coëfficiens de l'équation du degré qui leur répond. Ainſi, par ex. entre 2^5 & 2^6, il y aura:

1	Nombre de	1	Chiffre.
5	-	- 2	
10	-	- 3	
10	-	- 4	
5	-	- 5	
1	-	- 6	

donc, pour exprimer les nombres de 32 à 63, l'Arithmétique vulgaire emploie 64 chiffres, la dyadique 192, & notre algorithme exponentiel 112. En voici le Tableau:

Algorithme vulgaire.	*Algorithme dyadique.*	*Algorithme exponentiel.*
32	100000	5.
33	100001	0. 5.
34	100010	1. 5.
35	100011	0. 1. 5.
36	100100	2. 5.
37	100101	0. 2. 5.
38	100110	1. 2. 5.
39	100111	0. 1. 2. 5.
40	101000	3. 5.
41	101001	0. 3. 5.
42	101010	1. 3. 5.
43	101011	0. 1. 3. 5.
44	101100	2. 3. 5.
45	101101	0. 2. 3. 5.
46	101110	1. 2. 3. 5.
47	101111	0. 1. 2. 3. 5.
48	110000	4. 5.
49	110001	0. 4. 5.
50	110010	1. 4. 5.
51	110011	0. 1. 4. 5.
52	110100	2. 4. 5.
53	110101	0. 2. 4. 5.
54	110110	1. 2. 4. 5.
55	110111	0. 1. 2. 4. 5.
56	111000	3. 4. 5.
57	111001	0. 3. 4. 5.
58	111010	1. 3. 4. 5.
59	111011	0. 1. 3. 4. 5.
60	111100	2. 3. 4. 5.
61	111101	0. 2. 3. 4. 5.
62	111110	1. 2. 3. 4. 5.
63	111111	0. 1. 2. 3. 4. 5.

8. Les regles des opérations arithmétiques qu'il faut ſuivre dans cet algorithme, ſont aiſées à déduire de la nature des expoſans.

I. La *Notation* en eſt aſſez aiſée. On a déjà en partie, & il eſt très facile de ſe former des Tables des dignités du binaire auſſi loin que l'on vou-

dra. Ainſi un nombre vulgaire étant donné on en ſouſtrait ſucceſſivement les plus hautes puiſſances de 2 au-deſſous de ce nombre & les expoſans donnent le nombre cherché. Ou bien on diviſe ſucceſſivement le nombre donné par 2. Négligeant toutes les diviſions ſans reſte, & marquant pour chaque unité reſtante le nombre qui exprime le quantieme des reſtes, en poſant 0 pour celui de la premiere diviſion. Ainſi le nombre 59 étant donné, les unités reſtantes des dividendes 59. 29. 7. 3. 1. donnent 0. 1. 3. 4. 5. Réciproquement, ſi l'on ajoute le nombre vulgaire qui répond à chaque expoſant, on transforme le nombre exponentiel en nombre commun.

II. La *Réſolution* & la *compoſition*, ſont des opérations particulieres à cet algorithme. Par la nature des expoſans, il eſt connu qu'on a: $n = 2(n - 1) = 4(n - 2) = 8(n - 3)$ &c. On a de même: $n = (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \ldots + 2(n - m)$. Ainſi lorſque dans l'addition on doit ajouter divers expoſans égaux n, on ſait qu'on a $2n = (n + 1)$; $3n = n, (n + 1)$; $4n = (n + 2)$; $5n = n, (n + 2)$; $6n = (n + 1), (n + 2)$; $7n = n, (n + 1), (n + 2)$; $8n = (n + 3)$; & en général $m \times n = (n + e)$ en poſant $2^e = m$.

9. III. L'*Addition* n'a pas plus de difficulté que dans le calcul littéral. On écrit dans tel ordre qu'on veut les expoſans différents; on ajoute les égaux; ſelon les regles de la compoſition.

IV. La *Souſtraction* eſt encore la même que dans le calcul littéral; on y peut employer le ſigne négatif pour les termes différens, & enlever les termes égaux; qu'il eſt toujours aiſé de rendre tels par les principes de la réſolution ou de l'analyſe des expoſans. Ainſi $8.5.4.2.1.0 - 6.5.3.0 = 8.4.2.1 - 6.3. = 7.6.6.3.3.2.1 - 6.3 = 7.6.3.2.1.$

V. La *Multiplication* n'eſt que l'addition de chaque terme d'un facteur avec tous les termes de l'autre.

Pp 2

$$
\begin{array}{rrcl}
\text{Ainsi ayant:} & F & = & 0.\ 1.\ 4.\ 5 \\
& f & = & 0.\ 2.\ 3 \\
\hline
& & & 0.\ 1.\ 4.\ 5 \\
& & & \quad 2.\ 3.\ 6.\ 7 \\
& & & \qquad 3.\ 4.\ 7.\ 8 \\
\hline
\text{on a} & Ff & = & 0.\ 1.\ 2.\ 4.\ 7.\ 9
\end{array}
$$

VI. La *Division* consiste à chercher combien de fois on peut soustraire le diviseur, ou ses multiples du dividende. Ainsi $\frac{4.\,2.\,1.\,0}{2.\,1.\,0} = \frac{2.\,1.\,0}{2.\,1.\,0} + \frac{3.\,2.\,1.\,1}{2.\,1.\,0}$ donne $0.\ 1. + \frac{1}{2.\,1.\,0}$. Ainsi encore $\frac{7.\,4.\,3.\,2.\,1.\,0}{1.\,0} = \frac{1.\,0}{1.\,0} + \frac{3.\,2}{1.\,0} + \frac{5.\,4}{1.\,0} + \frac{6.\,5}{1.\,0}$ donne pour quotient $0.\ 2.\ 4.\ 5$.

10. Comme le principal but de cet algorithme doit être de faciliter la recherche des facteurs; il est nécessaire, pour découvrir les méthodes qu'il peut fournir, de se faire une idée nette de la formation des produits; & puisqu'il ne s'agit que de produits impairs, il n'est question non plus que de facteurs impairs. Soit m le plus grand exposant du petit facteur f, & $(m + p)$ le plus grand exposant du grand facteur F; que les lettres y & x désignent tous les exposans intermédiaires, on aura $F = 0.\, y\, (m + p)$ $f = 0\,.\, x\,.\, m$, & le produit général sera

$$Ff = 0.\, x.\, y.\, (m + p).\, (x + y).\, (m + y).\, (m + p + x).\, (2m + p).$$

Mais puisqu'on n'oseroit se flatter de trouver une méthode générale qui fasse découvrir cette formule dans chaque nombre exponentiel composé, il faut la limiter en commençant par les cas les plus faciles.

11. Le cas le plus simple est celui qui donne $x = 0$, $y = 0$, $p = 0$. On a ici $Ff = 0.\,2.\,(m),(2\,m) = 0.\,(m + 1).\,(2\,m)$, parce que x & y étant nuls, tous les termes de la formule où ils entrent évanouissent; il n'en est pas de même de p, qui ne représente pas un exposant à part, mais conjointement avec m; ainsi p étant $= 0$, l'exposant $(m + p)$ reste, mais sa valeur n'est plus que m; de là résulte le

THÉOREME I.

Tout nombre exponentiel de la forme o.(m + 1).(2m), *est un nombre quarré dont la racine est* = o.m.

Ainsi o.5.8 = (o.4.) (o.4.) = 289;
o.10.18 = (o.9) (o.9) = 263169.

12. Soit $x = o$, $y = o$, la formule donne $Ff = o.m.(m + p).(2m + p)$.

THÉOREME II.

Tout nombre exponentiel à 4 termes, de la forme o.m.(m + p).(2m + p), *est un nombre composé dont les facteurs sont* F = o.(m + p), f = o.m.

Exemple. o.4.8.12 = (o.8) (o.4) = 4369.

13. Soit $x = o$, & posant $y = a$, c. à d. qu'au lieu de plusieurs termes différens que y complexe représente, il soit réduit à l'exposant unique a, la formule donne le Théoreme suivant.

THÉOREME III.

Tout nombre exponentiel composé de 6 termes, de la forme o.a.m. (m + a). (m + p). (2m + p), *est un nombre composé dont les facteurs sont* F = o.a.(m + p); *&* f = o.m.

Exemple. o. 3. 4. 7. 9. 13 = (o.3.9) (o.4) = 8857.

14. COROLL. 1. Si dans le cas de l'Article 13. on pose $a = m$, on aura le

THÉOREME IV.

Tout nombre exponentiel à cinq termes, de la forme o.(m + 1).(m + p).(2m).(2m + p), *a pour facteurs* F = o.m.(m + p), f = o.m.

Exemple. o.5.6.8.10 = (o.4.6) (o.4) = 1377.

15. COROLL. 2. Si dans le cas de l'Art. 13. on pose $a = p$, on aura le

THÉOREME V.

Tout nombre exponentiel à cinq termes, de la forme o. p. m. (m + p + 1). (2 m + p), *a pour facteurs* F = o. p. (m + p) & f = o.m.

Exemple. 0.2.8.11.18 = (0.2.10)(0.8) = 264553.

16. COROLL. 3. Si dans le cas de l'Article 14. on pose $p = m$, on a le

THÉOREME VI.

Tout nombre exponentiel à 4 termes, de la forme o. (m + 1). (2 m + 1). (3m), *a pour facteurs* F = o.m. 2m, & f = o.m.

Exemple. 0.9.17.24 = (0.8.16)(0.8) = 16908801.

17. Soit maintenant $y = o$ & $x = b$, la formule devient $Ff = o.b.m.(m + p); (m + p + b). (2m + p)$, d'où résulte le

THÉOREME VII.

Tout nombre exponentiel à six termes, de la forme o. b. m. (m + p). (m + p + b). (2 m + p), *a pour facteurs* F = o. (m + p.) f = o. b. m.

Exemple. 0.2.5.8.10.13 = (0.8) (0.2.5) = 9509.

18. COROLL. Si l'on pose ici $b = p$ on aura le

THÉOREME VIII.

Tout nombre exponentiel à six termes, de la forme o. p. m. (m + p). (m + 2 p). (2 m + p), *a pour facteurs* F = o.(m + p). f = o. p. m.

Exemple. 0.3.5.8.11.13 = (0.8) (0.3.5) = 10.537.

19. Soit présentement $y = a$, $x = b$, la formule générale donne le

THÉOREME IX.

Tout nombre exponentiel à 9 termes, de la forme o. a. b. m. (a + b). (m + p). (m + a). (m + p + b). (2m + p), *a pour facteurs* F = o. a. (m + p), f = o. b. m.

Exemple. 0.1.2.3.6.8.11.12.17 = (0.2.11).(0.1.6) = 137551.

20. REMARQUE. L'application de ce Théoreme, quoiqu'il soit encore très limité, devient déjà plus difficile. La seule inspection du nombre donné ne suffit plus pour appercevoir qu'il appartient à notre formule. On a à la vérité 8 équations, pour quatre inconnues, mais par la nature du calcul qui n'est point astreint à un certain ordre, on ignore comment les lettres a, b, p. ou aussi les lettres m, a. sont subordonnées entr'elles. Tout ce qu'on sait c'est 1°. que a, b, m, $(a + b)$ sont les moindres termes; 2°. que $(2m + p)$ est toujours le plus grand terme; 3°. que $b < m$; 4°. que $a < (m + p)$. On a donc dans notre exemple $2m + p = 17$. $a = 1$, ou 2. $b = 1$, ou 2, ou 3. $m = 2$, ou 3, ou 6. Or $a + b$ ne sauroit être $= 6$, donc $m = 6$, donc $p = 5$, donc $b = 1$, donc $a = 2$.

21. COROLL. 1. Si dans le cas de l'Art. 19. on pose $a = b$. on aura:

THÉOREME X.

Tout nombre exponentiel de huit *termes, & de la forme* o. (a + 1). 2 a. m. (m + a). (m + p). (m + a + p). (2 m + p), *a pour facteurs* F = o. a. (m + p.) & f = o. a. m.

Exemple. 0.4.5.6.8.9.12.14 = (0.3.9).(0.3.5.) = 21341.

22. COROLL. 2. Si l'on pose en même tems $p = 0$ on aura un quarré:

THÉOREME XI.

Tout nombre exponentiel de six *termes, & de la forme* o. (a + 1). 2 a. (m + 1). (m + a + 1). 2 m, *est un quarré dont la racine est* o. a. m.

Exemple. 0.8.11.14.18.20 = (0.7.10)(0.7.10) = 1329409.

23. COROLL. 3. Si dans le cas de l'Art. 19. on pose $a = m$, on aura le Théoreme suivant.

THÉOREME XII.

Tout nombre exponentiel de huit *termes, & de la forme* o. b. (m + 1). (m + b). (m + p). (m + b + p). 2 m. (2m + p), *a pour facteurs* F = o. m. (m + p), & f = o. b. m.

Exemple. 0.2.6.7.10.11.13.16 = (0.5.11.)(0.2.5) = 76997.

24. COROLL. 4. Si l'on pose ici $b = p$, on aura le

THÉOREME XIII.

Tout nombre exponentiel à sept termes, & de la forme o. p. (m + 1). (m + p + 1). (m + 2p). 2 m. (2 m + p), *a pour facteurs* F = o. m. (m + p), f = o. p. m.

Exemple. 0. 2. 6. 8. 9. 10. 12 = (0. 5. 7). (0. 2. 5) = 5957.

25. COROLL. 5. Si dans la formule §. 19. on pose $a = p$ elle donne le

THÉOREME XIV.

Tout nombre exponentiel à huit *termes, de la forme* o. b. p. m. (b + p). (m + p + 1). (m + p + b). (2 m + p), *a pour facteurs* F = o. p. (m + p), & f = o. b. m.

Exemple. 0.3.5.6.9.12.14.16 = (0.6.11)(0.3.5) = 86633.

26. COROLL. 6. Si dans la formule §. 19. on pose $b = p$, on a le

THÉOREME XV.

Tout nombre exponentiel à neuf termes, de la forme o. a. p. m. (a + p). (m + p). (m + a). (m + 2p). (2 m + p), *a pour facteurs* F = o. a. (m + p). f = o. p. m.

Exemple. 0.3.6.7.9.10.12.13.15 = (0.7.9)(0.3.6) = 46063.

27.

27. REMARQUE 1. Tous les théoremes que nous venons de trouver ne concernent encore que des facteurs de la forme $2^n + 1$. ou $2^n + 2^m + 1$. Il feroit bien aifé de les étendre aux facteurs de quatre termes, & au-delà. Mais comme l'application en devient toujours plus cachée à mefure que le nombre des termes augmente, il n'eft pas befoin de s'y arrêter davantage pour le préfent.

28. REMARQUE 2. Avant de finir cette premiere Section, il ne fera pas inutile de faire obferver un rapport affez curieux qui réfulte des exemples donnés, c'eft que *la fomme des différences des expofans confécutifs du produit, eft égale à la fomme des différences des expofans des facteurs.*

Par ex. dans le cas de l'Art. 25. le produit eft 0. 3. 5. 6. 9. 12. 14. 16.
dont les différences font: $3 + 2 + 1 + 3 + 3 + 2 + 2 = 16$.
Le grand facteur eft $F = 0. 6. 11.$ dont les différences font: $6 + 5 = 11$,
& le petit facteur eft $f = 0. 3. 5.$ dont les différences font: $3 + 2 = 5$.

REMARQUE 3. Ce rapport découle d'un autre qui en explique la raifon, c'eft que *la fomme des différences des expofans confécutifs d'un nombre exponentiel, eft toujours égale au plus grand expofant de ce même nombre.*

Or dans tous les exemples que nous avons eûs, le plus grand expofant du produit, favoir $(2m + p)$, eft égal à la fomme des plus grands expofans des facteurs; mais il peut l'excéder d'une unité, comme nous le verrons plus bas; & alors le rapport obfervé n'auroit plus exactement lieu, il y auroit la différence de cette unité. C'eft que, quoique le plus grand terme de la formule Ff §. 10. foit toujours $= (2m + p)$, la fomme des termes inférieurs peut égaler, & même excéder ce terme, ce qui par les regles de l'addition donnera le plus grand expofant du produit $= (2m + p + 1)$.

SECTION II.

Recherches des formules qui expriment le produit de deux facteurs F & f.

29. La multiplication donne dans notre algorithme une suite de produits partiaux, qui comme dans l'Arithmétique vulgaire forment un rhombe, ou une lozange, dont deux côtés représentent les deux facteurs F & f; on en a un exemple Art. 9.

Or chaque facteur exponentiel est, ou *plein*, ou *vuide*, ou *coupé*.

J'entends par *facteur plein* celui qui renferme tous les termes dans l'ordre naturel des nombres exponentiels depuis o jusqu'au plus grand terme m, ou $m + p$: & qui est par conséquent de la forme $2^{m+1} - 1$, ou $2^{m+p+1} - 1$, par exemple $F = 0.1.2.3.4.5$ &c.

Le *facteur vuide* est celui qui n'a aucun terme intermédiaire entre le premier $= 0$, & le plus grand $= m$; & qui est par conséquent de la forme $2^m + 1$, ou $2^{m+p+1} + 1$, par exemple $F = 0.8$.

Enfin un *facteur coupé* est celui qui outre les deux termes extrêmes o, & m, ou $m + p$, a encore des termes intermédiaires, mais qui ne se succedent pas tous dans l'ordre naturel, & qui par conséquent laissent entr'eux des lacunes, ou des intervalles vuides, par ex. $F = 0.3.5.6.8.12$.

La combinaison de ces trois cas possibles donne *neuf* especes différentes de produits, & les formules de ces especes sont plus ou moins régulieres, selon que les facteurs eux-mêmes le sont plus ou moins.

PROBLEME I.

Trouver la formule générale du produit de deux facteurs pleins.

30. Soit le grand facteur $F = 0.1.2 \ldots (m + p)$, & le petit facteur $f = 0, 1 \ldots m$, les coëfficiens des termes du produit Ff seront:

$$1.2.3 \ldots m.(m+1) \ldots (m+1).m.(m-1).(m-2) \cdots 1.$$

Car on peut concevoir le rhombe formé par les produits partiaux comme étant coupé verticalement en deux triangles, l'un vers la gauche, & l'au-

tre vers la droite, ayant un parallélogramme entre deux. Ainſi depuis l'origine o du triangle gauche, les coëfficiens iront en croiſſant d'une unité, de 1 juſqu'à $m - 1$, ce qui donne m termes croiſſans.

Enſuite le parallélogramme s'étendra depuis m juſqu'à $m + p$, ce qui donne $p + 1$ coëfficiens conſtans, dont chacun eſt $= m + 1$.

De là commence le ſecond triangle égal & ſemblable au premier; mais dans une poſition renverſée, où les coëfficiens décroitront ſucceſſivement depuis m juſqu'à 1.

Soit p.ex. $F =$	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.				
$f =$	0.	1.	2.	3.	4						
on a les produits partiaux	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6				
		1	2	3	4	5	6	7			
			2	3	4	5	6	7	8		
				3	4	5	6	7	8	9	
					4	5	6	7	8	9	10.

$Ff = 1\times0.\ 2\times1.\ 3\times2.\ 4\times3.\ 5\times4.\ 5\times5.\ 5\times6.\ 4\times7.\ 3\times8.\ 2\times9.\ 1\times10.$

31. COROLLAIRES. *a.* Donc, ſi le petit facteur f a 2 termes 0.1 $= 3$. les coëfficiens du produit Ff ſeront 1. 2 . . . . 2. 1. & un nombre exponentiel de cette forme eſt diviſible par 3.

b. Donc, ſi $f =$ 0, 1, 2. les coëfficiens de Ff ſeront 1. 2. 3 . . . 3. 2. 1. & un nombre de cette forme eſt diviſible par 7.

c. Donc, ſi $f =$ 0. 1. 2. 3. les coëfficiens de Ff ſeront 1. 2. 3. 4 . . . . . 4. 3. 2. 1. & un nombre de cette forme eſt diviſible par 15.

d. Donc en général, ſi $f =$ 0. 1. 2 . . . m. les coëfficiens de Ff ſeront 1. 2. 3. . . $(m + 1)$. . . $(m + 1).(m).(m - 1)$. . . . 1. & le nombre qui pourra être réduit à cette forme ſera toujours diviſible par $2^{m+1} - 1$.

32. Par les regles de la ſyntheſe, ou de la compoſition des expoſans (Art. 8.), on ſait que l'on a toujours

$$
\begin{aligned}
* \; * \; * \ldots * \; * \; * \; 1 &= * \; * \; * \ldots * \; * \; 2 \; * \\
&= * \; * \; * \ldots * \; 2 \; 1 \; * \\
&= * \; * \; * \ldots 2 \; 1 \; 1 \; * \\
&\quad \vdots \\
&= 2 \; 1 \; 1 \ldots 1 \; 1 \; 1 \; *
\end{aligned}
$$

donc réciproquement toute ſuite de coëfficiens $= 2\;1\;1\ldots 1\;1\;1\;*$ eſt $= *\;*\;*\ldots *\;*\;*\;1$.

Si donc de la ſuite des coëfficiens croiſſans du triangle gauche

$$1.\,2.\,3.\,4.\ldots (m-1).\ (m).\ (m+1)$$

on ôte ſucceſſivement $2\;1\;1\ldots 1\;1\;1\;*$, on aura l'opération ſuivante

$$
\begin{array}{lllllllll}
 & + & 1.\,2.\,3.\,4 & \ldots & (m-1). & (m). & (m+1) \\
 & - & 2\;1\;1 & \ldots & 1 & 1 & * \\
\hline
1^{er} \text{ reſte} & = & 1\;*\;2\;3 & \ldots & (m-2). & (m-1). & (m+1) \\
 & & -\;2\;1 & \ldots & 1 & 1 & * \\
2^{d} \text{ reſte} & = & 1\;*\;*\;2.\,3 & \ldots & (m-3). & (m-2). & (m+1) \\
 & & \vdots & & \vdots & & \\
(m-1)^{e} \text{ reſte} & = & 1\;*\;*\;* & \ldots & * & * & (m+1)
\end{array}
$$

Mais à chaque ſouſtraction, pour ne rien diminuer de la ſomme primitive, il falloit augmenter de l'unité le coëfficient $(m+1)$, & puiſqu'il y a eû $m-1$ ſouſtractions, ce coëfficient ſeroit devenu $=(2m)$. Ainſi les coëfficiens du premier triangle étant réduits, ſont $= 1 + (m-1)$ fois $*$, & il reſte à ajouter au premier coëfficient du parallélogramme $m-1$ unités.

Or les coëfficiens conſtans, au nombre de $p+1$, ſont

$$
\begin{array}{lllll}
 & (m+1). & (m+1) & \ldots & (m+1) \\
\text{en y joignant} & (m-1) & & & \\
\hline
\text{la réduction donne} & * & 1 & \ldots & 1.\quad m.
\end{array}
$$

donc les coëfficiens du parallélogramme étant réduits donnent * (p) 1, & il reste m unités à ajouter au premier coëfficient décroissant du second triangle.

Mais la suite de ces coëfficiens est $m.(m-1).(m-2)\ldots 1$

Ainsi ajoutant au premier $+\,m.$

la réduction donne . . . . . * 1 1 . . . . . 1 1

$=$ * $+$ (m) fois 1.

En réunissant ces trois membres, on a la formule cherchée du produit des facteurs pleins

1. (m) *. (p) 1. * (m) 1.

33. COROLL. 1. Ainsi à l'aide des coëfficiens réduits à l'unité par la synthese, & des places vuides qu'ils laissent, l'algorithme exponentiel est ramené ici à la dyadique, avec cette différence purement accidentelle, qu'ayant multiplié de gauche à droite, le nombre dyadique a l'unité à la gauche, & son plus haut terme à la droite.

34. *AVERTISSEMENT.* Comme il est plus commode d'employer le zéro, qu'une étoile pour désigner les places vuides, nous nous servirons à l'avenir du zéro. Il est vrai que dans l'algorithme exponentiel o marque l'unité, & non une lacune, puisque c'est l'exposant de 2^0. Mais il n'y a point à craindre d'équivoque entre des nombres exprimés par les exposans, & des nombres exprimés par l'Arithmétique dyadique. On ne sauroit confondre 0.1.3.5. avec 101011, ou 110101.

35. COROLL. 2. De la formule trouvée 1 (m) 0. (p) 1. 0 (m) 1 résulte le

THÉOREME XVI.

Tout nombre exponentiel auquel il manque autant de termes par ex. m *entre* 0 *& le premier exposant dans l'ordre des nombres, qu'il y aura de termes qui se suivent immédiatement vers les plus hauts exposans, précédés d'une seule*

place vuide, a pour facteurs F $=$ o . . . . . (m $+$ p) & f $=$ o . . . . . m.

Exemple.

$$0|5.6|8.9.10.11. = (0.1.2.3.4.5.6)(0.1.2.3.4) = 3937.$$

36. COROLL. 3. Si l'on poſe dans la formule $p = 0$, on aura celle d'un quarré $= 1.(m+1)\,0\,(m)\,1$; de là réſulte le

THÉOREME XVII.

Tout nombre exponentiel auquel il manque un terme de plus, par ex. m $+$ 1 *entre* o *& le moindre expoſant au-deſſus de* o, *qu'il y a de termes conſécutifs de là juſqu'au plus grand expoſant, eſt un quarré dont la racine eſt* $=$ o . . . m $= 2^{m+1} - 1$.

Exemple.

$$0|6.7.8.9 = (0.1.2.3.4)\,(0.1.2.3.4) = 961.$$

PROBLEME II.

Trouver la formule générale du produit, quand les facteurs ſont vuides, ou de la forme $2^{m+p}+1$, & 2^m+1.

37. Cette formule réſulte tout ſimplement du rhombe formé par les produits partiaux; qui ſont dans ce cas-ci

$$\begin{array}{llll} 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & (m+p) \\ \;\cdot\;\;\cdot & & \cdot\;\;\cdot & \\ \;\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\;\;\cdot & \\ \;\;\;\cdot\cdot & & \cdot\;\;\;\;\cdot & \\ & m & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (2m+p), \end{array}$$

d'où l'on voit 1°. que les places vuides entre o & m ſont au nombre de $m-1$; entre m & $(m+p)$, au nombre de $p-1$; & entre $m+p$ & $2m+p$, au nombre de $m-1$. 2°. que les quatre places remplies n'ont chacune qu'un ſeul terme, & que par conſéquent le coëfficient eſt $=1$.

La formule cherchée eſt donc

$$= 1.(m-1)\,0.1\,(p-1)\,0.1.(m-1)\,0.1.$$

38. COROLL. 1. Cette formule eſt la même que celle que nous avons trouvée ſous un autre point de vue Art. 12. Là o. m. $(m + p)$. $(2m + p)$ repréſente les nombres exponentiels eux-mêmes; ici on a les nombres dyadiques; qui marquent la place des puiſſances du binaire.

39. COROLL. 2. De cette formule réſulte le

THÉOREME XVIII.

Tout nombre exponentiel à 4 termes, qui laiſſe autant de places vuides (m — 1) *entre le premier & le ſecond terme, qu'entre le troiſieme & le quatrieme, & qui a un nombre quelconque* (p — 1) *de places vuides entre le ſecond & le troiſieme, a pour facteurs* $F = 2^{m+p} + 1$, $f = 2^m + 1$.

Exemple.

$$0.4.8.12 = (0.8)(0.4) = 4369.$$

40. COROLL. 3. Si l'on poſe $p = 0$, la formule ſeroit

$$1\,(m - 1)\,0.\,1.\,(-1)\,0.\,1.\,(m - 1)\,0.\,1.$$

Or le ſigne négatif montre qu'il faut reculer les termes ſuivans d'autant de places qu'en contient le nombre négatif; ainſi l'on a

$$\begin{matrix} 1\,(m - 1)\,0\,1 & \\ & 1\,(m - 1)\,0.\,1. \end{matrix} = 1.\,(m - 1)\,0.\,0.\,1.\,(m - 2)\,0.\,1$$

$$= 1.\,(m)\,0.\,1.\,(m - 2)\,0.\,1.$$

d'où réſulte le

THÉOREME XIX.

Tout nombre exponentiel à 3 termes, qui a deux places vuides de plus entre le premier terme o *& le ſecond* (m + 1), *qu'entre celui-ci & le troiſieme* (2 m), *eſt un quarré dont la racine eſt* $= 0.m = 2^m + 1$.

Exemple.

$$0.9.16 = (0.8)(0.8) = 66049.$$

PROBLEME III.

Trouver la formule générale du produit quand le grand facteur F *eſt plein* $= 2^{m+p+1} - 1$, *& que le petit facteur* f *eſt vuide* $= 0.m = 2^m + 1$.

41. Cette formule résultera encore immédiatement du rhombe des produits partiaux, & des principes de l'algorithme exponentiel §. 8. les produits partiaux sont $F \times 0 = 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \ldots$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$F \times m = \quad 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \ldots\ldots$$

donc le produit total $Ff = 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1.$

ce qui donne la formule: $(m)\,1.\,0.\,(p)\,1.\,(m)\,0.\,1.$

THÉOREME XX.

42. Donc *tout nombre exponentiel qui à commencer par* 0 *aura précisément autant de termes successifs au nombre de* m, *suivis d'une seule place vuide, qu'il y aura de places vuides avant le plus grand terme, & qui aura entre les deux lacunes un nombre* p *quelconque de termes consécutifs, a pour facteurs* $F = 2^{m+p+1} - 1$, & $f = 2^m + 1$.

Exemple.

$0.\,1.\,2.\,3\,|\,5.\,6\,|\,11. = (0.\,1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6)\,(0.\,4) = 2159.$

43. COROLLAIRE. Si l'on pose $p = 0$, la formule devient $(m)\,1.\,(m+1)\,0.\,1.$ ce qui donne le

THÉOREME XXI.

Tout nombre exponentiel qui à commencer de 0 *a un nombre quelconque* m *de termes consécutifs; & ensuite un intervalle de* m + 1 *places vuides avant le plus grand terme, a pour facteurs* $F = 2^{m+1} - 1$, & $f = 2^m + 1$.

Exemple.

$0.\,1.\,2.\,3\,|\,9 = (0.\,1.\,2.\,3.\,4)\,(0.\,4) = 527.$

PROBLEME

PROBLEME IV.

44. *Trouver la formule générale du produit, quand le grand facteur est vuide, ou* F $= 2^{m+p} + 1$, *& que le petit facteur est plein* $= 2^{m+1} - 1$.

Cette formule résulte aussi tout simplement de l'inspection des produits partiaux dans cette quatrieme espece.

On a F = 1 1
1 1
1 1
1 1
. .
. .

Ff = 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1.

donc la formule cherchée est: $(m + 1)\, 1\, (p - 1)\, 0 . (m + 1)\, 1$.

45. Remarque. Comme le Probleme IV. n'est que l'inverse du Probleme III. on peut trouver la formule, en substituant dans l'espece 3me $m + p$ à m, & $- p$ à $+ p$; alors on a pour l'espece 4me $(m + p)\, 1 . 0\, (- p)\, 1 . (m + p)\, 0 . 1$. qui par notre analyse de situation revient à celle que nous venons de trouver, comme l'opération suivante va le montrer.

En plaçant les termes sur l'indication du signe négatif, c. à d. en reculant de p places, la formule devient

$(m+p)\, 1 . 0$
$(p)\, 0 .\ (m)\, 0 .\ 1.$

$(m+p)\, 1\, 0\ \ (m)\, 0 .\ 1. = (m+1)\, 1\, (p-1)\, 1\, 0\, (m)\, 0\, 1.$

d'où il faut soustraire p unités puisque le terme négatif a la caractéristique 1.

$-\, (p)\, 1 \qquad\qquad - 1\ 1\ 1\ 1$

$(m+1)\, 1\, (p-1)\, 0\, (m+1)\, 1. = (m+1)\, 1\, (p-1)\, 0 . 1\, (m)\, 1$
$= (m+1)\, 1 . (p-1)\, 0\ (m+1)\, 1.$

THÉOREME XXII.

46. Donc; *tout nombre exponentiel qui aura un nombre égal quelconque* m + 1 *de termes conſécutifs, vers les deux extrémités, & une ſeule lacune de* (p — 1) *places vuides, aura pour facteurs* $F = 2^{m+p} + 1$, & $f = 2^{m+1} - 1$.

Exemple.

0.1.2.3.4|8.9.10.11.12 = (0.8) (0.1.2.3.4) = 7967.

47. COROLL. Si l'on poſe $p = 0$, la formule devient
(*m*) 1. (*m* + 1) 0. 1.

Car on a (*m*) 1. 1
1 (*m*) 1 } = (*m*) 1 (*m* + 1) 0. 1.

THÉOREME XXIII.

48. Donc: *Tout nombre exponentiel qui commence par la ſuite naturelle* 0. 1. 2 . . m, *& qui de là au plus haut terme a une interruption de* m + 1 *places vuides, a pour facteurs* $F = 2^m + 1$, $f = 2^{m+1} - 1$.

Exemple.

0. 1. 2. 3|9 = (0. 4) (0. 1. 2. 3. 4) = 527.

C'eſt le cas du Théoreme XXI. parce qu'en poſant $p = 0$, le grand facteur qui eſt vuide, devient plus petit que le petit facteur qui par la ſuppoſition eſt plein.

PROBLEME V.

49. *Trouver la formule générale du produit quand le grand facteur eſt plein*, $F = 2^{m+p+1} - 1$, *& que le petit facteur eſt coupé, en ſorte qu'il lui manque les expoſans*, v', v'', v''' . . . . v^n, *entre les deux extremes* 0 & m.

Il ſeroit trop long de donner ici le détail des opérations qui conduiſent à cette formule, & à celles des quatre eſpeces ſuivantes; il ſuffira d'en indiquer les principes, & la marche, & d'en rapporter le réſultat.

Il eſt clair que le produit de cette 5me eſpece ne differe du produit de la premiere §. 32. où les deux facteurs ſont pleins, qu'en ce qu'il y manque autant de produits partiaux, que le petit facteur a de places vuides. Or ſi la place vuide de l'expoſant ν avoit été remplie, ſon produit $F \times \nu$ ſeroit ν, $(\nu + 1)$ $(\nu + 2)$ . . . . . $(\nu + m + p)$; c'eſt donc ce qu'il faut ſouſtraire de la formule des facteurs pleins, qui eſt §. 32. $= 1 . (m) \, o \, (p) \, 1 . o \, (m) \, 1$.

Mais pour procéder à cette ſouſtraction, il ſuffit de ſe rappeller que s'il faut ôter la caractériſtique 1, d'une caractériſtique o, il faut emprunter la premiere unité vers la droite, laquelle par la nature des expoſans (§. 8.), dépoſe un coëfficient 1 ſur tous les termes inférieurs en deſcendant vers la gauche juſqu'à ce qu'on arrive au terme ν, où, ſi l'on arrête la décompoſition, ce coëfficient emprunté vaudra 2, & par conſéquent le reſte de la ſouſtraction donne 1 pour cette place-là.

Si au contraire il faut ôter le coëfficient 1, d'un coëfficient correſpondant $= 1$, le reſte de la ſouſtraction donne o, c. à d. une place vuide.

De là on trouvera pour le cas d'une ſeule place vuide ν, dans le petit facteur,

$$1 . (\nu - 1) \, o . \, 1 \, (m - \nu) \, o \, (p) \, 1 . o . (\nu - 1) \, 1 . o . (m - \nu) \, 1 .$$

Pour le cas de deux places vuides ν', ν''

$$1 . (\nu' - 1) \, o \, 1 . (\nu'' - \nu' - 1) \, o . \, 1 \, (m - \nu'') \, o \, (p) \, 1 . o \, (\nu' - 1) \, 1 . o \, (\nu'' - \nu' - 1) \, 1 . o \, (m - \nu'') \, 1 .$$

Pour le cas de trois places vuides, ν', ν'', ν'''.

$$1 \, (\nu' - 1) \, o . \, 1 \, (\nu'' - \nu' - 1) \, o . \, 1 . \, (\nu''' - \nu'' - 1) \, o . \, 1 . (m - \nu''') \, o . \, (p) \, 1 . o \, (\nu' - 1) \, 1 . o . (\nu'' - \nu' - 1) \, 1 . o . (\nu''' - \nu'' - 1) \, 1 . o (m - \nu''') \, 1 .$$

Enfin pour le cas général de n places vuides,

$$1 . (\nu' - 1) \, o \, 1 . (\nu'' - \nu' - 1) \, o \, 1 \ldots . (\nu^n - \nu^{n-1} - 1) \, o \, 1 . (m - \nu^n) \, o \, (p) \, 1 . o . (\nu' - 1) \, 1 \, o \, (\nu'' - \nu' - 1) \, 1 \, o \ldots . (\nu^n - \nu^{n-1} - 1) \, 1 . o \, (m - \nu^n) \, 1 .$$

50. COROLL. Donc si l'on pose $v' - 1 = a$; $v'' - v' - 1 = b$, $v''' - v'' - 1 = c$, &c. $v^n - v^n - 1 = q$, on aura le Théoreme suivant.

THÉOREME XXIV.

Tout nombre exponentiel dont les termes, à commencer de 0, *se succederont dans l'ordre de la formule des coëfficiens*

$$1.(a)0.1.(b)0.1(c)0.1\ldots(q)0.1.(m-v^n)0(p)1.0(a)1.0.(b)1.0.(c)10\ldots(q)1.0.(m-v^n)1.$$

a pour facteurs $F = 2^{m+p+1} - 1$, $f = 0\ldots(v'-1)(v'+1)\ldots\ldots(v''-1).(v''+2)\ldots\ldots(v'''-1).(v'''+1)\ldots\ldots(v^n-1)(v^n+1)\ldots\ldots m.$

Donc posant $b = 0$, on a

$$1.(a)0.1.(m-a-1)0(p)1.0.(a)1.0(m-a-1)1 = (2^{m+p+1}-1)(0\ldots a(a+2)\ldots m).$$

Exemple.

$$0|4|6|8.9.10|12 = (2^7-1)(0.1.2.3|5) = 5969.$$

Ici $a = 3$, $m - 4 = 1$, $p = 1$.

Posant $c = 0$, on a

$$1.(a)0.1.(b)0.1.(m-b-a-2)0(p)1.0(a)10(b)1.0.(m-b-a-2)1. = (2^{m+p+1}-1)(0\ldots a)(a+2)\ldots\ldots b(b+2)\ldots m).$$

Exemple.

$$0|2|4|6|8|10|12 = (2^7-1)(0.1.3.5) = 5461.$$

On a ici $a = 1$, $b = 1$, $m - b - a - 2 = 1$, $p = 1$, donc $m = 5$, $m + p = 6$, $v' = 2$, $v'' = b + a + 2 = 4$.

Posant $d = 0$, on aura

$$1.(a)0.1(b)0.1.(c)0.1(m-c-b-a-3)0(p)1.0(a)1.0(b)1.0(c)10.(m-c-b-a-3)1.$$

Exemple.

$$0|1|2|4|6|10|12. = (0.1.2.3.4.5.6)(0.3.5) = 5207.$$

Ici on a $a = 0$, donc $v' = 1$, $b = 0$, donc $v'' = 2$, $c = 1$, donc $v''' = 4$, $m - c - b - a - 3 = 1$, donc $m = 4$.

PROBLEME VI.

51. *Trouver la formule du produit de la sixieme espece, savoir celle où le grand facteur est vuide,* $F = 2^{m+p} + 1$, *& le petit facteur coupé,* $f = 0.1 \ldots (v' - 1)(v' + 1) \ldots (v'' - 1)(v''')$

Si de la formule du Probleme IV. pour le cas de F vuide, f plein, qui est (§. 44.) $(m + 1) 1.(p - 1) 0.(m + 1) 1$, on soustrait pour le produit partial

$$(v - 1) 0.1 (m + p - 1) 0.1.$$

on aura, pour le cas d'une place vuide dans le petit facteur, la formule

$$(v) 1.0 (m - v) 1 (p - 1) 0 (v) 1 0 (m - v) 1.$$

d'où ôtant encore $(v'' - 1) 0.1 (m + p - 1) 0.1.$

on a pour deux places vuides: v', v'',

$$(v') 1.0 (v'' - v' - 1) 1.0 (m - v'') 1.(p - 1) 0.(v') 1.0 (v'' - v' - 1) 1 0 (m - v'') 1.$$

On trouve de même pour trois places vuides, v', v'', v''',

$$(v') 1.0 (v'' - v' - 1) 1.0 (v''' - v'' - 1) 1.0 (m - v''') 1.(p - 1) 0 (v') 1.0 (v'' - v' - 1) 1.0 (v''' - v'' - 1) 1.0 (m - v''') 1.$$

Enfin pour n places vuides la formule générale est:

$$(v') 1.0 (v'' - v' - 1) 1.0 \ldots (v^n - v^{n-1} - 1) 1.0 (m - v^n) 1.(p - 1) 0.(v') 1.0 (v'' - v' - 1) 1.0 \ldots (v^n - v^{n-1} - 1) 1.0 (m - v^n) 1.$$

COROLL. Si l'on pose pour abréger $v' = a$, $v'' - v' - 1 = b$, $v''' - v'' - 1 = c$, $1 \ldots v^n - v^{n-1} - 1 = q$, on formera le Théoreme suivant.

THÉOREME XXV.

52. *Tout nombre exponentiel dont les termes, à commencer de o, se suivront dans l'ordre de cette formule des coëfficiens*

$$(a)\,1.\,0\,(b)\,1.\,0\,(c)\,1.\,0\;.\;.\;.\;.\;.\;(q)\,1.\,0\,(m - v^n)\,1.\,(p - 1)\,0.$$
$$(a)\,1.\,0\,(b)\,1.\,0\,(c)\,1.\,0\;.\;.\;.\;.\;(q)\,1.\,0\,(m - v^n)\,1.$$

en sorte que l'ordre de la succession soit le même des deux côtés, aura pour facteurs $F = 2^{m+p} + 1$, & $f = 0 \ldots (v' - 1)(v' + 1) \ldots \ldots (v'' - 1)(v'' + 1) \ldots \ldots (v^n - 1)(v^n + 1) \ldots m.$

Donc posant $b = 0$, on aura

$$(a)\,1.\,0.\,(m-a)\,1.\,(p-1)\,0.\,(a)\,1\,0.\,(m-a)\,1.$$

Exemple.

$$0.1.2|4|8.9.10|12 = (0.8)(0.1.2.4) = 5911.$$

On a ici $a = 3$, $m - a = 1$, donc $m = 4$, $p - 1 = 3$, donc $p = 4$.

Posant $c = 0$, on aura

$$(a)\,1.\,0.\,(b)\,1.\,0\,(m-b-a-1)\,1.\,(p-1)\,0.\,(a)\,1\,0.\,(b)\,1\,0.\,(m-b-a-1)\,1.$$

Exemple.

$$0.1|3|5|8.9|11|13 = (0.8)(0.1.3.5) = 11051.$$

Ici $a = 2$, $b = 1$; $m - b - a - 1 = 1$, donc $m = 5$, $p - 1 = 2$, $p = 3$.

Posant $d = 0$, on aura

$$(a)\,1.\,0.\,(b)\,1.\,0\,(c)\,1.\,0\,(m-c-b-a-2)\,1.\,(p-1)\,0.\ \&c.$$

Exemple.

$$0|3|5.6.7|16|19|21.22.23 = (0.16)(0.3.5\,6.7) = 15270121.$$

On a ici $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, $m - c - b - a - 2 = 3$, donc $m = 7$, $p - 1 = 8$, donc $p = 9$.

53. COROLL. Si dans la formule on poſe $p = 0$, il y a un terme négatif $(-1)0$, qui exige le recul d'une place pour tous les termes ſuivans, mais ſans ſouſtraction, puiſque la caractériſtique du terme négatif eſt 0.

Ainſi la formule devient dans ce cas

$$(a)1.0(b)1.0\ldots(q)1.0.(m-v''-1)1.(a)0.(b+1)1.0.(c)1.0$$
$$\ldots.(q)1.0.(m-v'')1.$$

Car dans l'addition

$$\left.\begin{array}{l} \text{de } (m-v'')1 \\ \quad +(a)1.0(b)1\,0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} =(m-v''-1)1+1 \\ \qquad +1+(a-1)1.0(b)1\,0. \end{array}$$

on a la ſomme . . . . $=(m-v''-1)1\quad 0\quad (a-1)0.1(b)1\,0.$
$=(m-v''-1)1\quad (a)\quad 0(b+1)1\,0.$

Soit $b = 0$, la formule devient pour une ſeule place vuide

$$(a)1.0.(m-a-1)1.(a)0.(m-a+1)1.$$

Exemple.

$$0|2.3|5.6.7.8 = (0.4)(0.2.3.4) = 493.$$

Ici $a = 1$, $m - a - 1 = 2$, donc $m = 4$.

Soit $c = 0$, la formule pour deux places vuides devient

$$(a)1.0(b)1.0(m-b-a-2)1.(a)0(b+1)1.0(m-b-a-1)1.$$

Exemple.

$$0.1|6|8 = (0.4)(0.1.4) = 323.$$

Ici $a = 2$, $b = 0$, $m - b - a - 2 = 0$, donc $m = 4$,

& la formule donne en nombres dyadiques 110000101.

Soit $d = 0$, la formule pour trois places vuides devient

$$(a)1.0(b)1.0(c)1.0(m-c-b-a-3)1.(a)0(b+1)1\,0$$
$$(c)1\,0(m-c-b-a-2)1.$$

Exemple.

$$0|5|8| = (0.4)(0.4) = 289.$$

Ici $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $m - c - b - a - 3 = 0$, donc $m = 4$, & l'on a dans cet exemple par la formule en nombres dyadiques 100001001; car les termes $(b)\,1$, $(c)\,1$, $(m - c - b - a - 3)\,1$, évanouissent.

54. REMARQUE. Jusqu'ici toutes nos formules n'ont renfermé que des termes positifs, ou tout au plus évanouissans; car quoique toutes les especes paires, aient le terme $(p - 1)$, qui est négatif lorsque $p = 0$, cela n'opere que le recul d'une seule place, & comme nous l'avons montré, il est toujours aisé d'avoir une formule toute positive pour ce cas particulier. Mais dans les trois especes qui restent à examiner, la chose est différente; on ne peut plus éviter que les formules des produits ne renferment quelques termes négatifs, parce que la lacune V dans le grand facteur ne s'étend que depuis le terme déficient V jusqu'au terme $V + m$; & que le rapport de V à m, n'est pas donné, au lieu qu'on avoit toujours $v'' < m$.

PROBLEME VII.

55. *Trouver la formule générale du produit de la 7*^{me} *espece qui a le grand facteur coupé,* $F = 0 \ldots (V' - 1)(V' + 1) \ldots (V'' - 1)(V'' + 1) \ldots \ldots (V^N - 1)(V^N + 1) \ldots \ldots (m + p)$, *& le petit facteur plein* $= 2^{m+1} - 1$.

Comme cette septieme espece est l'inverse de la cinquieme, il n'y a qu'à substituer dans la formule §. 49. V à v, $m + p$ à m & $-p$ à $+p$, pour avoir la formule cherchée; elle est par conséquent:

$$1.(V' - 1)\,0.\,1\,(V'' - V' - 1)\,0.\,1 \ldots (V^N - V^{N-1} - 1)\,0\,1.\,(m - V^N + p)\,0\,(-p)\,1.\,0\,(V' - 1)\,1.\,0\,(V'' - V' - 1)\,1.\,0 \ldots \ldots (V^N - V^{N-1} - 1)\,1.\,0.\,(m + p - V^N)\,1.$$

56. REMARQUE. Il feroit aisé dans notre analyse de faire disparoître le terme négatif $(-p)\,1$, en reculant de p places les termes suivans, & en soustrayant p unités des places redoublées; mais en le faisant on s'expose à avoir d'autres termes négatifs. L'opération feroit comme suit:

$(m +$

$$(m + p - V^N)0(-p)1\,0(V' - 1)1\,0$$
$$= (m - V^N)0 + (p)0$$
$$+\ 0(p-1)1(V'-p)1\,0.\ \&c.$$
$$= (m - V^N)0.\quad 0(p-1)1(V'-p)1.0\ \&c.$$
$$-\ 1\ \ldots\ldots\ 1$$
$$= (m - V^N)0.\quad 1(p-1)1\,0(V'-p-1)1\,0\ \&c.$$
$$= (m - V^N)0\quad (p)1.\,0\,(V'-p-1)1\,0.\ \&c.$$

Or il eſt poſſible que $(m - V^n)$ ſoit négatif, & que $(V' - p - 1)$ le ſoit auſſi; & alors on n'auroit rien gagné à la transformation.

Exemples.

Soit $V'' = 0$, $V' = 2$, $m = 4$, $p = 3$,

la premiere formule donne: 10100000 — (3) 1.01011111

$$= 10100000$$
$$+\ 01011111$$
$$-\ 111$$
$$= 101001100111 = 0.\ 2.\ 5.\ 6.\ 9.\ 10.\ 11.\ 12.$$
$$= (0.\ 1.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7)(0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4) = 7781.$$

la ſeconde formule donne: 10100111O — (2) 1.011111

$$= 101001110$$
$$+\ 011111$$
$$-\ 11$$
$$= 101001100111.$$

Soit $V'' = 0$, $V' = 3$, $m = 2$, $p = 6$,

la premiere formule donne: 100100000 — (6) 1.011011111

$$= 100100000$$
$$+\ 011011111$$
$$-\ 111111$$
$$= 100000111011 = 0.6.7.8.10.11$$
$$= (0.1.2.4.5.6.7.8)(0.1.2) = 3521.$$

la feconde formule donne: 1001 — (1)0.1111110 — (4)1.011111

$$
\begin{array}{l}
= + 1001 \\
\quad + 1111110 \\
\quad\quad + 011111 \\
\quad\quad - 1111 \\
\hline
= 100000111011.
\end{array}
$$

Soit $V''' = 0$, $V'' = 6$, $V' = 3$, $m = 6$, $p = 2$,

la feconde formule donne: 1001001110011011

$= 0.3.6.7.8.11.12.14.15 = (0.1.2.4.5.7.8)(2^7 - 1)$

$= 55753 = 439 \times 127.$

Soit $V^{\text{IV}} = 0$, $V''' = 5$, $V'' = 3$, $V' = 2$, $m = 4$, $p = 4$,

la premiere formule donne: 101101000 — (4)1.010010111

$$
\left.\begin{array}{l}
= 101101000 \\
\quad + 010010111 \\
\quad - 1111
\end{array}\right\} = 1011000100111
$$

$= 0.2.3.7.11.12.13 = (0.1.4.6.7.8)(0.1.2.3.4)$

$= 14477.$

Soit $V^{\text{IV}} = 5$, $V''' = 4$, $V'' = 2$, $V' = 1$, $m = 4$, $p = 2$,

la feconde formule donne: 111011 — 0110 — (2)1.001001

$= 111010110001 = 0.1.2.4.6.7.11 = (0.3.6)(0 \ldots 4)$

$= 2263.$

PROBLEME VIII.

57. *Trouver la formule générale du produit de la huitieme efpece, qui a le grand facteur coupé, ou* $F = 0 \ldots (V' - 1)\ (V' + 1) \ldots (V'' - 1)\ (V'' + 1) \ldots . (V^N - 1)\ (V^N + 1) \ldots . (m + p)$ *& le petit facteur vuide, ou* $f = 2^m + 1$.

Cette efpece eft l'inverfe de la fixieme, dont la formule eft à l'Art. 51. Ainfi fubftituant ici V à v, $m + p$ à m, & $-p$ à $+p$, on aura la formule cherchée

$(V')1.0(V''-V'-1)1.0\ldots(V^N-V^{N-1}-1)1.0(m-V^N+p)1.(-p-1)0.$
$(V')1.0(V''-V'-1)1.0\ldots(V^N-V^{N-1}-1)1.0(m+p-V^N)1.$

58. REMARQUE I. Pour faire disparoître le terme négatif $(-p-1)0$, il n'y a qu'à ranger les termes voisins selon les regles de cette analyse, & l'on aura, en décomposant convenablement les termes qui doivent coïncider par le recul de $(p+1)$ places:

$$\left.\begin{array}{l}(m-V^N+p)1\\ \quad(V')1\,0\,(V''-V'-1)\end{array}\right\}=\begin{array}{l}(m-V^N-1)1+1+(p)1\\ \quad+1+(p)1+(V'-p-1)1\,0(V''-V'-1)1\,0.\end{array}$$
$$=(m-V^N-1)1\;0\;(p)1\;(V'-p-1)0\,1(V''-V'-1)1\,0.$$
$$=(m-V^N-1)1\;0\;(p)1\;(V'-p-1)0(V''-V')1\;0.$$

Par cette transformation la formule n'aura point de termes négatifs lorsque $m > V^N$ & $p < V'$, mais elle en aura deux dans le cas contraire; & le cas $m < V'$ exigera même une soustraction d'unités, à cause de la caractéristique 1 qui accompagne le coëfficient $(m-V'-1)$, au lieu que la premiere formule n'exige point de soustraction, parce que $(-p-1)$ a la caractéristique 0.

Exemples.

Soit $V''=0$, $V'=3$, $m=4$, $p=2$,

la seconde formule donne: $1110011111 = 0.1.2.5.6.7.8.9.10$
$= (0.1.2.4.5.6)(0.4) = 2223.$

Soit $V''=0$, $V'=3$, $m=4$, $p=4$,

elle donne: $111001111 - (2)0.111111$

$$=\left.\begin{array}{r}111001111\\ 111111\end{array}\right\}=11100110100001$$

$= 0.1.2.5.6.8.13 = (0.1.2.4.5.6.7.8)(0.4) = 8551.$

Soit $V'''=0$, $V'=1$, $V''=2$, $m=3$, $p=0$,

la formule donne: $1000101 = 0.4.6 = (0.3)(0.3).$

Soit $V' = 2$, $V'' = 4$, $m = 5$, $p = 1$,

on a 11010011 1011 = 0.1.3.6.7.8.10.11 = (0.1.3.5.6)(0.5).

Soit $V' = 3$, $V'' = 6$, $m = 3$, $p = 4$,

la premiere formule donne: 11101101 — (5)0.11101101

= 11101101 + 11101101 } = 1111011 0011

= 0.1.2.3.5.6.9.10 = (0.1.2.4.5.7)(0.3).

Soit $V^{IV} = 0$, $V' = 2$, $V'' = 4$, $V''' = 5$, $m = 4$, $p = 2$,

la premiere formule donne: 1101001 — (3)0.1101001

= 1101001 1101001 } = 1101111 1001 = 0.1.3.4.5.6.7.10

= (0.1.3.6)(0.4).

Soit $V^{VI} = 0$, $V' = 2$, $V'' = 4$, $V''' = 5$, $V^{IV} = 7$, $V^{V} = 9$. $m = 4$, $p = 6$,

la formule donne: 11010010101 — (7)0.11010010101

= 11010010101 11010010101 } = 110111111001101

= 0.1.3.4.5.6.7.8.11.12.14 = (0.1.3.6.8.10)(0.4).

59. REMARQUE 2. C'est à cette huitieme espece de produits qu'on peut rapporter le plus convenablement les nombres premiers; il suffit pour cet effet de poser $m = 0$, puisque f est ici réduit à l'unité. De là le Théoreme suivant:

THÉOREME XXVI.

60. *Tout nombre premier est contenu dans cette formule générale:*

$(V')1.0(V''—V'—1)1.0\ldots(V^N—V^{N-1}—1)1.0(p—V^N)1(—p—1)0.$
$(V')1.0(V''—V'—1)1.0\ldots(V^N—V^{N-1}—1)1.0(p—V^N)1.$

61. REMARQUE 1. On peut, comme nous l'avons vû §. 58, changer les termes $(p—V^N)1(—p—1)0(V')10(V''—V'—1)10$,

en ceux-ci qui leur sont équivalens $(-V^N-1)1.0(p)1(V'-p-1)0$ $(V''-V')1.0$. Mais alors il y a nécessairement, outre le recul des termes, une soustraction de V^N+1 unités à faire.

62. REMARQUE 2. Cependant, comme on a ici nécessairement $p > V^N$, il est possible de faire évanouir tous les termes négatifs de cette formule par une opération de cette analyse qu'il est à propos d'expliquer ici pour pouvoir l'appliquer dans des cas moins évidens.

En faisant attention à la position des termes on peut ranger ceux de la formule transformée sur quatre lignes, en sorte que les places correspondent.

$$A \ldots +1(V'-1)1.0(V''-V'-1)1.0 \ldots (V^N-V^{N-1}-1)1.0 \quad = V^N+1 \text{ pl.}$$
$$B \ldots +0(p)1 \quad \ldots \ldots \quad = (p+1) \text{ pl.}$$
$$C \ldots +0(V'-1)0.1(V''-V'-1)1.0 \ldots (V^N-V^{N-1}-1)1.0(p-V^N)1 = (p+1) \text{ pl.}$$
$$D \ldots -(V^N+1)1 \quad \ldots \ldots \quad = (V^N+1) \text{ pl.}$$

Maintenant, pour soustraire D de C, il n'y a qu'à emprunter la premiere unité du terme $(p-V^N)1$ & l'on aura par les principes du calcul

$$C\text{-}D = 1(V'-1)0.1(V''-V'-1)1.0 \ldots (V^N-V^{N-1}-1)100(p-V^N-1)$$
$$\textit{adde} \quad A = 1(V'-1)1.0(V''-V'-1)1.0 \ldots (V^N-V^{N-1}-1)10$$
$$C+A-D = 0(V'-1)0.0(V''-V'-1)1.10 \ldots (V^N-V^{N-1}-2)110(p-V^N-1) = (p+1) \text{ pl.}$$
$$+B = 0.1 \quad \ldots \ldots \quad 1)$$
$$A+B+C-D = 1(V' \quad)1.0(V''-V'-1)10 \ldots (V^N-V^{N-1}-1)10(p-V^N-1)1.1$$
$$= 1(V'-1)1.0(V''-V'-1)10 \ldots (V^N-V^{N-1}-1)10(p-V^N) \quad = (p+1) \text{ pl.}$$

Il est évident que cette nouvelle formule toute positive que nous venons de trouver pour les nombres premiers, en rangeant les termes selon l'indication que donnent les termes négatifs pour la quantité de places à reculer, il est évident, dis-je, que cette formule est celle du grand facteur coupé F, qui dans les nombres premiers est $= F \times f$.

Soit par ex. $V' = 1$, $V'' = 2$, $V''' = 4$, $p = 5$, on a $F = fF = 100101 = 0.3.5 = 41$.

63. Si l'on a dans la formule $V' = 1$, $V'' = 2$, $V''' = 3$ &c. en sorte que toutes les places soient vuides, elle devient

$$1\,(V^N)\,0\,(p - V^N)\,1;$$

mais ayant encore $V^N = p - 1$, la formule deviendra pour le cas du grand facteur vuide

$$1\,(p - 1)\,0.\,1.$$

Ainsi $p = 4$ donne $10001 = 0.4 = 17$.

64. Si dans la formule on pose $V' = 0$, $V'' = 0$ &c. en sorte qu'il n'y ait aucune place vuide, on a le cas du nombre plein dont la formule est $1\,(p)\,1 = (p + 1)\,1$.

65. REMARQUE 3. Si la formule générale §. 62. pour tous les nombres exponentiels premiers, étoit exclusivement applicable à ces nombres, on auroit la solution du probleme sur les nombres premiers. Mais cette formule, comme on voit, peut également convenir à tous les nombres entiers. La seule différence qu'il y a, & qui mérite d'être observée, c'est que les nombres premiers n'admettent que cette formule unique, au lieu que les composés admettront toujours tout au moins encore une des neuf especes que nous avons examinées, & dont il nous reste à trouver la neuvieme.

PROBLEME IX.

66. *Trouver la formule générale du produit de la neuvieme espece, où les deux facteurs sont coupés.*

Cette espece, qui est incomparablement plus étendue que les huit précédentes, & qui les embrasse toutes dans sa généralité, n'a d'ailleurs de difficulté que dans la longueur de l'opération nécessaire pour déterminer sa formule. Mais comme les principes sur lesquels cette opération est fondée, sont exactement les mêmes que nous avons déjà établis, je me dispenserai d'entrer ici dans le détail du calcul.

Il y avoit trois méthodes également sûres pour trouver cette formule; l'une de chercher immédiatement le produit des deux facteurs coupés, en

posant $F = 1(W)10(m + p - V^N)1$, & $f = 1(w)10(m - v^n)1$; ici je mets pour abréger $(W)10$ à la place de $(V' - 1)10(V'' - V' - 1)10 \ldots (V^N - V^{N-1} - 1)10$, & pareillement $(w)10$ à la place de $(v' - 1)10(v'' - v' - 1)10 \ldots \ldots (v^n - v^{n-1} - 1)10$.

La seconde méthode étoit de prendre pour base la formule du produit de la septieme espece, qui a F coupé, & f plein, & d'en soustraire la formule qui exprime la valeur des places vuides du petit facteur.

Enfin, la troisieme méthode c'étoit de chercher la formule des termes déficiens dans les deux facteurs & de la soustraire de celle des facteurs pleins $1(m)0(p)1.0(m)1$, qui est la plus simple de toutes, puisqu'elle n'a que cinq termes. Chacune de ces méthodes donne une formule en apparence différente des deux autres, mais qui par la résolution de cette analyse peuvent toutes être ramenées à une même; la derniere méthode a l'avantage d'être la moins pénible. Je n'en rapporterai ici que les résultats.

I. Si les facteurs n'ont chacun qu'une lacune v, V, cela emporte dans le rhombe des produits partiaux deux séries, l'une horizontale $v \ldots (v + m + p)$, l'autre oblique de haut en bas $V \ldots (V + m)$. Mais comme ces deux séries se coupent à la place $V + v$, cette place ne peut être comptée que pour une. Ainsi la somme qui exprime la valeur de ces deux lacunes est

$$(v)0(V - v)1(v)2.1(m - v)2(v - V + p)1.$$

REMARQUE 1. La subordination entre v & V étant indéterminée ici; il est indifférent lequel des deux nombres on suppose être le plus petit: dans la généralité on ne sauroit éviter les termes négatifs; ainsi j'ai supposé $v < V$; si c'étoit le contraire, cette somme seroit

$$(V)0(v - V)1(V)2.1(m - v)2(v - V + p)1.$$

REMARQUE 2. Par les regles de la résolution, la formule trouvée se réduit aux caractéristiques 1 & 0, & devient

$$(v)0(V - v)1.0(v - 1)1.0(m - v)1(v - V + p)0.1.$$

II. Si chaque facteur contient deux lacunes, il y aura 4 interſections, chaque lacune forme deux nœuds qui avec ſes deux points extrêmes donnent 4 membres, par conſéquent la ſomme des quatre lacunes contiendra 16 membres, ſavoir, en ſuppoſant $v'' \lessdot V'$, & $V' + m \lessdot V''$,

$$(v')\,0\,(v''-v')\,1\,(V'-v'')\,2\,(v')\,3.\,2\,(v''-v'-1)\,3.\,2\,(m-v'')\,3\,(V''-V'-m-1)\,2\,(v)\,3.\,2\,(v''-v'-1)\,3.\,2\,(m-v'')\,3\,(v'+p-V'')\,2\,(v''-v')\,1$$

laquelle ramenée aux coëfficiens ſimples, par l'analyſe de ſituation donne 20 membres, ſavoir:

$$(v')\,0\,(v''-v')\,1.\,0\,(V'-v''-1)\,1.\,0\,(v'-1)\,1.\,0\,(v''-v'-1)\,1.\,0\,(m-v'')\,1\,(V''-V'-m-1)\,0\,(v')\,1.\,0\,(v''-v'-1)\,1.\,0\,(m-v'')\,1\,(v'+p-V'')\,0.\,1\,(v''-v'-1)\,0.\,1.$$

67. III. Si chaque facteur contient trois places vuides, chaque ſérie de la lacune aura 3 nœuds, & avec ſes deux extrémités il y aura cinq variations, & par conſéquent cinq fois ſix membres pour exprimer la ſomme non réduite; laquelle ſera

$$(v')\,0\,(v''-v')\,1\,(v'''-v'')\,2\,(V'-v''')\,3\,(v')\,4.\,3\,(v''-v'-1)\,4.\,3\,(v'''-v''-1)\,4.\,3\,(m-v''')\,4\,(V''-V'-m-1)\,3\,(v')\,4.\,3\,(v''-v'-1)\,4.\,3\,(v'''-v''-1)\,4.\,3\,(m-v''')\,4\,(v'+p-V''')\,3\,(v''-v')\,2\,(v'''-v')\,1.$$

Donc en la réduiſant aux coëfficiens élémentaires 0. 1, elle ſera de 36 membres, ſavoir:

$$(v')\,0\,(v''-v')\,1.\,0\,(v'''-v''-1)\,1.\,0\,(V'-v'''-1)\,1.\,0\,(v'-1)\,1.\,0\,(v''-v'-1)\,1.\,0\,(v'''-v''-1)\,1.\,0\,(m-v''')\,1\,(V''-V'-m-1)\,0\,(v')\,1.\,0\,(v''-v'-1)\,1.\,0\,(v'''-v''-1)\,1.\,0\,(m-v''')\,1\,(V'''-V''-m-1)\,0\,(v')\,1.\,0\,(v''-v'-1)\,1.\,0\,(v''-v''-1)\,1.\,0\,(m-v''')\,1\,(v'+p-V''')\,0.\,1\,(v''-v'-1)\,0.\,1\,(v'''-v''-1)\,0.\,1.$$

D'où l'on voit la loi générale pour v^n & V^N places vuides. La ſomme à retrancher de la formule du produit des facteurs pleins ſera

I°.

I°. $(v')\,0\,(v''-v')\,1.0\,(v'''-v''-1)\,1.0\,\ldots\,(v^n-v^{n-1}-1)\,1.0\,+$

II°. $(V'-v^n-1)\,1.0\,(w)\,1.0\,(m-v^n)\,1\;+$

III°. $(V''-V'-m-1)\,0.1\,(w)\,1.0\,(m-v^n)\,1\;+$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$(V^N-V^{N-1}-m-1)\,0.1\,(w)\,1.0\,(m-v^n)\,1\;+$

IV°. $(v'+p-V^N)\,0.1\,(v''-v'-1)\,0.1\,\ldots\,(v^n-v^{n-1}-1)\,0.1.$

68. REMARQUE. Lorſque le grand facteur a N places vuides, & que le petit facteur en a n, chaque ſérie déficiente oblique a n interſections, & chaque ſérie déficiente horizontale en a N, ce qui, joint aux extrémités, donne $n(N+2)+N(n+2) = 2nN+2N+2n$ variations, ou termes non réduits. Or la formule réduite contient toujours $N+n$ membres de plus qu'elle n'en avoit avant la réduction; on aura donc $2nN + 3N + 3n$ termes à ſouſtraire de la formule des facteurs pleins, qui étant $1\,(m)\,0\,(p)\,1.0\,(m)\,1$, contient cinq termes, dont dans la ſouſtraction les deux extrêmes reſtent; les trois intermédiaires ſe décompoſent en deux membres. Ainſi la formule que nous cherchons devroit toujours contenir $2nN + 3N + 3n + 8$ membres; mais parce que les deux du milieu ſont homogenes, ayant tous deux l'unité pour coëfficient, ils peuvent être réunis en un ſeul, ce qui réduit la formule à $2nN + 3N + 3n + 7$ membres.

THÉOREME GÉNÉRAL XXVII.

69. *S'il manque un nombre quelconque* N *&* n, *de termes aux facteurs* F *&* f, *exprimés par les quantités exponentielles, la formule générale du produit ſera repréſentée par les* 2nN + 3N + 3n + 7 *termes ſucceſſifs qui ſuivent:*

$I^{\circ}.$ $1\,(w)\,0.1\,(V'-v^{n}-1)\,0 \;+$

$II^{\circ}.$ $1\,(w)\,0.1\,(m-V'-v^{n})\,0\,(V')\,1.0 \;+$

$III^{\circ}.$ $(V''-V'-m-2)\,1.0\,(w)\,0.1\,(m-v^{n})\,0 \;+$

$(V'''-V''-m-1)\,1.0\,(w)\,0.1\,(m-v^{n})\,0 \;+$

$\vdots \qquad \vdots$

$(V^{N}-V^{N-1}-m-1)\,1.0\,(w)\,0.1\,(m-v^{n})\,0 \;+$

$IV^{\circ}.$ $(p-V^{N})\,1.0\,(w)\,1.0\,(m-v^{n})\,1.$

Ce Théoreme n'eſt que l'énoncé du reſte que donne la ſouſtraction, lorſque de $1\,(m)\,0\,(p)\,1.0\,(m)\,1$, on ſouſtrait la valeur des lacunes trouvée (§. 67.)

Exemples.

Soit $N=1$, $n=1$, $V'=1$, $v'=3$, $m=4$, $p=1$, la formule donne $1001-(3).0.100110-(1)\,1.01101$

$$\left.\begin{matrix} = 1001 \\ +\;100110 \\ +\;01101 \\ -\;1 \end{matrix}\right\} = 1101111010 = 0.1.3.4.5.6.8.10$$

$= (0.2.3.4.5)\,(0.1.2.4) = 1403.$

Soit $N=2$, $n=2$, $V'=1$, $V''=4$, $v'=1$, $v''=3$, $m=5$, $p=1$, la formule donne après la réduction 1000100101101 $= 0.4.7.9.10.12 = (0.2.3.5.6)\,(0.2.4.5) = 5777.$

Soit $N=3$, $n=3$, $V'=1$, $V''=3$, $V'''=6$, $v'=2$, $v''=3$, $v'''=5$, $m=6$, $p=1$, la formule donne $1.0.1101$ $-(5)\,0.10110110\,(-6)\,1.00.11010\,(-4)\,1.0.011010\,(-5)\,1.$ $0100101 = 11110101010111 = 0.1.2.3.5.7.9.11.12.13$ $= (0.2.4.5.7)\,(0.1.4.6) = 15023.$

Soit $N = 5$, $n = 5$, $v' = 2$, $v'' = 3$, $v''' = 4$, $v^{iv} = 5$, $v^{v} = 6$, $V' = 1$, $V'' = 3$, $V''' = 4$, $V^{iv} = 6$, $V^{v} = 7$, $m = 7$, $p = 1$, la formule générale donne 1011111 (—6)0. 101111110(—7)1.00111110(—7)100111110(—6)1.0 0111110(—7)1.00111110(—6)101000001 = 1111011 1101001 = 0.1.2.3.5.6.7.8.10.12.15 = (0.2.5.8)(0.1.7) = 38381.

PROBLEME X.

70. *Trouver l'arrangement le plus ſimple de la formule générale du produit* §. 69.

Comme il n'eſt pas poſſible d'en faire une formule toute ſimple & intuitive, telles que ſont les ſix formules des ſix premieres eſpeces, il ne reſte qu'à la réduire en ſéries additives & ſouſtractives, en ſorte que les places correſpondent; en faiſant reculer les termes poſitifs d'autant de places, que le terme négatif qui précede en indique.

Par cette méthode on aura, en ſe rappellant que $(w)\,1.0 = v^n$ places, & en poſant pour ménager le terrain les premiers termes $1\,(w)\,0.1\,(V' — v^n — 1)\,0.1\,(w)\,0.1 = a$, ce qui équivaut aux $(V' + v^n + 1)$ premieres places,

A . . : . . . . . $= + a(m — V' — v^n)\,0\,(V')\,1.0\,(V'' — V' — 1) = (m + V'' + 1$ places.
B recule de $(m+1)1$ pl. $= + (V'')\,0 \quad 0(w)0.1(m - v^n)0(V''' - V'' - 1)\,1 = (m + V''')$ places.
C recule de $(m)1$ pl. $= + (V''')\,0 \quad 0(w)0.1(m — v^n)0(V^{iv} - V''' - 1)\,1 = (m + V^{iv})$ places:

. .

. .

. .

D recule de $(m)1$ pl. $= + (V^{N-1})0 \quad 0(w)0.1 \quad (m — v^n)0(V^N - V^{N-1} - 1) = (m + V^N)$ places.
E recule de $(m)1$ pl. $= + (V^N)0$ . . . . $0(w)0.1 \quad (m — v^n)\,0\,(p)\,1 = m + p + V^N + 1$
F recule de (V^N) pl. $= + (p + m + 1)0.0(w)1.0(m - v^n)1 = (2m + p + 2)$ places.

Or en décompofant le terme $(m - V' - v^n)0$, de la férie A, pour faire l'addition de B, on aura:

$$\begin{array}{r|l}
A = +a(V''-V'-v^n-1)0 & (m-V''+1)0\ (V')\ 1\quad 0\quad (V''-V'-1)1 \\
B = +(\ \ldots\ V'')\qquad 0 & 0\ (w)\quad 0\quad 1\ (m\qquad - \qquad v^n)0\ \ (V'''-V''-1)1. \\
\hline
A+B = \ a(V''-V'-v^n-1)0 & 0\ (w)\quad 0\quad 1\,(m-V''-v^n)0(V')1.0(V''-V'-1)1.\ (V'''-V''-1)1. \\
\text{d'où ôtant } (m+1)1 = - & 1\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 1 \\
\hline
\text{1. refte} = \ a(V''-V'-v^n-1)0 & 1\ (w)\quad 0\quad 1\,(m-V''-v^n)0(V')1.0(V''-V'-1)1.0(V'''-V''-2)1.
\end{array}$$

Pofant de nouveau pour abréger $(V'' - V' - v^n - 1)0.1(w)0.1 = b = (V'' - V')$ places, & décompofant le terme $(m - V''' - v^n)0$ pour faire l'addition de C, on aura

$$\begin{array}{r|l}
A+B-m-1 = +a+b(V'''-V''-v^n-1)0 & (m-V'''+1)0(V')1.0(V''-V'-1)1.0(V'''-V''-1)1 \\
+C = +(V'''\qquad)0 & 0\ (w)\ 0\ 1\qquad (m\quad - \quad v^n)0\ \ (V^{IV}-V'''-1)1. \\
-m = \ .\ .\ .\ .\ .\ - & 1\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 1 \\
\hline
\text{2}^{\text{d}}\text{. refte} = a+b(V'''-V''-v^n-1)0 & 1\ (w)\ 0\ 1\,(m-V'''-v^n)0(V')1.0(V''-V'-1)1.0(V'''-V''-1)1.0(V^{IV}-V'''-2)1.
\end{array}$$

En procédant de même, & pofant $(V''' - V'' - v^n - 1)0.1(w)0.1 = c = (V''' - V'')$ places, on aura le troifieme refte:

$$= a + b + c(V^{IV} - V''' - v^n - 1)0.1(w)0.1(m - V^{IV} - v^n)0\ (V')1.0(V'' - V' - 1)1.0\ \ldots\ (V^{IV} - V''' - 1)1.0\ (V^{V} - V^{IV} - 2)1.$$

& par la même raifon, après avoir ajouté enfemble toutes les féries pofitives jufqu'à E inclufivement, & avoir fouftrait tous les termes négatifs $(-m)1$, le refte fera

$$= a + b + \ldots + e(m - V^N - v^n)0(V')1.0(V'' - V' - 1)1.0\ \ldots\ (V^N - V^{N-1} - 1)0.1(p - 1)1.$$

& décompofant le terme $(V')1.0$, pour pouvoir fouftraire $(V^N)1$, & ajouter la derniere férie F, on a

$$\begin{array}{r|l}
\ldots E = +a+b+\ldots e(m-V^N-v^n)0(p)1 & (V'-p)1.0(V''-V'-1)1.0\ \ldots\ (V^N-V^{N-1}-1.0(p-1) \\
F = +(m\quad +p\qquad +1)0 & 0\ (w)\ 1.0\qquad (m\quad - \quad v^n\quad)\quad 1 \\
-(V^N 1) = \ .\ .\ .\ .\ .\ - & 1\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 1 \\
\hline
\ldots F = +a+b+\ldots e(m-V^N-v^n)0(p)1.0(w)1.0 & (V'-p-v^n-1)1.0(V''-V'-1)1.0\ldots(V^N-V^{N-1}-1)1.0(p+m-V^N)1
\end{array}$$

Ainſi en remettant les valeurs de $a, b, c \ldots e$, la formule générale ſera transformée en celle-ci; qui n'a plus qu'un ſeul terme négatif dont le coëfficient ne ſoit pas $= 0$, ſavoir le terme $(V' - p - v^n - 1)\,1$:

$$1(w)0.1(V' - v^n - 1)0.1(w)0.1(V'' - V' - v^n - 1)0.1 \\ (w)0.1 \ldots (V^N - V^{N-1} - 1)0.1(w)0.1(m - V^N - v^n)0 \\ (p)1.0(w)1.0(V' - p - v^n - 1)1.0(V'' - V' - 1)1.0 \ldots \\ \ldots (V^N - V^{N-1} - 1)1.0(p + m - V^N)1$$

formule qui embraſſe $2m + p + 2$ places.

71. Cette nouvelle formule étant de nouveau diſpoſée ſelon les regles de l'addition donne les ſéries ſuivantes:

A	$= + 1(w)0.1$	$= (v^n + 1)$ places.
B recule de $(v^n + 1)$ pl.	$= + (V')0.1(w)0.1$	$= (V' + v^n + 1)$ pl.
C recule de $(V' + v^n + 1)$ pl.	$= + (V'')0.1(w)0.1$ . . .	$= (V'' + v^n + 1)$ pl.
.	.	
.	.	
.	.	
D recule de $(V^{N-1} + v^n + 1)$ pl.	$= + (V^N)0.1(w)0.1$: : :	$= (V^N + v^n + 1)$ pl.
E recule de $(V^N + v^n)$ pl.	$= + *(m)0(p)1.0(w)1.0$ . . .	$= (p + m + v^n + 2)$ pl.
F recule de $(p + v^n)$ pl.	$= + *(m)0*(W)1.0(p + m - V^N)1$ . .	$(2m + p + 2)$ pl.
G recule de $(m + 2)$ pl.	$= - *(m)0*(p + v^n)1$	$(p + v^n + m + 2)$ pl.

Or quoique F contienne évidemment au moins une place de plus que la ſérie ſouſtractive G, puiſqu'on a toujours $m > v^n$, on ne ſauroit néanmoins dans la généralité ſouſtraire G de F, ſans ramener des termes négatifs, parce que le rapport de m à v^n eſt indéterminé; il faut donc prêter à E une unité au bout de la ſérie E, c. à d. ajouter à E les termes $(p + m + v^n + 2)\,0.1$, & l'on aura

$$\begin{array}{rcl} + E + 1 & = & + (m + 1)0(p\quad)1.0(w)1.0.1 \\ - G & = & - (m + 1)0.0\,1 \ldots \ldots 1 \\ \hline E + 1 - G & = & + (m + 1)0.1(p - 1)0.1(w)1.0. \end{array}$$

Ainsi la formule générale réduite aux plus simples termes, aura autant de séries toutes positives à additionner que le grand facteur contient de places vuides, & trois au-delà, & il n'y aura qu'une seule unité à soustraire de toute la somme, savoir à la place $p + m + v^n + 3$.

La formule sera donc:

$$
\begin{array}{llll}
A & \ldots & = + & 1(w)0.1 \\
B & \ldots & = + & (V')0.1(w)0.1 \\
C & \ldots & = + & (V'')0.1(w)0.1 \\
\vdots & & & \vdots \\
D & \ldots & = + & (V^N)0.1(w)0.1 \\
E & \ldots & = + & (m+1)0.1(p-1)0.1(w)1.0 \\
F & \ldots & = + & (m+2)0(W)1.0(m+p-V^N)1 \\
G & \ldots & = - & (m+p+v^n+2)0.1.
\end{array}
$$

Soit par ex. $V' = 1$, $V'' = 6$, $V''' = 8$, $v' = 1$, $v'' = 3$, $v''' = 6$, $m = 7$, $p = 2$, la formule donne

$$
\begin{array}{lll}
A & = + & 1101001 \\
B & = + & 01101001 \\
C & = + & 0000001101001 \\
D & = + & 000000001101001 \\
E & = + & 000000000101010110 \\
F & = + & 00000000000111110101 \\
\hline
 & = + & 12111022222231220 1 \\
G & = - & 0000000000000000001 \\
\hline
 & = + & 1000010111110111 1
\end{array}
$$

$= 0.5.7.8.9.10.11.13.14.15.16 = (0.2.3.4.5.7.9)(0.2.4.5.7) = 126881.$

PROBLEME XI.

72. *Déduire de la formule générale Art. 70. les formules des huit especes de produits particulieres, trouvées dans les recherches précédentes.*

Ce Probleme doit servir à montrer l'usage & l'application des regles de l'analyse de situation dans notre algorithme. Nous allons d'abord établir les principes qui doivent diriger l'opération.

I. Principe. Lorsqu'une lacune quelconque V^x, ou v^x est supposée ne pas exister, tout terme de la formule où cette quantité V^x, v^x entroit positivement, non seulement évanouit, mais encore l'unité ou le zéro qui suit ce terme disparoit, & même toute la série de termes qui étoit amenée par cette lacune.

La raison en est que chaque place vuide V^x, ou v^x forme une lacune d'une suite continue de places, qui s'entrecoupent par des nœuds, & que tout terme où cette quantité V, ou v entre positivement, doit son existence à cette place vuide; & la suppose; lors donc que la lacune n'existe pas, les termes qu'elle auroit produits & les nœuds qui l'auroient accompagnée sont nuls.

II. Principe. Mais si la quantité V^x, v^x, qu'on suppose nulle, n'entre que négativement dans un terme de la formule, elle n'anéantit pas ce terme; ni le passage ou le nœud, 1 ou 0, qui le suit; cette quantité cesse simplement d'avoir une valeur.

C'est que dans ce cas, le terme ne doit pas son origine à la place vuide V^x, ou v^x, & par conséquent n'évanouit pas avec elle.

III. Principe. Quand un terme contient plus de quantités négatives, que de positives, cela indique que les termes positifs qui suivent celui-là doivent être reculés sous les positifs précédens, d'autant de places qu'en contiennent les quantités négatives, & qu'il faut ajouter ensemble les nombres qui coïncident dans une même place; selon les regles de l'addition exponentielle. C'est là toute l'opération qu'il y a à faire lorsque la caractéristique du terme négatif est 0; mais si cette caractéristique est 1, il faut après l'addition soustraire une unité de chaque place qui a été doublée.

Au reſte il eſt indifférent, & l'on peut choiſir ſelon les occurrences ce qui ſera le plus commode, ou de placer les quantités poſitives renfermées dans le terme négatif, avant, ou après les négatives, ou auſſi de les en ſouſtraire; par le principe ſuivant.

IV. Principe. Pour faciliter l'addition & la ſouſtraction des termes, on peut décompoſer à volonté les diverſes quantités contenues ſous un même terme, c'eſt à dire qui ſe ſuivent ſans nœud, ou qui conſervent la même caractériſtique; pourvû que le nombre des places reſte le même. Ainſi

$$(V''' - V'' - m)\,1 = (-V'')\,1\,(V''' - m)\,1 = (-V'' - m)\,1\,(V''')\,1$$
$$= (V''')\,1\,(-V'' - m)\,1,$$

ainſi $(m)\,1 = 1\,(V' - 1)\,1\,(m - V')\,1 = 1\,(V' - 1)\,1\,(V'' - V' - 1)\,1$
$$(m - V'' + 1) \text{ \&c.}$$

Cela poſé, il ſera aiſé d'appliquer la formule générale réduite §. 70, aux diverſes eſpeces de facteurs.

I. ESPECE.

$$F = 2^{m+p+1} - 1; \qquad f = 2^{m+1} - 1.$$

Comme on a ici w & W nuls, les ſéries reſtantes ſont:

$$\left.\begin{array}{l} A \ldots = +1 \\ E \ldots = +0(m)0.1(p-1)0.1 \\ F \ldots = +0(m)0.0(p-1)1(m+1)1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = 1(m)0.1(p-1)1.0(m)0.1 \\ -0(m)0.0(p-1)0.0.1 \end{array}$$
$$G \ldots = -0(m)0.0(p-1)0.0.1 \qquad = 1(m)0\,(p\qquad)1.0(m)1.$$

Ce qui eſt la même formule que nous avons trouvée. Probl. I. §. 30.

II. ESPECE.

$$F = 2^{m+p} + 1; \qquad f = 2^{m} + 1.$$

L'on a ici $(w)\,1.0 = (m-1)\,0$ & $(W)\,1.0 = (m+p-1)\,0$. Pareillement $(w)\,0.1 = (m-1)\,1$ & $(W)\,0.1 = (m+p-1)\,1$. Et d'ailleurs on a toujours $(w)\,0.1 = v^{n}$ places, & $(W)\,0.1 = V^{N}$ places.

Ainſi

Ainsi la formule réduite §. 70. donne dans cette espece; puisqu'on a $v' = 1$, $v'' = 2$ . . . . . $v^{\nu} = m - 1$, $V' = 1$, $V'' = 2$, $V^N = m + p - 1$,

$$
\begin{array}{llll}
A & \ldots & = + & 1\,(m-1)\,1 \\
B & \ldots & = + & 0.1\,(m-1)\,1 \\
C & \ldots & = + & 0.0.1\,(m-1)\,1 \\
\cdot & & & \cdot \\
\cdot & & & \cdot \\
\cdot & & & \cdot \\
D & \ldots & = + & (m+p-1)\,0.1\,(m-1)\,1 \\
E & \ldots & = + & (m+1)\,0.1\,(p-1)\,0.1\,(m-1)\,0 \\
F & \ldots & = + & (m+2)\,0\;(m+p-1)\,0.1 \\
G & \ldots & = - & (2m+p+1)\,0.1.
\end{array}
$$

Or les séries $A \ldots D$ forment un lozange, dont la somme est, par le Probl. I, $= 1\,(m')\,0\,(p')\,1.0\,(m')\,1$, & l'on a ici $m' = m + p - 1$, & $p' = -p$, donc on a

$$
\begin{array}{rl}
A+B+C+\ldots+D = & +1\,(m+p-1)\,0\,(-p)\,1.0\,(m+p-1)\,1 \\
= & 1\,(m-1)\,0\,(p\quad)\,0 \\
& \qquad +\,0\;(p-1)\,1\;(m\quad)\,1 \\
& \qquad -\,(\;p\quad)\,1 \\
\hline
\text{donc } A \ldots D = + & 1(m-1)0(\;p\quad)1.0(m-1)1 \\
+\,E = + & 0(m-1)0.0.1(p-2)0.0.1(m-1)0 \\
\hline
A \ldots E = + & 1(m-1)0.1\;(p-1)0.1(m-1)0.1 \\
+\,F = + & 0(m-1)0\;0.0(p-2)0.0(m-1)0.0.1 \\
\hline
A \ldots F = + & 1(m-1)0.1\;(\,p-1)0.1(m-1)0.1.1 \\
-\,G = - & 0(m-1)0\;(\;p\quad)0\;(m\quad)0.0.1 \\
\hline
\text{donc } A \ldots G = & 1(m-1)0.1\;(\,p-1)0.1(m-1)0.1.
\end{array}
$$

C'est la même formule que nous avons trouvée Probl. II. §. 37.

III. Espece.

$$F = 2^{m+p+1} - 1; \qquad f = 2^{m} + 1.$$

Ici on a $W = 0$. $(w)1.0 = (m-1)0$; $(w)0.1 = (m-1)1$,
la formule générale donne

$$\begin{array}{llll}
A & \ldots & = + & 1(m-1)1 \\
E & \ldots & = + & (m+1)\; 0.1(p-1)0.1(m-1)0 \\
F & \ldots & = + & (m+2)\; 0(p+m)\; 1 \\
G & \ldots & = - & (2m+p+1)0.1.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\text{donc on a}\quad A + E & = + & (m)1.0.1(p-1)0.1 \\
F & = + & (m)0.0.0(p-1)1.1(m)1 \\
\hline
A + E + F & = + & (m)1.0\;(p)1.0(m)0.1 \\
-\,G & = - & (m)0.0\;(p)0\;(m)0.1 \\
\hline
\text{formule} & = & (m)1.0\;(p)1\;(m)0.1
\end{array}$$

comme au Probl. III. §. 41.

IV. Espece.

$$F = 2^{m+p} + 1, \qquad f = 2^{m+1} - 1.$$

Ici l'on a $(W)1.0 = (m+p-1)0$, $(W)0.1 = (m+p-1)1$,
$w = 0$, $V' = 1$. $V'' = 2 \ldots V^{N} = m + p - 1$.

Ainsi la formule générale donne

$$\begin{array}{lll}
A & = + & 1 \\
B & = + & 01 \\
C & = + & 001 \\
\cdot & & \cdot \\
\vdots & & \cdot \\
D & = + & (m+p-1)0.1 \\
E & = + & (m+1)0.1(p-1)0.1 \\
F & = + & (m+2)0(m+p-1)0.1 \\
G & = - & (m+p+2)0.1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{Ainsi } A \ldots D = +(m+p)1 = & (m+1)1.1(p-2)1 \\
+\; E = + \ldots\ldots & (m+1)0.1(p-2)0.0.1 \\ \hline
A \ldots\ldots E = & +(m+1)1.0(p-2)0.1.1 \\
F = & +(m+1)0.0(p-2)0.0.0(m-1)0.1 \\ \hline
A \ldots\ldots F = & +(m+1)1\,(p-1)0.1.1(m-1)0.1 \\
-\; G = & -(m+1)0\,(p-1)0.0.0\,1 \\ \hline
\text{somme} = & (m+1)1\,(p-1)0.1.1(m-1)1 \\
= & (m+1)1\,(p-1)0\,(m+1)1
\end{array}$$

comme Probl. IV. §. 44.

V. ESPECE.

$$F = 2^{m+p+1} - 1; \quad f = 2^{0} + 2^{a} + 2^{b} + \ldots + 2^{m}.$$

Ici w est indéterminé, & W est nul; ainsi la formule donne

$$\begin{array}{lcl}
A \;\ldots & = & +\; 1(w)0.1 \\
E \;\ldots & = & +\; (m+1)0.1(p-1)0.1(w)1.0 \\
F \;\ldots & = & +\; (m+2)0(m+p)1 \\
G \;\ldots & = & -\; (m+p+v^{n}+2)0.1
\end{array}$$

& puisque $(w)0.1$ contient v^{n} places, & que $v^{n} < m$, on a

$$\begin{array}{rl}
A+E = & 1(w)0.1(m-v^{n})0.1(p-1)0.1(w)1.0 \\
+F = & (m+2)0(p-1)1.1(m)1 \\ \hline
\text{donc } A+E+F = & 1(w)0.1(m-v^{n})0(p)1.0(w)1.0(m-v^{n})0.1 \\
-G = & (m+1)0(p)0.0(v^{n})0.1 \\ \hline
\text{somme} = & 1(w)0.1(m-v^{n})0(p)1.0(w)1.0(m-v^{n})1
\end{array}$$

comme Probl. V. §. 49.

REMARQUE. Pour s'assurer qu'en ajoutant F à $A+E$, on a $\left.\begin{array}{l} +\;1(w)1.0 \\ +\;1(m)1 \end{array}\right\} = 0(w)1.0(m-v^{n})0.1$, il n'y a qu'à décomposer les deux sommes, & l'on aura

$$+1(w)1.0 = 1(v'-1)1.0(v''-v'-1)1.0\ldots.(v^n-v^{n-1}-1)1.0$$
$$+1(m)\ 1 = 1(v'-1)1.1(v''-v'-1)1.1\ldots.(v^n-v^{n-1}-1)1.1(m-v^n)1$$
$$= 0(v'-1)1.0(v''-v'-1)1.0\ldots.(v^n-v^{n-1}-1)1.0(m-v^n)0.1$$

VI. ESPECE.

$$F = 2^{m+1}+1, \quad f = 2^0+2^a+2^b+\ldots+2^m.$$

Ici l'on a $V' = 1$, $V'' = 2$, $V^{N} = m+p-1$, donc $(W)1.0 = (m+p-1)0$, & $(W)0.1 = (m+p-1)1$; w reſte indéterminé:

La formule générale donne:

$A \ldots = + 1(w)0.1$
$B \ldots = + 0.1(w)0.1$
$C \ldots = - 0.0.1(w)0.1$
. .
. .
$D \ldots = + (m+p-1)0.1(w)0.1$
$E \ldots = + (m+1)0.1(p-1)0.1(w)1.0$
$F \ldots = + (m+2)0(W)1.0.1$
$G \ldots = - (m+p+v^n+2)0.1$

Ici le lozange AD donneroit par le premier Probleme la ſomme $1(m')0(p')1.0(m')1$, s'il n'y avoit point de lacune, & l'on a ici $m' = (w)**(m-v^n)$ & $p' = p-1$. Mais comme lorſque le lozange eſt plein on a dans $(m)0$ toutes les places vuides, il faut réciproquement que les places vuides deviennent ici pleines; ainſi $(m')0 = (w)1.0(m-v^n)1$, & $(m')1 = (w)0.1(m-v^n)0$, & l'on a par conſéquent

$$
\begin{array}{rl}
A\ldots D & = +1(w)1.0(m-v^n)1\ (p-1)1.0(w)0.1\ (m-v^n)0. \\
+E & = +(\ m\ +1)0.1(p-2)0.0.1(w)1.0 \\
\hline
 & = +1(w)1.0(m-v^n)1\ (p-1)0.1(w)1.0.1(m-v^n-1)0 \\
+F & = +(m\ +\ 1)0\ (p-1)0.0(\ m\ )0.1. \\
\hline
 & = +1(w)1.0(m-v^n)1\ (p-1)0.1(w)1.0.1(m-v^n-1)0.1. \\
-G & = -(\ m+1\ )0\ (p-1)0.0(v^n)0.0.1 \\
\hline
\text{fomme} & = \ 1(w)1.0(m-v^n)1\ (p-1)0.1(w)1.0\ (m-v^n)1.
\end{array}
$$

REMARQUE. Dans l'addition de E avec $A\ldots D$ nous pofons $\left.\begin{array}{l} +\ (w)\,0.\,1\,(m-v^n)\,0 \\ +\ 1\,(w)\,1.\,0 \end{array}\right\} = (w)\,1.\,0.\,1\,(m-v^n-1)\,0$, parce qu'en développant ces termes on a

$$
\begin{array}{l}
+(v'-1)0.1\ (v''-v'-1)0.1\ldots(v^n-v^{n-1}-1)0.1(m-v^n)\,0 \\
+1(v'-2)1.1.0(v''-v'-2)1.1.0\ldots0(v^n-v^{n-1}-2)1.1.0 \\
\hline
=1(v'-2)1.0.1(v''-v'-2)1.0.1\ldots1(v^n-v^{n-1}-2)1.0.1(m-v^n-1)0. \\
=(v'-1)1.0\ (v''-v'-1)1.0\ldots(v^n-v^{n-1}-1)1.0.1(m-v^n-1)0.
\end{array}
$$

VII. ESPECE.

$$F = 2^0 + 2^a + 2^b + \ldots + 2^{m+p}, \qquad f = 2^{m+1} - 1.$$

Ici l'on a w nul, & W indéterminé; la formule générale donne donc

$$
\begin{array}{llll}
A & \ldots & = + & 1 \\
B & \ldots & = + & (V)\,0.\,1 \\
C & \ldots & = + & (V'')\,0.\,1 \\
\cdot & & & \cdot \\
\cdot & & & \cdot \\
D & \ldots & = + & (V^N)\,0.\,1 \\
E & \ldots & = + & (m+1)\,0.\,1\,(p-1)\,0.\,1 \\
F & \ldots & = + & (m+2)\,0\,(W)\,1.\,0\,(m+p-V^N)\,1. \\
G & \ldots & = - & (m+p+2)\,0.\,1
\end{array}
$$

Donc

$A \ldots D = +1(W)0.1$

$+E = +(V^N+1)0(m-V^N)0.1(p-1)0.1$

$A \ldots E = 1(W)0.1(m-V^N)0.1(p-1)0.1$

$+F = +(m+2)0(W)1.0\ (m+p-V^N)1$

$= +1(W)0.1(m-V^N)0.1(p-1)1.0(V'-p-1)0.1(V''-V'-1)1.0 \ldots (m+p-V^N)1$

$-G = -(m+2)0(p-1)0.0.1$

somme $= 1(W)0.1(m-V^N)0\ (p\ )1.0(V'-p-1)1.0(V''-V'-1)1.0 \ldots (m+p-V^N)1$

comme §. 55. & 56.

REMARQUE. Dans l'addition de F à $A \ldots E$ ayant à ajouter

$+(p-1)0.1$ on a $+(p-1)0.1$

$+(W)0.1(m+p-V^N)1$ $\quad +(V'-1)1.0(V''-V'-1)1.0 \ldots (m+p-V^N)1.$

& décompofant

$$\left.\begin{array}{l} +(p-1)0.1 \\ +(p-1)1.1(V'-p-1)1.0 \text{ \&c.} \end{array}\right\} = (p-1)1.0(V'-p-1)0.1 \text{ \&c.}$$

VIII. ESPECE.

$$F = 2^0 + 2^a + 2^b + \ldots + 2^{m+p}, \qquad f = 2^m + 1.$$

Ici l'on a W indéterminé, & $v' = 1$, $v'' = 2 \ldots v^N = m-1$; donc $(w)1.0 = (m-1)0$, & $(w)0.1 = (m-1)1$. Ainfi la formule générale donne

$A \ldots = +1(m-1)1$

$B \ldots = +(V')0.1(m-1)1$

$C \ldots = +(V'')0.1(m-1)1$

.

.

$D \ldots = +(V^N)0.1(m-1)1$

$E \ldots = +(m+1)0.1(p-1)0.1(m-1)0$

$F \ldots = +(m+2)0(W)1.0(m+p-V^N)1$

$G \ldots = -(2m+p+1)0.1$

Or en décompoſant les termes pour faciliter l'addition, on trouve

$$A+B=1(V'-1)1.0(m-V'-1)1(V')0.1$$

$$A+B+C=1(V'-1)1.0(V''-V'-1)1.0(m-V''-1)1(V')0.1(V''-V'-1)0.1.$$

donc enfin $A\ldots D = 1(W)1.0(m-V^N-1)1.0(W)0.1$

& continuant l'addition

$$\begin{array}{l} A\ldots D=+1(W)1.0(m-V^N-1)1.0(W)0.1 \\ \quad +E=+(m \quad + \quad 1 \qquad)0.1(p-1)0.1(m-1)0 \\ \hline A\ldots E=+1(W)1.0(m-V^N-1)1.0.1(p-1)0.1(V'-p-2)0.1(V''-V'-1)0.1\ldots \\ \quad +F=+(\quad + \quad 2 \qquad)0(W)1.0(m+p-V^N)1 \\ \hline A\ldots F=+1(W)1.0(m-V^N-1)1.0(p \quad)1(V'-p-1)0.1(V''-V'-1)1.0.1\ldots1(m+p-V^N)1 \\ \quad +G=-(m \quad +p+2 \ldots\ldots\ldots)0.1 \\ \hline \text{ſomme}=1(W)1.0(m-V^N-1)1.0(p)1(V'-p-1)0(V''-V')1.0(V''-V'-1)1.0\ldots(m+p-V^N)1 \end{array}$$

ce qui eſt la même formule que nous avons trouvée Probleme VIII. §. 57. & 58.

REMARQUE 1. Dans l'addition de E avec $A\ldots D$ ayant à ajouter $+(W)0.1$
$+1(p-1)0.1(m-1)0$, on a

$$\begin{array}{ll} (W)0.1 & =(V'-1)0.1(V''-V'-1)0.1\ldots \\ 1(p-1)0.1 & =1(p-1)0.1 \\ \hline & =1(p-1)0.1(V'-p-2)0.1(V''-V'-1)0.1\ldots \end{array}$$

REMARQUE 2. Dans l'addition de F avec $A\ldots E$ ayant à ajouter $(p-1)0.1(V'-p-2)0.1(V''-V'-1)0.1\ldots$ avec $(W)1.0(m+p-V^N)1$, on a

$$\begin{array}{l} +1(p-1)0.1(V'-p-2)0.1(V''-V'-1)0.1 \quad \ldots \quad (V^N-V^{N-1}-1)0.1 \\ +(V'-1 \qquad\qquad)1.0(V''-V'-1)1.0 \quad \ldots \quad 0(V^N-V^{N-1}-1)1.0(m+p-V^N)1 \\ \hline =1(p-1)1.0(V'-p-2)0.1.1(V''-V'-2)1.0.1 \quad \ldots \quad 1(V^N-V^{N-1}-2)1.0.1(m+p-V^N)1 \\ =(p \quad)1(V'-p-1)0(V''-V' \quad)1.0(V'''-V''-1)1.0\ldots(V^N-V^{N-1}-1)1.0.1(m+p-V^N)1 \end{array}$$

THÉOREME XXVIII.

73. *Tout nombre composé dont le plus grand facteur est, ou de la forme* $2^n + 1$, *ou de la forme* $2^n - 1$, *peut être reconnu intuitivement, en l'exprimant selon l'arithmétique binaire; & la simple inspection indiquera ses deux facteurs.*

Ce Théoreme n'est que le résumé des Problemes précédens, où nous avons vû que les produits des six premieres especes peuvent être représentés par une formule simple & intuitive; voyez l'Art. 54.

74. REMARQUE. S'il étoit possible de faire évanouir les termes négatifs des formules des trois dernieres especes de produits, & de réduire par l'addition chacune de ces trois formules à une seule série, il n'y auroit point de nombre dont à la simple inspection on ne pût connoître s'il est premier ou composé, & dans ce dernier cas quels sont ses deux facteurs. Mais jusqu'ici tout ce que notre analyse permet c'est d'en faire évanouir la série négative, comme le Probleme suivant en indiquera la méthode.

PROBLEME XII.

75. *Faire évanouir la série négative de la formule générale des produits* §. 70. *& la simplifier.*

Il est aisé de voir par la nature de ce calcul, que la formule intuitive des facteurs coupés est $F = 1\,(W)\,1.0\,(m + p - V^N)\,1$, & $f = 1\,(w)\,1.0\,(m - v^n)\,1$. Si donc on nomme R & r le nombre inverse de F & de f, c'est à dire le nombre qui ayant la même quantité de places, a dans chacune la caractéristique opposée à celle que F & f ont à la même place, il est clair qu'on aura $R = 0\,(W)\,0.1\,(m + p - V^N)\,0$, & $r = 0\,(w)\,0.1\,(m - v^n)\,0$.

Or lorsque R, ou r, ne seront point suivis d'autres termes qui ayent la caractéristique 1, on peut négliger les termes $(m + p - V^N)0$, & $(m - v^n)\,0$, qui n'indiquant que des places vuides n'ajoutent rien à la somme totale lorsqu'ils ne sont suivis d'aucune place remplie; on peut donc

en

en ce cas-là mettre indifféremment R, pour $0(W)0.1$, & r, pour $0(w)0.1$.

Cela posé, la formule générale trouvée §. 70. se peut changer en celle-ci:

$$
\begin{array}{llll}
A & \ldots & = + & \frac{1}{r} \\
B & \ldots & = + & (V')0.\frac{1}{r} \\
\cdot & & & \cdot \\
\cdot & & & \cdot \\
D & \ldots & = + & (V^N)0.\frac{1}{r} \\
E & \ldots & = + & (m+1)0.1(p-1)0.1(w)1.0 \\
F & \ldots & = + & (m+2)0(W)1.0(m+p-V^N)1 \\
G & \ldots & = - & (m+p+v^n+2)0.1.
\end{array}
$$

Or en permutant les premiers termes de E & F, qui contiennent chacun $m + 2$ places; on aura $E = (m + p + 1)0.1(w)1.0$, & $F = (m + 1)0.F$.

Ensuite la somme des termes $B \ldots D = 0(V' - 1)0.1$ $(V'' - V' - 1)0.1 \ldots\ldots (V^N - V^{N-1} - 1)0$, est $= 0(W)0.1 = R$. Or R contient autant de places que F, c. à d. $m + p + 1$ places; on peut donc transposer R dans les $m + p + 1$ premieres places vuides de la nouvelle série E, qui devient $E = R.f$.

Pareillement le terme r de la série A contenant $m + 1$ places peut être transféré, aux mêmes places vuides de la nouvelle série F, qui devient $F = r.F$.

Ainſi la formule abrégée ſera:

$$\begin{array}{llll} A & \ldots & = & +\ 1 \\ B & \ldots & = & +\ (V')\circ.r \\ . & & & . \\ . & & & . \\ D & \ldots & = & +\ (V^N)\circ.r \\ E & \ldots & = & +\ R.f \\ F & \ldots & = & +\ r.F \\ G & \ldots & = & -\ (2m+p+2)\circ.1. \end{array}$$

Or le nombre total des places d'un produit quelconque Ff ne peut jamais aller au-delà de $2m + p + 2$, comme nous le prouverons ci-deſſous; & tel eſt exactement le nombre des féries E & F, qui toutes deux finiſſent néceſſairement par l'unité (c. à d. par le plus grand expoſant de chaque facteur); en portant donc ces deux unités à la place ſuivante $2m + p + 3$, elles y valent préciſément l'unité ſouſtractive de G; & par conſéquent la formule générale ſera transformée en celle-ci qui ne contient que des féries poſitives, à ajouter enſemble.

$$\begin{array}{llll} A + B & \ldots & = & +\ (V'-1)\circ.r \\ C & \ldots & = & +\ (V'')\circ.r \\ . & & & . \\ . & & & . \\ D & \ldots & = & +\ (V^N)\circ.r \\ E & \ldots & = & +\ R.(f-1) \\ F & \ldots & = & +\ r.(F-1). \end{array}$$

76. COROLL. 1. En appliquant cette nouvelle formule à l'eſpece VII. où l'on a f plein, & par conſéquent $r = (m+1)\circ$, elle devient

$$\left.\begin{array}{llll} A \ldots D & = 1(W)\circ & = & +\ 1 \\ E & \ldots & = & +\ R(f-1) \\ F & \ldots & = & +\ (m+1)\circ(F-1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} = +R(f-1) \\ \quad +1(m)\circ(F-1). \end{array}$$

Exemple.

Soit $F = 43 = 110101$, $f = 31 = 11111$, on a $R = 001010$, $r = (m+1)0 = (5)0$. Ainsi la formule donne

$$\left.\begin{matrix}1\\ 0010101111\\ 0000011010\end{matrix}\right\} = 10101100101 = 0.2.4.5.8.10 = 1333.$$

77. COROLL. 2. Appliquant la même formule à l'espece VIII, qui a f vuide; & par conséquent $r = 0(m-1)1.0$, & $f - 1 = 1$, on aura en joignant A à F

$$\begin{array}{llll} B & . \; . \; . & = & (V' + 1)0(m-1)1 \\ C & . \; . \; . & = & (V'' + 1)0(m-1)1 \\ . & & & . \\ . & & & . \\ D & . \; . \; . & = & (V^N + 1)0(m-1)1 \\ E & . \; . \; . & = & R.1 \\ F & . \; . \; . & = & (m)1.0(F-1)1 \end{array}$$

78. Il est remarquable que par cette application la formule de l'espece VIII. devient aussi compliquée que celle de l'espece IX, puisqu'elle contiendroit $N + 2$ séries additives, tandis que par la nature de cette espece il est évident qu'elle peut être réduite à deux seules séries, savoir

$$\begin{array}{l} + \; F \\ + \; (m)0F; \end{array}$$

d'ailleurs en rangeant la formule de l'espece VIII. §. 57. 58. 71, elle donne

$$\begin{array}{l} A \; . \; . \; . + 1(W)1.0 \\ B \; . \; . \; . + (m)1.0(p)1 \\ C \; . \; . \; . + (m+1)0(V'-1)0.1(V''-V'-1)1.0 \; . \; . \; . \; (m+p-V^N)1 \\ D \; . \; . \; . - (V^N + 1)1. \end{array}$$

Or $A - D$ devient par la soustraction

$$= \left\{\begin{array}{l} + (V')0.1(V''-V'-1)1.0 \; . \; . \; . \; (V^N - V^{N-1} - 1)1.0 \\ \div (V^N \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . + 1 \; . \; . \;)0.1 \end{array}\right.$$

& $(V')0.1 = 2(V'-1)1.0$; de même dans la série C on a $(m+1)0(V'-1)0.1 = 2(m-1)1.1(V'-1)1.0$; ces substitutions donnent

$A \ldots = + 2(W)1.0$
$B \ldots = + (m)1.0(p)1$
$C \ldots = + 2(m-1)1.F$
$D \ldots = - (V^N+1)0.1.$

Ajoutant également à la série additive A, & à la soustractive D, la quantité $(V^N+1)0(m+p-V^N)1$, & transportant en B une des deux unités initiales de A & de C, la formule devient

$A \ldots = + F$
$B \ldots = + 1(m-1)0(p+1)1$
$C \ldots = + (m)1.F$
$D \ldots = - (m+p+1)0.1.$

Or A & B contiennent également $(m+p+1)$ places, dont la plus haute est nécessairement l'unité; ces deux unités valent donc $(m+p+1)0.1 = -D$, & la formule toute additive est réduite à ces trois séries

$A \ldots = (F-1)$
$B \ldots = 1(m-1)0(p)1$
$C \ldots = (m)1.F$

Voilà donc trois formules équivalentes pour l'espece VIII. toutes positives, dont l'une n'a que deux séries, l'autre trois, & la troisieme §. 77. en a V^N+2. Elles semblent n'avoir aucun rapport entr'elles, & cependant elles prouvent qu'il est possible dans cet algorithme de faire évanouir des suites entieres de séries qui ne paroissoient pas susceptibles de réduction.

PROBLEME XIII.

79. *Trouver la plus grande & la plus petite valeur du plus haut exposant du produit* Ff.

Il est clair que sa plus grande valeur sera celle qui résulte des facteurs pleins, & la moindre celle qui résulte des facteurs vuides. Or dans le premier

cas la formule $1(m)0(p)1.0(m)1$, contient $2m + p + 2$ places, dont la premiere ou la moindre eſt 2^0, & par conſéquent la plus haute ſera 2^{2m+p+1}, donc la valeur du plus haut expoſant poſſible des produits eſt $= 2m + p + 1$.

Dans le ſecond cas la formule du produit des facteurs vuides eſt §. 37. $= 1(m-1)0.1(p-1)0.1(m-1)0.1$, elle renferme $2m+p+1$ places; donc la moindre valeur poſſible du plus haut expoſant du produit eſt $= 2m + p$.

80. COROLL. 1. Comme dans la formule du produit des facteurs pleins, les plus hautes places ſont occupées par $(m)1$, il eſt évident que, la ſomme du plus haut expoſant des deux facteurs, ſavoir $2m + p$, reſtant conſtante $= 2c$, ou $= 2c' + 1$, le produit croitra à meſure que m croit, & par conſéquent à meſure que p diminue. Le plus grand produit eſt donc celui de $p = 0$, c. à d. de $F = f$. Ou $m = c$, ce qui eſt le cas du quarré plein; & le moindre produit eſt celui de $m = 1$; car ſi l'on poſoit $m = 0$, on ſortiroit de l'eſpece, & Ff pourroit être un nombre premier. Ainſi la formule du *maximum* dans l'eſpece premiere eſt $1(c+1)0(c)1 = 2c+2$ places, & la formule du *minimum* eſt $1.0(2c-2)1.0.1 = 2c+2$ places.

81. COROLL. 2. Dans l'eſpece des facteurs vuides, c'eſt le contraire; puiſque les hautes places ſont occupées par $(m-1)0$, plus m ſera grand, plus il y aura de hautes places vuides, & par conſéquent plus le produit ſera petit; mais ſi $m - 1$ évanouit, la pénultieme d'en haut ſera pleine. Ainſi la formule du *maximum* de cette eſpece ſuppoſe $m = 1$; $p = 2c - 2$; elle eſt donc $1.1(2c-3)0.1.1$. Celle du *minimum* ſuppoſe $p = 0$; ou $p = 1$, & par conſéquent $c = m$; elle donne $1(c'-1)0.1.1(c'-1)0.1$, ou $1(c)0.1(c-2)0.1$, donc dans tous les cas le nombre des places n'eſt que $2c + 1$.

82. COROLL. 3. Le plus grand nombre compoſé d'une claſſe quelconque K c'eſt celui que donnent les deux facteurs pleins, & égaux,

ou qui ne different que d'une place. Le moindre nombre composé de la classe suivante supérieure $K + 1$ est celui qui résulte de deux facteurs vuides, égaux ou qui ne different que d'une place. Or K contient $2c + 2$ places, $K + 1$ en contient $2c' + 1$, mais ayant $2c' = 2c + 1$, les deux nombres ont une égale quantité de places. Si donc il arrivoit que le *minimum* de la classe $K + 1$ excédât de 4, ou de plus de 4, le *maximum* de la classe K, le nombre ou les nombres intermédiaires, seroient nécessairement des nombres premiers. C'est ce qui arrive en effet, mais seulement dans les petits nombres.

Soit la somme des exposans de la classe K, $2m + p = 2c$, donc celle de la classe $K + 1$ sera $= 2c + 1$, donc la formule du *maximum* des facteurs pleins, supposant $p = 0$, est (§. 80.) $1(c+1)0(c)1$, celle du *minimum* des facteurs vuides, suppose ici $p = 1$; elle est donc (§. 81.) $1(c-1)0.1.1(c-1)0.1$. Or il est évident que cette derniere formule ne sauroit excéder la premiere que dans le cas où l'on aura $c - 1$ nul, ou $c = 1$; alors le *maximum* de K sera $= 1001 = 9$. & le *minimum* de $K + 1$ sera $1111 = 15$, donc, les nombres 11 & 13 sont des nombres premiers.

Soit maintenant la somme des exposans de la classe K, $2m + p = 2c + 1$; par conséquent celle de la classe $K + 1 = 2c = 2c + 2$. Ici la formule du *maximum* des facteurs pleins suppose $p = 1$, elle est donc §. 80. $1(c)0.1.0(c)1$, celle du *minimum* des facteurs vuides suppose $p = 0$, elle est donc §. 81. $1(c')0.1(c'-2)0.1 = 1(c+1)0.1(c-1)0.1$. Il est de nouveau clair que cette derniere formule ne sauroit excéder celle du *maximum*, qu'en supposant $c - 1$ nul, ou $c = 1$, alors le *maximum* de K est $10101 = 21$, & le *minimum* de $K + 1$ est $10011 = 25$, donc 23 est un nombre premier.

83. Excepté ce petit nombre de cas, il est clair que divers nombres de la classe K enjambent dans ceux de la classe $K + 1$, & que pareillement divers nombres de la classe $K + 2$ se confondent avec les plus grands de la classe $K + 1$. Pour connoître donc l'étendue des nombres purs de la classe $K + 1$, il faut en déduire les deux enjambemens d'en haut & d'en bas.

Si K eſt de la claſſe paire $2c$, l'enjambement inférieur ſera §. 82. $= 1(c+1)0(c)1 - 1(c-1)0.1.1(c-1)0.1 = (c)0.1.0.0(c-2)1$, ou plus brievement on aura le *maximum* de K, $(2^{c+1}-1)^2$, & le *minimum* de $K + 1 = (2^{c+1}+1)(2^c+1)$, donc l'enjambement inférieur embraſſe $2^{2c+1} - 2^{c+2} - 2^{c+1} - 2^c$ nombres de la claſſe $K+1$, & le moindre nombre impair pur de cette claſſe eſt $(2^{c+1}-1)^2 + 2 = 2^{2c+2} - 2^{c+2} + 3$. L'enjambement ſupérieur commence au *minimum* de $K+2$, qui eſt $(2^{c+1}+1)^2$ & va juſqu'au *maximum* de $K+1$ qui eſt $(2^{c+2}-1)(2^{c+1}-1)$; ainſi il embraſſe les $2^{2c+2} - 2^{c+3} - 2^{c+1}$ plus hauts nombres de la claſſe $K + 1$, & le plus grand nombre impair pur de cette claſſe ſera $(2^{c+1}+1)^2 - 2 = 2^{2c+2} + 2^{c+2} - 1$. L'intervalle entre les deux enjambemens, ou entre le *maximum* de K, & le *minimum* de $K + 2$, donne tous les nombres purs de la claſſe $K + 1$ $= (2^{c+1}+1)^2 - (2^{c+1}-1)^2 = 2^{c+3}$. Il y a par conſéquent $2^{c+2} - 1$ nombres impairs purs, contenus dans cet intervalle.

Pareillement ſi K eſt de la claſſe impaire, $2c+1$ ſon *maximum* ſera $= (2^{c+1}+1)(2^c-1)$, & le *minimum* de $K+1$ ſera $= (2^c+1)^2$, il y aura donc $2^{2c} - 2^{c+2} - 2^c$ nombres inférieurs de la claſſe $K + 1$, qui ſeront mêlés avec ceux de la claſſe K, & le moindre nombre pur impair dans l'étendue de $K + 1$ ſera $2^{2c+2} - 2^{c+1} - 2^c + 3$.

L'enjambement ſupérieur commence au *minimum* de $K + 2$, qui eſt ici $2^{c+1}+1)(2^c+1)$, & finit au *maximum* de $K + 1$ $= (2^{c+1}-1)^2$. Il occupe donc $2^{2c+1} - 2^{c+2} - 2^{c+1} - 2^c$ nombres ſupérieurs de la claſſe $K + 1$, & le plus grand nombre pur impair de cette claſſe eſt $2^{2c+1} + 2^{c+1} + 2^c - 1$. Ainſi l'étendue entiere des nombres non mêlés eſt ici $(2^{c+1}+1)(2^c+1) - (2^{c+1}-1)(2^c-1) = 2^{c+2} + 2^{c+1}$, & elle contient par conſéquent $2^{c+1} + 2^c - 1$ nombres francs impairs.

84. COROLL. 1. Quand donc les facteurs des nombres de la claſſe $K + 1$ ont la ſomme des plus grands expoſans $= 2c$

on aura pour $c = 3$ . . .	23 nombres purs impairs	de	107	à	151
$c = 4$ . . .	47	de	467	à	559
$c = 5$ . . .	95	de	1955	à	2143
$c = 6$ . . .	191	de	8003	à	8383
&c.	&c.				

85. COROLL. 2. Quand les facteurs des nombres de la classe $K + 1$ ont la somme des plus grands exposans $= 2c + 1$, on aura

pour $c = 2$ . . .	15 nombres purs impairs	de	51	à	79
$c = 3$ . . .	31	de	227	à	287
$c = 4$ . . .	63	de	963	à	1087
$c = 5$ . . .	127	de	3971	à	4223
$c = 6$ . . .	255	de	16131	à	16639
&c.	&c.				

86. Cette théorie des nombres purs d'une classe peut être de quelque secours dans la recherche des nombres premiers. Sachant par ex. que 107 est un nombre pur de la classe $2c = 6$, je sai que les plus hauts exposans de ses facteurs seront $3 + 3$, ou $4 + 2$, ou $5 + 1$. Or $105 = (0.2.4)(0.2) = (0.1.5)(0.1)$ nombres qui ne peuvent être augmentés de 2, sans varier les extrêmes, donc $107 = (0.x.3)(0.y.3)$; mais $x = 1$, $y = 1$ donnent 121; $x = 1$, $y = 0$ donnent 99; $x = 2$, $y = 0$ donnent 117; donc 107 est premier.

Je suis obligé de renvoyer à une troisieme Section, ce qui concerne l'application de nos formules à des cas limités.



SUR

SUR

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS

à différences partielles du premier ordre.

PAR M. DE LA GRANGE.

1.

Lorsqu'on a une fonction u de plusieurs variables x, y, z &c. on appelle différences partielles de u, celles qui résultent de la différentiation de u en y faisant varier chacune des quantités x, y, z &c. à part; ainsi supposant que la valeur complette de du soit représentée par $p\,dx + q\,dy + r\,dz +$ &c., les différens termes $p\,dx$, $q\,dy$, $r\,dz$ &c. de cette différentielle seront les différences partielles du premier ordre de u. On a coutume de représenter les coëfficiens p, q, r &c. des différences dx, dy, dz &c. dans la différentielle de u, par $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$ &c. de sorte que la valeur complette de du sera représentée par $\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz +$ &c. Ainsi si l'on a une équation entre u, x, y, z &c. & $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$ &c. ce sera une équation à différences partielles du premier ordre; & c'est sur l'intégration de ce genre d'équations que je me propose ici de donner quelques nouveaux principes.

2. Supposons que u soit une fonction de x & de y seulement, & que l'on ait pour la détermination de cette fonction une équation en u, x, y, $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$; si on fait pour plus de commodité $\frac{du}{dx} = p$, $\frac{du}{dy} = q$, on

aura $du = p dx + q dy$, & l'équation donnée ſera entre les cinq variables u, x, y, p, q; en ſorte qu'on pourra par cette équation déterminer par exemple q en u, x, y, p; la quantité p ſera donc encore indéterminée, & la queſtion ſe réduira à la déterminer de façon que l'équation $du = p dx + q dy$, ou bien $du - p dx - q dy = 0$ ſoit intégrable, ou d'elle-même, ou étant multipliée par un facteur quelconque.

Soit en général M le facteur que la différentiation aura pu faire diſparoître, en ſorte que la quantité $M(du - p dx - q dy)$ ſoit une différentielle exacte d'une fonction de u, x & y que nous déſignerons par N; on aura donc $dN = \frac{dN}{du} du + \frac{dN}{dx} dx + \frac{dN}{dy} dy = M du - Mp dx - Mq dx$; & de là

$$\frac{dN}{du} = M, \quad \frac{dN}{dx} = - Mp, \quad \frac{dN}{dy} = - Mq;$$

d'où l'on tire les conditions ſuivantes

$$\frac{dM}{dx} = - \frac{d.(Mp)}{du}, \quad \frac{dM}{dy} = - \frac{d.(Mq)}{du}, \quad - \frac{d.(Mp)}{dy} = - \frac{d.(Mq)}{dx};$$

par leſquelles il faudroit déterminer M & p. La derniere de ces équations donne celle-ci: $M\left(\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx}\right) + p \frac{dM}{dy} - q \frac{dM}{dx} = 0$, laquelle, en ſubſtituant pour $\frac{dM}{dx}$, & $\frac{dM}{dy}$ leurs valeurs données par les deux premieres, devient

$$M\left(\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx}\right) - p \frac{d.(Mq)}{du} + q \frac{d.(Mp)}{du} = 0,$$

c'eſt à dire, en effaçant ce qui ſe détruit & diviſant le reſte par M,

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} - p \frac{dq}{du} + q \frac{dp}{du} = 0;$$

or comme q eſt (hyp.) une fonction donnée de x, y, u & p, cette équation ne contiendra plus que l'inconnue p; & la difficulté ſera réduite à déterminer par ſon moyen la valeur de p en u, x, & y.

3. Quoique de cette maniere on ait trouvé l'équation qui doit servir à déterminer p, il paroit que l'on n'a gueres avancé dans la solution du probleme proposé; car au lieu qu'on avoit une équation entre x, y, u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ pour la détermination de u, on en a maintenant une entre x, y, u, p, $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dy}$, $\frac{dp}{du}$ pour la détermination de p, laquelle, à la considérer en général, doit être au moins aussi difficile à résoudre que celle-là, si même elle ne l'est pas davantage à cause qu'elle contient une variable de plus. Il y a cependant une circonstance qui doit la faire regarder comme plus simple que la proposée; c'est que les différentielles dp & dq n'y paroissent que sous une forme linéaire; d'ailleurs nous remarquerons qu'il ne sera pas nécessaire de résoudre cette équation d'une maniere complette, mais qu'il suffira de trouver une valeur quelconque de p qui y satisfasse pourvu qu'elle contienne une constante arbitraire; car nous ferons voir bientôt comment à l'aide d'une telle valeur de p on pourra néanmoins parvenir à la solution générale & complette de l'équation proposée.

4. Pour faire voir d'une maniere encore plus directe comment l'équation que nous venons de trouver pour la détermination de p peut servir à résoudre le probleme dont il s'agit, reprenons l'équation

$$du - p\,dx - q\,dy = 0,$$

dans laquelle q est une fonction donnée de p, u, x, y, & où p est supposé une fonction de u, x, y telle que l'équation soit intégrable, soit d'elle-même, soit à l'aide d'un multiplicateur quelconque. Qu'on suppose que l'une des trois variables u, x, y devienne constante, par exemple u, en sorte que l'on ait l'équation à deux variables, $p\,dx + q\,dy = 0$; soit L le facteur qui rendra la différentielle $p\,dx + q\,dy$ intégrable, (facteur qu'on peut toujours trouver *a posteriori* dès qu'on aura intégré l'équation $p\,dx + q\,dy = 0$); l'on aura donc $L(p\,dx + q\,dy) = dt$, t étant une fonction de x, & de y, dans laquelle u entrera aussi comme

conſtante; par conſéquent on aura $Lp = \frac{dt}{dx}$, $Lq = \frac{dt}{dy}$; mais en regardant x, y, & u comme variables à la fois, on a pour la valeur complette de la différentielle dt, $\frac{dt}{dx}dx + \frac{dt}{dy}dy + \frac{dt}{du}du$; donc on aura $dt = Lpdx + Lqdy + \frac{dt}{du}du$; ainſi l'équation $du - pdx - qdy = 0$, étant multipliée par L, deviendra celle-ci $\left(L + \frac{dt}{du}\right)du - dt = 0$; qui devra donc être intégrable. Or comme t eſt une fonction connue de u, x, y, on aura réciproquement x égale à une fonction connue de t, u, y, de ſorte qu'on pourra introduire la variable t à la place de la variable x; qu'on faſſe donc cette ſubſtitution dans la quantité $L + \frac{dt}{du}$, & comme l'équation ne contient que les deux différentielles du & dt, il eſt clair qu'elle ne pourra être intégrable à moins que la variable y ne diſparoiſſe entierement de la quantité $L + \frac{dt}{du}$. Suppoſons, pour abréger, cette quantité $= P$, & il faudra qu'en ſubſtituant dans P à la place de x, ſa valeur en y, u & t, la variable y s'en aille en même tems que x; donc auſſi ſi, dans la différentielle $dP = \frac{dP}{dx}dx + \frac{dP}{dy}dy + \frac{dP}{du}du$, on ſubſtitue pour dx ſa valeur tirée de l'équation $dt = Lpdx + Lqdy + \frac{dt}{du}du$, il faudra que la différentielle dy diſparoiſſe; mais, la ſubſtitution faite, on a $dP = \frac{dP}{dx} \times \frac{dt - Lqdy - \frac{dt}{du}du}{Lp} + \frac{dP}{dy}dy + \frac{dP}{du}du$; ſavoir

$$dP = \frac{dP}{dx} \cdot \frac{dt}{Lp} + \left(\frac{dP}{dy} - \frac{q}{p} \cdot \frac{dP}{dx}\right)dy$$
$$+ \left(\frac{dP}{du} - \frac{dt}{du} \cdot \frac{dP}{dx} \cdot \frac{1}{Lp}\right)du;$$

donc il faudra que l'on ait $\frac{dP}{dy} - \frac{q}{p} \times \frac{dP}{dx} = 0$. Or $P = L + \frac{dt}{du}$; donc on aura cette équation de condition $\frac{dL}{dy} + \frac{d^2t}{du\,dy} - \frac{q}{p}\left(\frac{dL}{dx} + \frac{d^2t}{du\,dx}\right) = 0$; mais on a déjà $\frac{dt}{dx} = Lp$, $\frac{dt}{dy} = Lq$; donc on aura $\frac{d^2t}{dx\,du} = \frac{d.(Lp)}{du} = \frac{Ldp}{du} + \frac{pdL}{du}$, & $\frac{d^2t}{dy\,du} = \frac{d\,(Lq)}{du} = \frac{Ldq}{du} + \frac{qdL}{du}$; donc l'équation précédente deviendra $\frac{dL}{dy} + \frac{Ldq}{du} + \frac{qdL}{du} - \frac{q}{p}\left(\frac{dL}{dx} + \frac{Ldp}{du} + \frac{pdL}{du}\right) = 0$, savoir en ôtant ce qui se détruit

$$\frac{dL}{dy} + \frac{Ldq}{du} - \frac{q}{p}\left(\frac{dL}{dx} + \frac{Ldp}{du}\right) = 0.$$

De plus les mêmes équations $\frac{dt}{dx} = Lp$, $\frac{dt}{dy} = Lq$, donnent $\frac{d.(Lp)}{dy} = \frac{d\,(Lq)}{dx}$, savoir $\frac{pdL}{dy} + \frac{Ldp}{dy} - \frac{qdL}{dx} - \frac{Ldq}{dx} = 0$, donc retranchant de cette équation, la précédente multipliée par p, & divisant le reste par L, on aura celle-ci:

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} - \frac{pdq}{du} + \frac{qdp}{du} = 0$$

qui est, comme on voit, la même qu'on a trouvée plus haut.

5. Ainsi dès qu'on aura satisfait à l'équation précédente par le moyen de la valeur de p, on sera assûré qu'en chassant x de la quantité $P = L + \frac{dt}{du}$, par l'introduction de la variable t, la quantité y s'en ira en même tems, de sorte qu'on aura alors l'équation à deux variables $P\,du - dt = 0$.

Soit donc L' la fonction de u, & de t par laquelle il faudra multiplier maintenant la différentielle $P\,du - dt$ pour la rendre intégrable,

(fonction qu'on pourra toujours trouver par l'intégration de l'équation $P\,du - dt = 0$) & comme $L'(P\,du - dt)$ sera une différentielle exacte d'une fonction de u, & t, si on remet à la place de t sa valeur en u, x, & y, ce qui, à cause de $dt = Lp\,dx + Lq\,dy + \frac{dt}{du}du$, & de $P = L + \frac{dt}{du}$, transforme la différentielle dont il s'agit en celle-ci: $L'(L\,du - Lp\,dx - Lq\,dy)$, il est évident que cette derniere différentielle sera pareillement une différentielle exacte d'une fonction de u, x, & y; d'où il s'ensuit que $L'L$ sera le facteur propre à rendre intégrable la différentielle $du - p\,dx - q\,dy$; & qu'ainsi on aura (Art. 4.) $M = L'L$; de sorte que connoissant L & L' on connoitra sur le champ le facteur M; & de là par l'intégration on pourra connoitre la valeur de la fonction finie $\int M(du - p\,dx - q\,dy)$.

6. On voit donc clairement par l'analyse précédente que la solution du probleme ne dépend que de la recherche de la quantité p à l'aide de l'équation de condition

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} - p\frac{dq}{du} + q\frac{dp}{du} = 0,$$

laquelle est connue depuis longtems; car dès que cette condition sera remplie, on pourra toujours trouver le multiplicateur M qui rendra intégrable l'équation $du - p\,dx - q\,dx = 0$, & l'intégration donnera ensuite la valeur cherchée de u en x, & y.

Si la valeur de p, qui satisfait à l'équation de condition, a toute la généralité que cette équation comporte, on aura par son moyen la valeur complette de u; mais si la valeur de p n'est que particuliere on ne trouvera d'abord qu'une valeur particuliere & incomplette de la fonction cherchée u; cependant si la valeur particuliere de p est telle qu'elle renferme une constante arbitraire on pourra completter la valeur de u de la maniere suivante. On cherchera d'abord d'après cette valeur particuliere de p le multi-

plicateur M qui rendra intégrable la différentielle $du - pdx - qdy$, & l'on aura en intégrant, l'équation $\int M(du - pdx - qdy) =$ à une const.

Désignons pour plus de simplicité par N la quantité $\int M(du - pdx - qdy)$ qui sera nécessairement une fonction finie de u, x, & y; soit de plus α la constante arbitraire qui entre dans la valeur de p, & il est clair que cette constante entrera aussi comme telle dans l'expression de N; supposons maintenant que cette même quantité α, au lieu d'être constante, soit aussi une fonction variable, & il est visible que dans ce cas la différentielle complette de N ne sera plus simplement $M(du - pdx - qdy)$, mais $M(du - pdx - qdy) + \frac{dN}{d\alpha} d\alpha$; de sorte qu'on aura dans l'hypothese de la variabilité de α,

$$N = \int M(du - pdx - qdy) + \int \frac{dN}{d\alpha} d\alpha;$$

& par conséquent

$$\int M(du - pdx - qdy) = N - \int \frac{dN}{d\alpha} d\alpha.$$

Donc si pour satisfaire aux conditions du probleme on veut que la différentielle $M(du - pdx - qdy)$ soit intégrable d'elle-même, il faudra que la différentielle $\frac{dN}{d\alpha} d\alpha$ le soit aussi en particulier; ce qui ne sauroit évidemment avoir lieu à moins que $\frac{dN}{d\alpha}$ ne soit une fonction quelconque de α.

Que $f : \alpha$ dénote donc une fonction quelconque de α, & supposant $f' : \alpha = \frac{d.f:\alpha}{d\alpha}$, on fera $\frac{dN}{d\alpha} = f' : \alpha$; équation par laquelle on pourra déterminer α. Ensuite on aura $\int \frac{dN}{d\alpha} d\alpha = f : \alpha$; donc $\int M(du - pdx - qdy) = N - f : \alpha$; de là on aura l'équation intégrale $N - f : \alpha =$ à une const., ou bien simplement

$N - f : \alpha = 0$ (à cauſe que la conſtante peut être cenſée renfermée dans la fonction $f : \alpha$) laquelle ſervira à trouver la valeur de la fonction u; & il eſt clair que cette valeur de u ſera complette puiſqu'elle contiendra une fonction arbitraire.

7. On voit donc auſſi par là que toute équation de la forme

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} - p\frac{dq}{du} + q\frac{dp}{du} = 0,$$

où q eſt ſuppoſée une fonction quelconque donnée de u, x, y, p, eſt telle que ſi on connoit ſeulement une valeur particuliere de p, mais qui renferme une conſtante arbitraire α, on pourra toujours trouver la valeur complette de p; car il n'y aura qu'à tirer la valeur de α de l'équation $\frac{dN}{d\alpha} = f' : \alpha$, & la ſubſtituer enſuite dans la valeur particuliere & connue de p.

8. Pour montrer maintenant l'application du théoreme précédent, nous allons parcourir les principaux cas dans lesquels l'équation de condition eſt facile à remplir par le moyen d'une valeur particuliere de p qui ſe préſente naturellement, & nous en verrons naître les ſolutions de la plupart des problemes de ce genre qui n'ont été réſolus jusqu'ici que par des méthodes particulieres.

Ier. CAS.

Lorſque q *eſt une fonction de* p *ſeul.*

Soit P une fonction quelconque de p, & ſuppoſons que l'on ait $q = P$, l'équation de condition (Art. 6.) deviendra, en faiſant $dP = P'dp$,

$$\frac{dp}{dy} - \frac{P'dp}{dx} - p\frac{P'dp}{du} + \frac{Pdp}{du} = 0,$$

à laquelle il eſt viſible que ſatisfait cette valeur $p =$ à une conſt.

On aura donc ainſi $p = \alpha$, & $q = A$, (A étant ce que devient P lorſque $p = \alpha$) d'où l'on voit que la différentielle $du - pdx - qdy$ deviendra $du - \alpha dx - Ady$, laquelle eſt évidemment intégrable

intégrable d'elle-même. Intégrant donc on aura $u - \alpha x - Ay = N$; de là en faisant varier α, on aura $\frac{dN}{d\alpha} = - x - A'y$ (A' étant $= \frac{dA}{d\alpha}$); donc $- x - A'y = f' : \alpha$, équation d'où l'on tirera la valeur de α, qui étant ensuite substituée dans l'équation $N - f : \alpha = 0$, ou bien $u - \alpha x - Ay - f : \alpha = 0$, donnera la valeur complette de u.

II^{d}. CAS.

Lorsque q *est une fonction de* p *& de* y.

Soit P une fonction de p & de y, en sorte que $dP = P'dp + Qdy$, & supposons $q = P$; l'équation de condition deviendra la même que ci-dessus, à cause que $\frac{dq}{dx} = \frac{P'dp}{dx}$, & $\frac{dq}{du} = \frac{P'dp}{du}$; ainsi on y pourra satisfaire en prenant de même $p = \alpha$; ce qui rendra P égal à une fonction de y seul; de sorte que la quantité $du - pdx - qdy = 0$, savoir $du - \alpha dx - Pdy$ sera intégrable d'elle-même, & l'on aura $N = u - \alpha x - \int Pdy$. De là on tirera $\frac{dN}{d\alpha} = - x - \int \frac{dP}{d\alpha} dy$, par conséquent on aura l'équation $f' : \alpha = - x - \int \frac{dP}{d\alpha} dy$, laquelle servira à déterminer α; ensuite de quoi on aura u par l'équation $N - f : \alpha = 0$, ou bien $u - \alpha x - \int Pdy - f : \alpha = 0$.

IIIme CAS.

Lorsque q *est une fonction de* p *& de* x.

Dans ce cas il est clair que la valeur de p sera réciproquement exprimée par une fonction de q, & x; donc regardant q comme l'inconnue, & supposant Q une fonction de q & x, on aura $p = Q$, & l'équation de condition deviendra en supposant $\frac{dQ}{dq} = Q'$,

$$\frac{Q'dq}{dy} - \frac{dq}{dx} - \frac{Qdq}{du} + \frac{qQ'dq}{du} = 0,$$

à laquelle on peut satisfaire en prenant q égal à une constante α, ce qui rendra Q égal à une fonction de x seul, en sorte que la quantité $du - pdx - qdy$, ou bien $du - Qdx - \alpha dy$ sera intégrable d'elle-même. Ainsi on aura $N = u - \int Qdx - \alpha y$, & de là $\frac{dN}{d\alpha} = -\int\frac{dQ}{d\alpha}dx - y = f':\alpha$; d'où l'on tirera α, qu'on substituera dans l'équation $N - f':\alpha = 0$.

IVme CAS.

Lorsqu'une fonction de p *&* x *est égale à une fonction de* q *&* y.

Soit P une fonction de p & x, & Q une fonction de q & y, en sorte que l'on ait $P = Q$, il est clair que si on prend une constante α & qu'on fasse $P = \alpha$, & $Q = \alpha$, on aura par la premiere de ces équations p exprimé par une fonction de x seul, & par la seconde on aura q exprimé par y seul; en sorte que les différentielles $\frac{dp}{dy}$, $\frac{dp}{du}$, $\frac{dq}{dx}$, $\frac{dq}{du}$ seront nulles d'elles-mêmes; ainsi l'équation de condition se trouvera remplie, & il est visible que la quantité $du - pdx - qdy = 0$ sera intégrable sans aucune préparation; on aura donc $N = u - \int pdx - \int qdy$, & de là $\frac{dN}{d\alpha} = -\int\frac{dp}{d\alpha}dx - \int\frac{dq}{d\alpha}dy = f':\alpha$; d'où l'on tirera la valeur de α pour la substituer dans l'équation $N - f:\alpha = 0$; laquelle deviendra donc $u - \int pdx - \int qdy - f:\alpha = 0$.

Vme CAS.

Lorsqu'il y a entre p, q, x, *&* y *une équation dans laquelle* p, *&* q *ne montent qu'à la premiere dimension.*

Soient X & Y des fonctions quelconques de x & y, & supposons que l'on ait $q = pX + Y$; substituant donc cette valeur dans l'équation de condition elle deviendra

$$\frac{dp}{dy} - \frac{Xdp}{dx} - \frac{pdX}{dx} - \frac{dY}{dx} - \frac{pXdp}{du} + (pX + Y)\frac{dp}{du} = 0.$$

Il eſt d'abord clair que ſi on ſuppoſe que p ne contienne point u, cette équation ſe ſimplifiera beaucoup, car elle deviendra, en faiſant pour plus de ſimplicité $\frac{dX}{dx} = X'$, & $\frac{dY}{dx} = Y'$,

$$\frac{dp}{dy} - X\frac{dp}{dx} - X'p - Y' = 0.$$

Mais cette équation eſt encore trop compliquée pour qu'on puiſſe trouver facilement une valeur particuliere de p qui y ſatisfaſſe. Conſidérons donc plutôt la quantité même $du - pdx - qdy$, ou bien, (en mettant $pX + Y$ à la place de q) $du - p(dx + Xdy) - Ydy$, laquelle doit être une différentielle exacte ou d'elle-même ou étant multipliée par un facteur convenable M; & il eſt d'abord clair que, comme X eſt une fonction donnée de x & y, ſi on cherche le facteur m qui rendra intégrable la quantité $dx + Xdy$, & qu'on ſuppoſe enſuite $m(dx + Xdy) = dz$, on aura à rendre intégrable cette quantité plus ſimple $du - \frac{p}{m}dz - Vdy$; où $\frac{p}{m}$ eſt une fonction inconnue, & Y une fonction connue de x, & de y, ou bien de z & de y, en ſubſtituant à la place de x ſa valeur en y & z tirée de l'équation $\int m(dx + Xdy) = z$; or on ſait que la quantité dont il s'agit ſera intégrable ſi l'on a $\frac{d.\frac{p}{m}}{dy} = \frac{dY}{dz}$; ce qui donne, en intégrant ſuivant y, $\frac{p}{m} = \int\frac{dY}{dz}dy + \alpha$, α étant une conſtante arbitraire; ainſi on a une valeur particuliere de p, laquelle donne $N = u - \alpha z - \int Ydy$; donc $\frac{dN}{d\alpha} = -z = f':\alpha$; ce qui ſervira à déterminer α; enſuite de quoi on aura l'équation $N - f:\alpha = u - \alpha z - \int Ydy - f:\alpha = 0$. Or comme l'on a $-z = f':\alpha$, il eſt clair que α ſera une fonction quelconque de z; de ſorte que l'équation qui ſert à déterminer u pourra être repréſentée plus ſimplement ainſi: $u - \int Ydy - f:z = 0$.

Au reste on auroit pu voir d'abord par l'équation $\frac{p}{m} = \int \frac{dY}{dz} dy + \alpha$ que la constante α pouvoit être une fonction quelconque de z, puisque l'intégrale $\int \frac{dY}{dz} dy$ est censée prise en faisant varier y seul, & z demeurant constante; de sorte que la valeur de p étant complette, on auroit eu sur le champ par son moyen la valeur complette de u; mais nous avons cru qu'il n'étoit pas inutile de faire voir comment on y pouvoit parvenir aussi par le secours de notre méthode, en supposant que la quantité α ne fût regardée d'abord que comme une constante indéterminée.

VIme CAS.

Lorsqu'il y a entre p, q, x, y *une équation telle que* x, *&* y *ne remplissent ensemble aucune dimension.*

Faisant $x = zy$, on aura donc une équation entre p, q, z, d'où l'on tirera $q = P$, P étant une fonction de p & z seulement. Or en considérant immédiatement l'équation $du - pdx - qdy$, (ainsi qu'on l'a fait dans le cas précédent) elle deviendra, par les substitutions, $du - p(zdy + ydz) - Pdy = 0$, savoir $du - ypdz - (pz + P)dy = 0$; & l'on voit que cette équation peut devenir intégrable en supposant p une fonction de z seul, (ce qui rendra pareillement P une fonction de z) pourvu que l'on ait $pz + P = \int pdz$, savoir $pdz = pdz + zdp + dP$, ou bien $zdp + dP = 0$; équation differentielle entre p & z, d'où l'on pourra par l'intégration tirer la valeur de p en z, laquelle contiendra une constante arbitraire α. De cette maniere on aura par l'intégration $N = u - y\int pdz$, & ensuite $\frac{dN}{d\alpha} = -y\int \frac{dp}{d\alpha} dz = f' : \alpha$; d'où l'on tirera α qu'on substituera ensuite dans l'équation $N - f : \alpha = u - y\int pdz = 0$.

Au reste, comme on doit avoir dans ce cas $y = Qx$, Q étant une fonction de p, & q, on pourra le résoudre aussi plus simplement par la remarque suivante, à l'aide de laquelle on peut le réduire au V[me] Cas ci-dessus.

REMARQUE.

Tels font les principaux cas réfolubles en général, lorfqu'il y a une équation entre p, q, x, & y fans u, & où par conféquent p & q peuvent être des fonctions de x & y feuls; il faut cependant y ajouter encore ceux dans lesquels il y aura entre ces quatre quantités mêmes équations, mais en échangeant x, y, en p, q, & réciproquement; car à caufe de $\frac{dp}{du} = 0$, & $\frac{dq}{du} = 0$, l'équation de condition eft $\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} = 0$, laquelle en regardant maintenant x, & y comme des fonctions de p & q, peut fe mettre également fous la forme $\frac{dx}{dq} - \frac{dy}{dp} = 0$, où p, & q ont pris la place de x, & y, & *vice verfa*. Ainfi il n'y aura qu'à traiter ces cas de la même maniere que les cas analogues réfolus ci-deffus, en fuppofant qu'au lieu de chercher p, & q en x, & y, on cherche au contraire x, & y en p, & q.

VIIme CAS.

Lorfque q *eft une fonction de* p & u.

Soit P une fonction de p, & u, en forte que $dP = P'dp + Qdu$, & foit $q = P$, l'équation de condition deviendra

$$\frac{dp}{dy} - \frac{P'dp}{dx} - \frac{pP'dp}{du} - pQ - P\frac{dp}{du} = 0,$$

il eft clair qu'on peut fuppofer que p foit une fonction de u feul fans x ni y, ce qui réduira l'équation à celle-ci

$$\frac{pP'dp}{du} - pQ - P\frac{dp}{du} = 0;$$

or comme P, P' & Q font des fonctions données de p & u, il eft clair que l'équation précédente ne fera qu'entre ces deux variables, en forte qu'elle pourra s'intégrer par les méthodes ordinaires; ainfi on aura p en u, & comme l'intégration introduira une conftante arbitraire α dans la valeur de p, on pourra en déduire la valeur générale & complette de u.

En effet l'équation $du - pdx - qdy = 0$, ou bien $du - pdx - Pdy = 0$ donnera celle-ci $dy = \frac{du - pdx}{P}$, ou le

fecond nombre étant une fonction de x, & u feuls fera néceffairement intégrable; de forte qu'on aura $N = y - \int \frac{du - p dx}{p}$; & de là on tirera la valeur de $\frac{dN}{d\alpha}$, qui étant fuppofée $= f' : \alpha$ fervira à déterminer celle de α, qu'on fubftituera enfuite dans l'équation intégrale $N - f : \alpha = 0$.

VIIIme CAS.

Lorfque q $=$ pX $+$ V, X *étant une fonction de* x & y, & V *une fonction de* x, y, & u.

Au lieu de confidérer l'équation de condition par laquelle on doit déterminer p, je confidérerai d'abord, ainfi que j'en ai déjà ufé plus haut, dans un cas analogue à celui-ci (Vme Cas), la quantité $du - p dx - q dy$ qui doit être une différentielle complette, ou dans l'état où elle eft, ou après la multiplication par un facteur quelconque M. Or mettant $pX + V$ à la place de q elle devient $du - p(dx + X dy) - V dy$; & cherchant le multiplicateur m qui rendra $dx + X dy$ égale à une différentielle exacte dz, on aura $du - \frac{p}{m} dz - V dy$, quantité où $\frac{p}{m}$ eft une fonction inconnue, & où V eft une fonction connue de x, y, u, ou bien de u, y, z en mettant à la place de x fa valeur tirée de l'équation $\int m(dx + X dy) = z$. Suppofons donc que cette quantité étant multipliée par M devienne une différentielle exacte; il faudra que $M(du - V dy - \frac{p}{m} dz)$ foit la différentielle d'une fonction de u, y, z; donc, en regardant d'abord z comme conftante, il faudra que $M(du - V dy)$ foit la différentielle d'une fonction de u, & y; ainfi il n'y aura d'abord qu'à chercher le multiplicateur M, qui rendra intégrable la quantité $M(du - V dy)$ confidérée comme fonction de u & y feuls. Soit donc $\int M(du - V dy) = Z$, il eft clair que Z contiendra auffi z, comme conftante; de forte que fi on veut maintenant traiter z comme variable, on aura pour la différentielle complette de Z, la quantité $M(du - V dy) + \frac{dZ}{dz} dz$; donc $M(du - V dy) = dZ - \frac{dZ}{dz} dz$; de forte que la quantité qui doit être une différentielle exacte

deviendra $dZ - \left(\frac{Mp}{m} + \frac{dZ}{dz}\right)dz$. Or il eſt viſible que pour que cette condition ait lieu il n'y aura qu'à ſuppoſer $\frac{Mp}{m} + \frac{dZ}{dz} = \alpha$; ce qui donnera une valeur particuliere de p qui contenant la conſtante arbitraire α conduira, à l'aide de notre méthode, à la ſolution générale du probleme. On aura en effet $N = Z - \alpha z$; d'où $\frac{dN}{d\alpha} = - z = f' : \alpha$; & de là $N - f : \alpha = Z - \alpha z - f : \alpha = 0$. D'où l'on voit que α ſera une fonction quelconque de z, en ſorte que l'équation qui donnera la valeur complette de u, pourra ſe mettre ſous cette forme plus ſimple $Z - f : z = 0$. Au reſte on peut faire ici une remarque analogue à celle qu'on a faite ci-deſſus dans la ſolution du Vme Cas, dont celui-ci n'eſt qu'une généraliſation.

IXme CAS.

Lorſque $q = p^m XYV$, X *étant une fonction de* x, Y *une fonction de* y, & V *une fonction de* u.

Je conſidere encore immédiatement la quantité $du - pdx - qdy$, laquelle par la ſubſtitution de la valeur de q devient $du - pdx - p^m XYVdy$; je fais $p = rv$, v étant une fonction de u & j'ai $du - rvdx - r^m v^m XYVdy$; je ſuppoſe maintenant $v = v^m V$; ce qui donne $v = \sqrt[m-1]{\frac{1}{V}}$, & diviſant enſuite toute la quantité précédente par v, j'ai $\frac{du}{v} - rdx - r^m XYdy$; maintenant il eſt clair que cette quantité ſera intégrable ſi on fait $r^m X = \alpha$, α étant une conſtante, car elle deviendra $\frac{du}{v} - \sqrt[m]{\frac{\alpha}{X}} . dx - \alpha Ydy$; dont l'intégrale ſera $N = \int\frac{du}{v} - \sqrt[m]{\alpha}\int\frac{dx}{\sqrt[m]{X}} - \alpha\int Ydy$; de là on tirera donc la valeur de $\frac{dN}{d\alpha}$ qu'on fera $= f' : \alpha$, & il n'y aura plus qu'à ſubſtituer la valeur de α qui réſultera de cette derniere équation dans celle-ci, $N - f : \alpha = 0$.

REMARQUE.

Si l'on a une équation entre p, q, u, & x, on pourra regarder p, & q comme des fonctions de u & x ſeuls, & le probleme rentrera dans le cas où l'équation eſt entre p, q, x, y, en prenant y à la place de u, $-\frac{p}{q}$ à la place de p, & $\frac{1}{q}$ à la place de q; car il eſt viſible que l'équation $du - p\,dx - q\,dy = 0$ peut ſe mettre auſſi ſous la forme $dy + \frac{p\,dx}{q} - \frac{du}{q} = 0$, qui réſulte de la précédente en changeant u en y, p en $-\frac{p}{q}$, q en $\frac{1}{q}$. Il en ſera de même, *mutatis mutandis*, du cas où l'on aura une équation entre p, q, u, & y.

9. Les cas que nous venons d'examiner renferment d'une maniere générale à peu près tout ce que l'on ſait ſur l'intégration des équations du premier ordre entre trois variables; d'où l'on voit combien peu on eſt encore avancé dans cette matiere. Le principe que nous avons donné pour trouver l'intégrale complette d'après une intégrale particuliere, eſt, comme l'on voit, très fécond, & ſuffit ſeul pour réſoudre la plupart des cas où l'intégration réuſſit. Nous remarquerons cependant ſur ce ſujet que ſi au lieu d'avoir une valeur particuliere de p laquelle renferme une conſtante arbitraire, on avoit une valeur particuliere de u renfermant de même une conſtante arbitraire, on ne pourroit cependant pas trouver par ſon moyen l'intégrale complette; mais on pourroit y parvenir ſi la valeur particuliere de u renfermoit à la fois deux conſtantes arbitraires.

10. Pour démontrer cette propoſition & donner en même tems le moyen de déduire la valeur complette de u d'une valeur particuliere renfermant deux conſtantes arbitraires, ſuppoſons que cette valeur ſoit déterminée par une équation entre u, x, & y laquelle renferme outre cela deux conſtantes α, & β qui ne ſe trouvent pas dans l'équation différentielle, il eſt viſible que ſi on différentie cette équation en ſorte que l'une des conſtantes comme β diſparoiſſe, on aura une équation différentielle qui ſera néceſſairement comparable à la propoſée $du - p\,dx - q\,dy = 0$,

&

& d'où l'on pourra tirer par la comparaison une valeur de p laquelle renfermera encore une constante arbitraire α; en sorte qu'on pourra ensuite en déduire la valeur complette de u. Mais si l'équation en u, x, & y ne renfermoit qu'une constante arbitraire β, alors il est visible qu'en faisant évanouir cette arbitraire par la différentiation, l'équation différentielle qui en résultera ne renfermera plus de constantes arbitraires; ainsi on ne trouvera qu'une valeur particuliere de p qui n'aura point de constante arbitraire, & qui sera par conséquent inutile pour la recherche de la valeur complette de u.

11. Il ne doit point au reste être étonnant qu'une solution particuliere, qui renferme deux constantes arbitraires, soit suffisante pour en déduire la solution complette; car en y regardant de plus près on voit que cette solution remplit presqu'en entier les conditions de l'équation différentielle, puisqu'on ne peut faire évanouir les deux constantes arbitraires sans tomber dans une équation qui renferme à la fois les différences partielles $\frac{du}{dx}$, & $\frac{du}{dy}$; en effet, comme il y a deux quantités à éliminer, il faudra avoir trois équations; ainsi il en faudra encore deux outre la proposée, & ces deux ne peuvent venir que de deux différentiations différentes, l'une en faisant varier x, & l'autre en faisant varier y.

On peut prouver de la même maniere, que si l'on a une fonction u de trois variables x, y, z, laquelle dépende d'une équation différentielle du premier ordre entre u, x, y, z, & $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$, & qu'on ait une valeur particuliere de u laquelle renferme trois constantes arbitraires α, β, γ, cette valeur remplira presqu'en entier les conditions du probleme; car on ne pourra éliminer les trois constantes qu'au moyen de trois différentiations, l'une rélative à x, l'autre à y, & la troisieme à z.

Et ainsi de suite.

12. En général soit u une fonction de plusieurs variables x, y, z &c. & soit donnée une équation entre u, x, y, z &c. & $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$ &c. par laquelle il faille déterminer la valeur de u. Supposons que l'on ait une valeur particuliere de u, laquelle renferme les constantes arbitraires α, β, γ &c. dont le nombre soit égal à celui des variables x, y, z &c.; qu'on en tire la valeur d'une de ces constantes comme α, en sorte que l'on ait $V = \alpha$, V étant une fonction de u, x, y, z &c. & de β, γ &c.; qu'on différentie cette équation, & supposant $dV = Mdu + Pdx + Qdy + Rdz$ &c. on aura en divisant par M l'équation

$$du + \frac{Pdx}{M} + \frac{Qdy}{M} + \frac{Rdz}{M} + \&c. = 0.$$

en sorte que $\frac{du}{dx} = -\frac{P}{M}$, $\frac{du}{dy} = -\frac{Q}{M}$, $\frac{du}{dz} = -\frac{R}{M}$ &c. & ces valeurs seront telles qu'elles satisferont par l'hypothese à l'équation donnée. Maintenant comme la solution du probleme dépend uniquement de ce que l'équation précédente devient intégrable étant multipliée par le facteur M, c'est à dire de ce que $Mdu + Pdx + Qdy + Rdz$ &c. est une différentielle complette de u, x, y, z &c. il est clair que la solution aura lieu de même si les quantités β, γ &c.; au lieu d'être constantes, sont variables, pourvu que la même différentielle continue à être complette; or l'intégrale de cette différentielle, tant que β, γ &c. sont constantes, est V; en sorte qu'on a dans cette hypothese $Mdu + Pdx + Qdy + Rdz + \&c. = dV$; mais si on regarde β comme variable, alors on aura $Mdu + Pdx + Qdy + Rdz + \&c. + \frac{dV}{d\beta}d\beta = dV$; donc $Mdu + Pdx + Qdy + Rdz + \&c. = dV - \frac{dV}{d\beta}d\beta$; donc comme dV est par elle-même une différentielle complette, il faudra que $\frac{dV}{d\beta}d\beta$ soit aussi

une quantité intégrable d'elle-même, ce qui ne peut avoir lieu à moins que $\frac{dV}{d\beta}$ ne soit égal à une fonction quelconque de β. Ainsi supposant $\frac{dV}{d\beta} = f:\beta$, & tirant de cette équation la valeur de β, on pourra la substituer à la place de β, & l'on aura au lieu de l'équation $V = \alpha$, celle-ci $V - B = \alpha$, B étant $= \int f:\beta\, d\beta$; où il faut remarquer que les quantités γ &c. peuvent entrer d'une maniere quelconque en qualité de const. dans la fonction $f:\beta$, & par conséquent aussi dans la fonction B. Maintenant on pourra rendre de même variable la quantité γ contenue dans V & B, en prenant $\frac{d.(V - B)}{d\gamma} = f:\gamma$, ce qui détermine γ, & substituant ensuite cette valeur de γ, on aura l'équation $V - B - C = \alpha$ où $C = \int f:\gamma\, d\gamma$; & ainsi de suite.

Par ce moyen l'intégrale incomplette $V = \alpha$ deviendra de la forme $V - B - C -$ &c. $= \alpha$, & sera nécessairement complette, puisqu'elle contiendra autant de fonctions arbitraires qu'il y a de variables x, y, z &c. moins une.

13. Pour faire voir l'usage de cette méthode par un exemple très général, supposons que X soit une fonction de $\frac{du}{dx}$ & x, que Y en soit une de $\frac{du}{dy}$ & y, que Z en soit une de $\frac{du}{dz}$ & z, & ainsi de suite, & que l'on ait une équation donnée entre X, Y, Z &c.; d'où il faille tirer la valeur de u; comme le probleme consiste à faire en sorte que la quantité $du - p\,dx - q\,dy - r\,dz -$ &c. soit intégrable, ou par elle-même ou étant multipliée par un facteur quelconque, en supposant $p = \frac{du}{dx}$, $q = \frac{du}{dy}$, $r = \frac{du}{dz}$ &c.; il est clair que la condition du probleme sera remplie si p est une fonction de x seul, q de y seul, r de z seul &c.; or c'est ce qui aura lieu si on fait X, Y, Z &c. égales à des quantités constantes; car alors l'équation donnée ser-

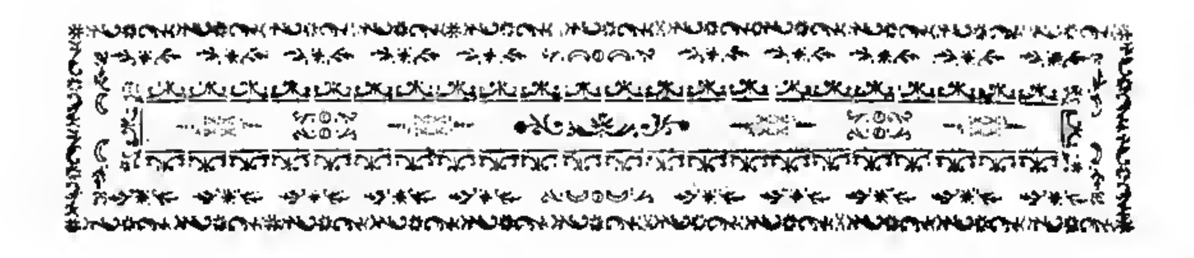
vira à déterminer une de ces conſtantes par toutes les autres, en ſorte qu'il reſtera autant de conſtantes arbitraires β, γ &c. qu'il y aura de variables x, y, z &c. moins une. De cette maniere on aura $V = u - \int p\,dx - \int q\,dy - \int r\,dz -$ &c. $= \alpha$ pour l'équation qui détermine la valeur particuliere de u; & comme cette valeur de u contient les conſtantes arbitraires α, β, γ &c. on pourra completter la ſolution par la méthode expoſée ci-deſſus.

14. Il eſt clair qu'on peut généraliſer encore le cas précédent, en ſuppoſant que W ſoit une fonction quelconque de u, & que l'on ait X égal à une fonction de $\frac{W du}{dx}$, & x, Y une fonction de $\frac{W du}{dy}$, & y, Z une fonction de $\frac{W du}{dz}$, & z &c. car en faiſant X, Y &c. conſtantes, on aura p égal à une fonction de x ſeul, diviſée par W, q égal à une fonction de y ſeule diviſée de même par W &c. de ſorte que la quantité $du - p\,dx - q\,dy - r\,dz -$ &c. étant multipliée par W deviendra intégrable.



NOUVEAUX
MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE
DE PHILOSOPHIE SPÉCULATIVE.



DISCOURS

SUR LA QUESTION:

Pourquoi tant de personnes ont si peu de goût, ou même un si grand éloignement, pour tout ce qui demande l'exercice des facultés intellectuelles & une certaine contention d'esprit? Et comment on pourroit rectifier leurs idées à cet égard?

PAR M. FORMEY.

Le mot du Prince des Poëtes Latins: *Heureux les hommes s'ils connoissoient leurs biens!* (*) a toujours été vrai dans sa plus grande universalité. Nous avons continuellement à notre portée des avantages sans nombre, que nous ne connoissons pas, parce que nous fermons volontairement les yeux; nous les méprisons & les foulons aux pieds, parce que nous ne daignons pas savourer les douceurs que ces biens seroient capables de nous procurer. Cette disposition, déjà bien étrange en elle-même, le paroit tout autrement quand on observe qu'elle est en raison inverse du prix des choses. Moins elles ont de valeur intrinseque, plus nous les estimons & les recherchons. Ce qui peut réveiller & flatter nos sens, ce qui sert à nous amuser & à nous dissiper, nous paroit intéressant: nous saisissons, nous mettons à profit les moyens de jouir de cette sorte d'objets, nous nous ré-

(*) *Felices, si sua bona norint!* Virg.

jouissons de les acquérir, nous nous affligeons de les perdre. Mais les biens effectifs, qui seuls ont la double prérogative de constituer notre mérite réel, & de nous frayer la route du vrai bonheur; ces biens par excellence, tantôt nous savons à peine s'ils existent, tantôt nous les entrevoyons, mais avec une parfaite indifférence; tantôt même ils nous déplaisent, & nous nous refusons à toutes sortes de soins & de peines, quand il s'agit de nous les approprier.

Quels sont ces biens? Ceux de l'ame, les lumieres & les connoissances, principe unique des vertus & de la félicité. Tandis que toute notre vie devroit être consacrée à développer & à perfectionner les facultés de cette substance intelligente & immortelle, qui est notre véritable *Moi*, nous ne nous occupons que de cette portion de matiere qui y est unie, de cette maison d'argile qui se détruit de jour en jour & qui va bientôt s'affaisser. En vain l'on nous dit que nous n'emporterons avec nous que ce que nous aurons confié à cette ame, que les talens & les vertus dont elle aura commencé ici bas, & poussé aussi loin qu'il lui sera possible, l'exercice & l'accroissement: ce sont autant de paroles perdues: nous reculons, je dirois presque que nous frémissons à la proposition de nous livrer à la culture de notre ame, autant & plus que s'il s'agissoit des travaux les plus pénibles, les plus dégoûtans, les plus propres à faire de notre vie un tissu d'amertumes, une chaine de miseres.

D'où vient une façon de penser & d'agir qui répugne également aux principes de la saine raison & à nos véritables intérêts? C'est ce que je me propose de rechercher dans ce Discours; & je tâcherai de diriger cette recherche de façon que de la connoissance même des obstacles à l'exercice de nos facultés intellectuelles naisse celle des remedes qui peuvent surmonter ces obstacles.

I.

1. Tout remonte dans l'homme à l'éducation. Je sai bien qu'il y a des causes antérieures qui sont dans le climat, dans les parens & même dans les ancêtres, dans la constitution propre de chaque individu qui vient au monde. Il y a des contrées où l'on respire un air plus pur

pur pour l'ame (*), si je puis m'exprimer ainsi, tout comme pour le corps. On hérite du jugement, de l'imagination, de la mémoire, comme on hérite des défauts corporels & des maladies invétérées. On a les organes de la pensée, (car on ne sauroit nier qu'elle ne tienne au méchanisme des organes,) plus grossiers ou plus délicats, plus souples ou plus roides. Comme il nous est impossible d'influer en quoi que ce soit surtout cela, il seroit inutile de l'approfondir, au moins par rapport au but de ce Discours.

Mais il en est autrement de l'éducation; elle est notre ouvrage: nous formons & façonnons à notre gré ces enfans qui nous appartiennent; & l'on peut dire que, généralement parlant, ils sont & demeurent tels que nous les avons faits. On ne s'attend pas que j'entre ici dans l'immense doctrine de l'éducation. Je n'en toucherai qu'un seul point. Le caractere primitif des enfans, c'est la légereté, l'inattention; on ne sauroit les fixer: au moment où vous croyez qu'ils vous écoutent & vous suivent, leurs yeux se promenent, leur esprit bat la campagne, ils sont à cent lieues de vous. Il faut beaucoup d'art & de dextérité pour obtenir d'eux qu'ils fassent quelque chose de suivi, & qu'ils pensent à ce qu'ils font: ce n'est que par une sorte de progression journaliere & non-interrompue qu'on réussit à cet égard; & si l'on n'y réussit pas, il n'y a plus d'éducation; lorsqu'on croit bâtir dans la suite, c'est en l'air & sans aucun fondement.

On comprend donc d'abord que, si l'on n'a pas mis les enfans dans la route de la réflexion & de la méditation, ou qu'on n'ait pas su la leur rendre agréable, c'en est fait pour le reste de leur vie; & qu'on ne doit pas s'attendre qu'ils feront, lorsque leurs fibres intellectuelles auront acquis de la consistance & de la résistance, ce qu'ils n'ont pas fait lorsqu'elles se seroient prêtées & auroient pris le pli. A plus forte raison, dans ces éducations qui font le plus grand nombre, où bien loin de fixer la légereté des enfans, on la favorise & l'augmente, on les promene de distraction en distraction, de dissipation en dissipation, où l'on s'amuse de leur vain babil & on les excite

(*) Dans un pays aussi petit que l'étoit la Grece, l'air de l'Attique passoit pour produire des esprits déliés, & celui de la Béotie des esprits stupides. Juvenal disoit de ceux-ci:

Vervecum in patria, crassoque sub aëre nasci.

à lui donner une pleine carriere; il ne peut en résulter autre chose, si non qu'on a fort bien élevé des Perroquets, (*), mais non des hommes.

2. De l'éducation naît l'habitude, & cette habitude est une seconde nature. L'adolescent qui jusqu'à quinze ans a vécu sans réfléchir, n'ira pas se tourner de ce côté-là dans l'âge bouillant de la jeunesse, dans le tourbillon des plaisirs, dans la fougue des passions. Voilà pourtant les meilleurs tems, les plus beaux jours passés: ceux qui suivent ne sont pas propres à corriger les habitudes précédentes & à en contracter d'opposées. Il y a à parier qu'un étourdi à vint ans sera encore un étourdi à soixante; que celui qui n'a fait que des riens dans le tems où il avoit les forces du corps & de l'esprit dans leur intégrité, où son cerveau avoit une pureté, une fraicheur, qu'on peut appeller vierges, ne fera pas des réalités, ne s'occupera pas de choses sérieuses & solides, quand ses forces naturelles commenceront à décliner, quand le champ du cerveau deviendra dur & difficile à défricher.

3. Je trouve une troisieme cause du dégoût des hommes pour tout travail d'esprit, dans l'illusion des objets sensibles. Ce sont ceux qui nous affectent les premiers: nous en sommes environnés depuis le berceau jusqu'au tombeau. Leurs impressions nous tiennent donc, pour ainsi dire, sans cesse alertes; elles rappellent notre ame du fond de son domicile aux frontieres de son domaine, &, si elles ne la privent pas de l'exercice de ses opérations intellectuelles, elles l'interrompent du moins & la troublent continuellement. Tout cela est dans l'ordre de la Nature, & jusqu'à un certain point dans l'intention de la Providence. Nous sommes placés ici bas pour nous conserver & nous propager; pour vaquer à tout ce qui peut détourner notre destruction ou celle de la société. Ceux qui n'apperçoivent que ce premier point de vue, s'y bornent, & croient avoir rempli leur vocation lorsqu'ils ont fait duement toutes les fonctions animales, & qu'on a pu les compter parmi les membres de la Société, comme on compte les pieces de bétail d'un troupeau (**).

(*) Le *Psittacisme* est le défaut, la maladie de tous ceux qui ne pensent pas; ce qui comprend non seulement le vulgaire, mais la plûpart des Savans. Les vrais Philosophes en sont seuls exemts.

(**) *Nos numerus sumus, & fruges consumere nati.*

4. Les obstacles dont j'ai fait jusqu'ici l'énumération naissent de l'homme même, ou des circonstances dans lesquelles il se trouve placé. En voici d'autres dont la source est dans la nature de l'objet, du travail & de l'application de l'esprit, ou du moins dans les idées qu'on s'en fait, dans la maniere dont on se les représente. C'est d'abord comme ce qu'il y a de plus aride, de plus insipide & de plus rebutant. S'occuper d'idées, & qui plus est d'idées qu'il faut simplifier, généraliser, rectifier, épurer, combiner & féconder, quelle tâche! N'est-ce pas marcher dans la région ténébreuse des ombres, s'enfoncer dans le pays immense des chimeres? Comment saisir ce qui ne donne aucune prise? Comment concevoir ce qui n'a ni corps, ni couleur, ni figure, ni dimensions, ni solidité? Ainsi parlent ceux qu'on veut faire passer tout d'un coup des phénomenes aux réalités, des sensations aux notions, de l'exercice de la force motrice à celui de la force représentative. J'avoue que la perspective n'est pas gracieuse pour eux; mais cela prouve d'autant mieux ce que j'ai dit sur l'éducation & sur l'habitude, par lesquelles seules on peut, au moyen de quelques apprentissages, de quelque partie du tems employée à se familiariser avec ces objets, se convaincre que, mieux connus, ils deviennent aussi rians, aussi attirans, & même davantage que ceux des sens. Combien de Métaphysiciens & de Géometres ont vécu plus délicieusement au sein des méditations les plus profondes & des spéculations les plus abstraites, que le pourceau d'Épicure (*) dans la fange des voluptés grossieres, ou même que les Maîtres passés dans l'art de rafiner les plaisirs! Chacun est attiré par quelque sorte de plaisir (**): il ne s'agit que de se former le goût pour celui qui doit obtenir la préférence. Vous aurez autant de peine à détacher un enfant studieux de ses leçons & de ses tâches, qu'à obtenir d'un enfant gâté qu'il renonce à quelcune de ses fantaisies.

5. A l'idée de la sécheresse, se joint celle de la difficulté; & il est incroyable combien les hommes s'exagerent celle-ci. Oui, à la lettre, il y en a qui préféreroient de ramer la galere ou d'être condamnés aux travaux des forteresses, à l'obligation de passer le reste de leur vie à penser, à rai-

(*) *Epicuri de grege porcus.*

(**) *Trahit sua quemque voluptas.*

ſonner, à ſe rendre compte à eux-mêmes de leurs idées, à les développer dans leur cerveau, ou ſur le papier. Ce qui les confirme dans cette répugnance, ce qui la rend invincible, c'eſt que les premiers pas, ſurtout lorſqu'ils ſont tardifs, coûtent beaucoup. Mais eſt-ce une raiſon de perdre courage, & de renoncer à l'entrepriſe, ſi d'ailleurs on eſt convaincu de ſon importance? On a été arrêté au ſecond pas; ſi l'on avoit été juſqu'au quatrieme, on auroit ſenti un commencement de facilité; le ſixieme auroit été de plein pied: au dixieme on auroit goûté le plaiſir inſéparable de l'acquiſition de la vérité & du ſentiment des progrès qu'on y fait. C'eſt ce qui ne manque point d'arriver à ceux qui font un premier cours de Géométrie: ils ſe croient d'abord en pays perdu; mais à meſure qu'ils avancent, ils découvrent tous les ſentiers, ils ſe démêlent de tous les défilés. Il en eſt de même d'une philoſophie ſyſtématique & de tout ce qui peut être traité ſcientifiquement. Tous les Volumes du célebre Wolff, lûs dans leur ordre, & avec une attention qui ceſſe bientôt d'être une contention, coûtent réellement moins de peine à ſuivre & à entendre que les Romans de Cyrus & de Clélie. Ceux qui devinent toutes les ſemaines une Enigme ou un Logogryphe, auroient lû tout Newton avec moins d'effort & plus de fruit.

6. Mais allons au vif, pénétrons dans les replis les plus ſecrets du cœur humain, dévoilons ce que la fauſſe honte s'efforce de cacher. Cette conſidération & la ſuivante produiront ces effets ſur ceux qui voudront en profiter. Pourquoi ne cultive-t-on pas ſon eſprit, ou pour mieux dire, ſon entendement, cette faculté ſupérieure à laquelle ce qu'on nomme ordinairement eſprit & talent ſont fort ſubordonnés? C'eſt qu'on croit & qu'on ſe dit à ſoi-même en ſecret, qu'il n'y a rien à gagner? Tout autre travail eſt payé, conduit à la fortune, aux richeſſes, aux honneurs: celui-là ſeul, celui d'avoir l'eſprit juſte, le raiſonnement ſain, la vue de l'ame nette & perçante, celui-là ſeul demeure infructueux & ſtérile. Si l'on a dit de la Vertu qu'elle recevoit des éloges, mais qu'on la laiſſoit morfondre (*), le lot de la Raiſon perfectionnée eſt moindre encore, on la mépriſe, on s'en raille, on laiſſe raiſonner tout ſeul celui qui n'a que cette triſte faculté

(*) *Virtus laudatur & alget.*

en partage. Louis XIII. eut un favori, un Connétable, qui parvint à ce faîte d'élévation, parce qu'il excelloit dans la chaſſe aux petits oiſeaux. Louis le Grand donna l'un des plus importans poſtes de l'État à un homme qui jouoit ſupérieurement au billard. Mais *Bacon*, l'immortel *Bacon*, eſt mort diſgracié & inſolvable. C'eſt donc perdre ſes peines & ſon tems que de ſe former à penſer, tandis qu'il ſuffit d'être en état d'agir; de faire des efforts pour acquérir le ſavoir, tandis qu'on n'a beſoin que de ſavoir-faire. Gardez-vous de conclure ainſi. Tout cela ne feroit pas même vrai, quand nous n'aurions à jouer qu'un rôle paſſager ſur la ſcene de ce monde: le ſavoir (*) & la vertu n'y ſont pas toujours négligés & mépriſés; mais cela eſt de toute fauſſeté, dès-là que nous travaillons ſous les yeux d'un Juge ſuprême, auſſi éclairé qu'integre, dès-là que nous aſpirons à une rémunération infinie & immanquable.

7. Enfin qu'eſt-ce qui nous dégoûte du travail intérieur? N'y en a-t-il point quelque autre raiſon plus myſtérieuſe encore? Soyons de bonne foi. Nous n'aimons pas ce travail parce qu'il nous oblige à rentrer en nous-mêmes; & nous n'aimons pas à rentrer en nous-mêmes, parce que notre amour-propre en eſt mortifié, parce que nous ne pouvons nous diſſimuler des défauts, des vices, qui nous déplaiſent autant que déplait à un homme laid & contrefait ſon image que lui offre la glace trop fidele d'un miroir. Je ne voudrois pas affirmer que l'homme, que tout homme reſſemblât au portrait que le Duc de la Rochefoucauld (**) en a fait dans ſes Maximes; les traits m'en paroiſſent trop révoltans, & on l'a accuſé de les avoir copiés d'après lui-même. Mais on ne ſauroit diſconvenir que le fond du cœur humain a bien des ombres & des taches, quelquefois même des plaies & des abſcès; & que cela eſt encore plus à préſumer de ceux qui ont vécu longtems ſans réflexion, de ceux qui ont négligé ou même craint de ſe connoître & de ſe ſonder. Or, quand les choſes en ſont venues à un

(*) Laiſſez dire les ſots: le ſavoir a ſon prix. *Fabl. de la Font.*

(**) M. *de la Rochefoucauld* a fait un portrait très déſavantageux du Cardinal *de Retz*, qui ſe trouve dans les Lettres de Madame de Sévigné, Tom. III. p. 95. de l'Édit. en 8 Vol. de Paris (ſous le titre d'Amſterdam) 1756. Je crois que le Cardinal *de Retz* auroit pu peindre le Duc dans le même goût, c'eſt à dire, en vraie caricature.

certain point à cet égard, on ne peut plus se résoudre à jetter le moindre coup d'œil sur soi-même, à faire le moindre acte réfléchi: on cherche plutôt à s'étourdir jusqu'à ce qu'on arrive au moment où le gouffre de l'avenir nous engloutit sans retour.

Telles sont, si je ne me trompe, les vraies causes de la disposition sur laquelle devoit rouler la premiere Partie de ce Discours. J'ai insinué d'avance que les remedes en naîtroient immédiatement. Je crois donc pouvoir me dispenser de revenir sur mes pas & d'entrer dans des discussions ultérieures sur des faits suffisamment constatés. Je me bornerai à l'énoncé d'autant de Maximes que j'ai indiqué d'obstacles, que ces Maximes serviront manifestement à prévenir ou à détruire. Il ne s'agira que de les appliquer, ce qui ne surpassera la portée de personne, & de les réduire en pratique, ce qui décidera du succès de ce Discours.

II.

MAXIME I. *Dans l'éducation, attachez-vous d'aussi bonne heure qu'il est possible à former l'esprit, & surtout le jugement de vos éleves.* On tombe ici dans diverses fautes. 1. On regarde les enfans comme des machines, ou comme de simples jouets, pendant un beaucoup trop long espace de tems. Quand leur esprit perce, on ne s'attache qu'à leurs saillies, pour les exalter ou s'en divertir. C'est pourtant ce qui devroit le moins intéresser. La naissance de leur raison, & ses progrès, sont des objets tout autrement dignes d'attention. Mais, par le plus étrange de tous les procédés, on cesse de les caresser, peu s'en faut que je ne dise de les aimer, dès que leurs folies enfantines prennent fin, & qu'ils montrent du penchant aux occupations sérieuses. Alors on les abandonne à des Maîtres qui les enseignent quelquefois de la maniere la plus bisarre, soit en les occupant de minuties qui leur gâtent le goût, soit en leur débitant des choses qu'ils ne sont pas encore en état de comprendre, soit enfin avec une pédanterie & des rigueurs qui les rendent pour toute leur vie ennemis irréconciliables des études & de l'application.

MAXIME II. *Que les parens, ou ceux qui en tiennent la place, soient attentifs à former eux-mêmes dans leurs enfans ou éleves, l'habitude de pen-*

ſer & de réfléchir. J'avoue à regret que j'impoſe ici à la plûpart d'entr'eux un devoir qu'ils ne ſauroient remplir, puiſque cette habitude leur manque à eux-mêmes, qu'ils ſont eux-mêmes légers & frivoles, ſtupides ou vicieux. Mais enfin je ne m'addreſſe ici, & ne pourrai m'adreſſer dans toutes les Maximes que j'ai à propoſer, qu'aux perſonnes qui ſont douées de qualités propres à les bien ſaiſir & à les appliquer avec ſuccès. Je les invite donc à rendre les enfans capables d'abord d'attention, & enſuite de réflexion; deux opérations qu'il faut bien diſtinguer & ſubordonner. On exige d'abord l'attention: il faut qu'un enfant ceſſe de voltiger, & qu'il s'occupe d'une ſeule & même choſe pendant un tems déterminé, bien entendu que cette choſe ſoit à ſa portée, & que ce tems n'excede pas certaines bornes, qui ſeront dans les commencemens fort reſſerrées, & iront enſuite en croiſſant. Quand on a gagné ce point que je tiens pour capital, & qui eſt pour l'ordinaire le plus difficile, on raiſonne avec ſes éleves, & on les invite à raiſonner, en ne s'élevant jamais au-deſſus de leur ſphere. Vous les voyez ſe prêter volontiers à cet exercice, le rechercher, y trouver du plaiſir. Alors vous êtes dans la bonne voie, il ne s'agit plus que de la ſuivre. Vous ne ferez plus rien entrer dans l'eſprit des enfans qui ne ſoit muni du ſceau de la raiſon, pour m'exprimer ainſi: ils ne jugeront plus avec précipitation, ils ceſſeront d'être deciſifs; &, dans tous les cas qui ſe préſenteront, ils voudront voir, examiner, & s'aſſurer de ce qui peut être connu, avant que de prendre un parti, d'énoncer poſitivement une affirmation ou une négation.

MAXIME III. *Prévenez les impreſſions trop fortes des objets ſenſibles qui pourroient traverſer les bons effets des deux Maximes précédentes.* Il ne faut pas détruire d'une main ce que l'on édifie de l'autre. Si l'on veut former des éleves appliqués & qui deviennent intelligens, on ne doit pas les diſtraire ſoi-même, les diſſiper, & leur mettre en tête l'envie de jouir de tous les plaiſirs qui ſont à leur portée. Voilà ce qui rend l'éducation des enfans des Grands beaucoup plus difficile que celle des enfans des petits. Ils ont continuellement autour d'eux tout ce qui excite la vanité, entretient le luxe, & ſert d'amorce aux différentes eſpeces de la ſenſualité. Si l'on ne les iſole juſqu'à

un certain point de ces diſtractions & de ces tentations, ils n'auront d'yeux & d'oreilles, de génie & de goût, d'attention & d'application que pour la bagatelle, & bientôt après pour les écarts & les excès. On pourroit leur montrer dans ces objets des caracteres de vanité propres à les leur faire mépriſer: on pourroit les entretenir des dangers qu'on court en s'y livrant, & leur mettre ſous les yeux les exemples de ceux qui en ont été les victimes. Il n'y a qu'à lire dans *Horace*, comment ſon pere le menoit à la ſageſſe & à la vertu au milieu des écueils du monde. Mais *Horace* a-t-il été bien ſage & bien vertueux: & de ſon propre aveu, n'a-t-il pas mené, tant qu'il a pu, la vie d'un agréable débauché? Il y a donc un meilleur parti à prendre, c'eſt celui de la retraite & de la fuite. Éloignez auſſi longtems que vous le pourrez & que les circonſtances de votre état le permettront, le Monde & la mondanité des yeux de vos éleves: procurez-leur des plaiſirs purs & ſimples, doux & innocens; car, ſi vous leur en laiſſez trop tôt appercevoir & goûter d'autres, ils perdront leur docilité, ils vous échapperont, & ſemblables à des courſiers qui ont rompu leur lien, vous les verrez galopper à travers champs, ſans pouvoir les rattraper.

MAXIMES IV. V. VI. *Rendez la route de la réflexion agréable. Rendez-la facile. Rendez-la utile.* C'eſt ainſi que vous détruirez les trois obſtacles indiqués dans les Articles 4. 5 &. 6. de la premiere Partie. Je ne ſaurois détailler ici toutes les pratiques & toutes les précautions néceſſaires pour tirer de ces Maximes les fruits dont elles ſont ſuſceptibles; ce ſeroit écrire un Traité d'éducation complet. Je me borne donc à dire que l'*agrément* dépend ſurtout de la clarté avec laquelle on enſeigne, de l'affection qu'on témoigne à ſes diſciples, & de mille petits ſecrets particuliers que de bons & ſages Maîtres ſavent diverſifier pour réveiller & ſoutenir l'attention, pour ſaire que les heures qu'ils donnent ſoient déſirées, qu'on les voie commencer avec une vive ſatisfaction & finir avec un vrai regret. Cela s'étend aux entretiens que des parens ſenſés ont avec leurs enfans: ces entretiens vaudroient encore mieux que toutes les leçons, ſi l'on ſavoit les ménager & les diriger à leur véritable but, à rendre les enfans journellement plus

plus éclairés & meilleurs. Mais, ou les peres & les meres ne parlent point à leurs enfans, ou ils ne leur disent que des inutilités, ou ils ont des hauteurs, des rudesses, qui bannissent bientôt toute confiance. La *facilité* naîtra de l'ordre & d'une suite non-interrompue d'occupations. Sans l'ordre, on ne fait qu'un chaos de la tête de ses éleves: & quand on suivroit un assez bon ordre, la trop grande mulitude de choses qu'on enseigne pour l'ordinaire à la fois, fait qu'elles s'embrouillent & s'étouffent réciproquement, lors même que des disciples appliqués souhaitent & tâchent de se les approprier toutes. Mais ce qui mérite le plus d'attention, ce qui influe le plus sur les éducations, c'est que le travail soit réglé & quotidien (*). Rien de plus funeste aux études & aux progrès que ces lacunes qu'on nomme vacances, ces séjours à la campagne, ou toute autre interruption de quelque durée. L'excellente disposition à s'occuper tous les jours, qui avoit coûté des années à acquérir, peut s'affoiblir en huit jours, se détruire en un mois, après lequel il sera plus difficile de la recouvrer qu'il ne l'avoit été d'y parvenir. Il est déjà très fâcheux que les maladies, qui ne dépendent pas de notre volonté, viennent à la traverse, & dérangent les meilleurs plans, gâtent quelquefois les meilleurs caracteres. Au moins ne faut-il pas donner lieu soi-même à des inconvéniens qui deviennent bientôt irrémédiables. Enfin l'*utilité* sera la compagne inséparable du travail *agréable & facile*. Un enfant, à plus forte raison un adolescent, qui sera convaincu par sa propre expérience, par son propre sentiment, que depuis un an par exemple, il sait beaucoup plus de choses bonnes à savoir, ou qu'il les sait beaucoup mieux; que tous les jours ses connoissances s'étendent, son jugement se fortifie; un enfant qui, par le seul principe d'une noble émulation, aura devancé ses compagnons d'étude; qui, sans être trop flatté ni applaudi, verra que ses parens & ses maîtres sont contens de lui, & lui rendent dans l'occasion les témoignages les plus avantageux; un tel éleve recueillera les fruits actuels de ses progrès, & comprendra sans peine que d'autres fruits beaucoup plus précieux l'attendent s'il ne se relâche point, qu'il obtiendra des postes considérables, qu'il les remplira avec honneur, & qu'il

(*) *Nulla dies sine linea.*

jouira dans la ſociété de tous les avantages & de tous les agrémens qui peuvent rendre la vie douce & heureuſe. Si avec cela on lui donne les inſtructions les plus eſſentielles de toutes, celles de la Religion, ſi on les inculque dans ſon eſprit, ſi on les grave dans ſon cœur, la perſpective d'un bonheur fort au-deſſus de celui qu'on peut goûter ici bas, achevera de l'animer & de l'enflammer, lui fera ſurmonter toutes les difficultés, applanir tous les obſtacles : & c'eſt ce qui me conduit à ma derniere Maxime.

MAXIME VII. *Par la liaiſon des lumieres & des vertus rendez l'intérieur toujours attrayant, afin que la crainte de ſe connoître ne détourne jamais des opérations intellectuelles.* Il n'y a point de ſageſſe ſans vertu ; & pour un Chrétien, il n'y a point de vertu ſans piété. Quand on parviendroit à former les génies les plus diſtingués ; quand on les verroit s'élever aux premiers rangs dans la République des Lettres, ou dans la ſociété ; s'ils ſont avec cela méchans, faux, vains, vicieux ſurtout & impies, il vaudroit mieux qu'ils n'euſſent jamais exiſté, ou qu'on ne leur eût jamais procuré les connoiſſances & les talens dont ils font un ſi funeſte abus. De telles gens ſont bien plus l'opprobre & le fléau de leur ſiecle qu'ils n'en ſont l'ornement & la gloire. Auſſi, malgré toute leur réputation, malgré les chefs-d'œuvre qu'ils ont produits dans certains genres, on peut dire qu'ils ne ſavent ni penſer, ni réfléchir, que leur jugement eſt une machine détraquée, & leur entendement encore à naître. Cependant ce ſont des feux folets qui égarent le plus grand nombre de ceux qui entrent dans le monde, & qui les conduiſent droit au précipice. Oh ! que leur intérieur doit être un ſombre manoir ! J'entens les ſerpens de l'Envie qui y ſifflent, je vois les crins de la Diſcorde qui s'y hériſſent : toutes les Furies y habitent : Cerbere fait retentir l'entrée de ſes hurlemens ; & quand Charon les aura paſſés dans ſa barque, ils iront partager le ſort des Ixions & des Siſyphes.

APPLICATION
DU PRINCIPE DE LA RAISON SUFFISANTE
à la démonſtration d'un Théoreme de M. Fermat ſur les nombres polygonaux, qui n'a point encore été démontré. (*)

PAR M. BEGUELIN.

C'eſt une choſe ſinguliere, & qui ſemble mériter également l'attention des Philoſophes, & des Analyſtes, que la premiere, la plus élémentaire des ſciences exactes, l'Arithmétique ſoit préciſément celle où il eſt le plus difficile de démontrer un grand nombre de théoremes, de la certitude desquels on eſt néanmoins convaincu depuis longtems. Il ſemble que dans une ſcience ſi évidente, dont les élémens ſont ſi bien connus, & ſi exactement déterminés, il ne devroit y avoir aucun rapport qui ne pût être aiſément découvert *a priori*, & qui ne fût ſuſceptible d'une démonſtration claire & directe. Cependant c'eſt le contraire qui arrive le plus ſouvent. La plupart des théoremes ſur les nombres n'ont été apperçus que par l'induction; pluſieurs d'entr'eux ne ſont point démontrés encore; & ceux qui le ſont, l'ont été pour l'ordinaire par des voies ſi détournées, & d'une maniere ſi indirecte, que leur démonſtration ne répand que peu ou point de jour ſur la nature même des nombres, & ſur la liaiſon des vérités que cette ſcience renferme.

On auroit tort de penſer que c'eſt la ſimplicité de ces théoremes qui en rend la démonſtration ſi difficile. Il eſt vrai que les notions les plus ſimples, ſont les moins ſuſceptibles d'être démontrées; mais ce n'eſt que lorsqu'elles ſont par elles-mêmes plus évidentes que les principes qui entre-

(*) Lû à l'Académie le 3 Déc. 1772.

roient dans la preuve. Or les théoremes dont je veux parler n'ont point cette évidence-là.

On pourroit plutôt dire, que comme la diverſité des rapports entre les nombres s'étend à l'infini, leurs combinaiſons deviennent ſi compliquées, que l'eſprit de l'homme eſt trop borné pour les déméler; mais cette réflexion prouve ſimplement qu'il peut y avoir une infinité de théoremes d'arithmétique que nous ne connoiſſons point; elle n'explique pas encore diſtinctement pourquoi les théoremes qu'on connoit ſont ſi difficiles à démontrer, tandis qu'il eſt certain que chaque théoreme tient à tous les autres, & qu'il deſcend par une gradation directe du plus ſimple de tous.

Je crois appercevoir, ſans néanmoins prétendre l'affirmer généralement, que la véritable ſolution de ce paradoxe ſe trouve dans la nature méme des théoremes d'arithmétique dont il eſt ici queſtion. Ils ne ſont pas en tout ſens d'une néceſſité géométrique; ils tiennent en partie au principe de la raiſon ſuffiſante, & en partie à celui de la contradiction; & comme les méthodes de l'Analyſe ne ſont fondées que ſur ce dernier principe, il n'eſt pas étonnant qu'en cherchant par ces méthodes ſeules la démonſtration d'un tel théoreme, on ſe trouve enfermé dans un cercle qui ramene pour l'ordinaire au méme point d'où l'on étoit parti.

Pour expliquer ma penſée, je l'appliquerai au théoreme qui doit faire l'objet de ce Mémoire. Ce théoreme que Mr. Fermat a annoncé le premier, mais ſans en donner la démonſtration, c'eſt que tout nombre entier peut être exprimé par autant de nombres polygonaux, tout au plus, que le polygone contient de côtés. Perſonne n'a encore démontré ce théoreme ni dans ſa généralité, ni dans aucun cas particulier, excepté celui du quarré; dont Mr. de la Grange a donné l'hiſtoire & la démonſtration complette dans nos Mémoires de 1770.

Il eſt aiſé de juger par l'analogie que tous ces cas particuliers doivent tenir ſucceſſivement les uns aux autres, & que c'eſt le plus ſimple qui devroit conduire aux plus compoſés. Il ſembloit donc naturel de commencer par le théoreme ſur les nombres triangulaires, pour paſſer de là aux quarrés & aux polygones ſupérieurs; mais c'eſt que dans tous ces cas, & méme dans

le plus ſimple, l'inconvénient dont j'ai parlé ſe retrouve toujours. Ces théoremes ne ſont pas d'une néceſſité abſolue en tout ſens; & il n'eſt pas facile par conſéquent d'y appliquer le principe de la contradiction. Il n'implique pas qu'un nombre entier, qui eſt la ſomme de 1 ou de 2 ou de 3 triangulaires, ne ſoit en même tems la ſomme d'un plus grand nombre de trigones. S'il étoit impoſſible que les nombres compoſés d'une certaine quantité de quarrés, puſſent l'être d'une autre quantité, le théoreme particulier de Bachet ſur le cas des quarrés auroit pû être démontré auſſi aiſément en Arithmétique, que celui de l'égalité de la ſomme des trois angles d'un triangle à 180 degrés l'eſt en Géométrie. Les propoſitions géométriques ont une double néceſſité, s'il eſt permis d'employer cette expreſſion; l'une c'eſt qu'il implique contradiction qu'elles ne ſoient pas vraies, & l'autre qu'il eſt impoſſible que la choſe ſoit d'une autre maniere. Nos théoremes arithmétiques n'ont que la premiere de ces deux néceſſités; il eſt de néceſſité que tout nombre entier puiſſe être décompoſé tout au plus en quatre quarrés; mais il eſt ſi peu impoſſible qu'il renferme plus de quatre quarrés, qu'au contraire la choſe eſt inconteſtable à l'égard de tout nombre audeſſus de 4.

Cette différence eſſentielle entre ces théoremes d'arithmétique, & ceux de géométrie, exige donc auſſi une diverſité dans la maniere de les démontrer; comme dans les premiers il n'eſt proprement queſtion que d'une ſimple poſſibilité, conſtante à la vérité, mais nullement excluſive, il ſemble qu'il eſt naturel de recourir au principe qui fonde & qui explique la poſſibilité des choſes, je veux dire, au principe de la raiſon ſuffiſante, qui doit ſuppléer ici à la difficulté qu'il y a d'appliquer directement le principe de la contradiction. C'eſt en cherchant dans la nature même des nombres la raiſon de certaines propriétés, qu'on peut s'aſſurer que ces propriétés ne ſont pas purement accidentelles; aſſurance que la ſimple induction ne ſauroit donner. Et ſi cette méthode n'eſt pas auſſi exacte que celle qui eſt fondée ſur le principe de contradiction, elle a au moins l'avantage de répandre plus de jour ſur l'objet qu'elle embraſſe, que ne le feroit une démonſtration rigoureuſe, à laquelle on n'arriveroit que par des routes indirectes & détournées.

PROBLEME.

Une série quelconque de nombres polygonaux étant donnée, trouver combien de termes de cette série peuvent suffire pour représenter un nombre entier quelconque qui n'excede pas le plus grand terme de la série.

CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

§. 1. Soit la série proposée selon l'ordre de ses termes:

$$1,\ A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ \ldots\ X,\ Y.$$

Comme dans les séries polygonales la seconde différence est constante, soit cette seconde différence $= d$, on aura par conséquent les premieres différences comme suit:

$$0,\ d+1,\ 2d+1,\ 3d+1,\ 4d+1,\ \ldots\ nd+1,$$

ce qui donne la valeur de chaque terme de la série, savoir:

$$\begin{aligned}
A &= d + 2\\
B &= 3d + 3\\
C &= 6d + 4\\
D &= 10d + 5\\
E &= 15d + 6\\
F &= 21d + 7\\
G &= 28d + 8\\
&\cdot\\
&\cdot\\
X &= \left(\frac{nn+n}{2}\right)d + n + 1\\
Y &= \left(\frac{nn+3n+2}{2}\right)d + n + 2.
\end{aligned}$$

§. 2. REMARQUE 1. Il est évident qu'au delà du terme B, tout terme est plus petit que le double du terme qui le précede immédiatement, puisqu'on a:

$$C = 2B - 0d - 2$$
$$D = 2C - 2d - 3$$
$$E = 2D - 5d - 4$$
$$F = 2E - 9d - 5$$
$$G = 2F - 14d - 6$$

. .

. .

$$X = 2V - \left(\frac{nn - 3n}{2}\right) - n + 1.$$

§. 3. REMARQUE 2. On peut obſerver en paſſant qu'*un nombre polygonal quelconque, plus le polygonal qui le précede de deux places, eſt égal au double du polygonal immédiatement précédent, plus la différence conſtante* d. Car ſoit le terme T de la ſérie, la différence de ce terme au ſuivant V étant poſée $= D$, on a $T + D = V$, donc $X = V + D + d$; donc $X + T = V + T + D + d = 2V + d$.

§. 4. REMARQUE 3. Puiſque $nd + 1$ eſt la différence du terme quelconque X à ſon conſéquent Y, le plus grand nombre entier qui précede le polygonal Y eſt $X + nd$. Or l'excès de $2V$ ſur X eſt $\left(\frac{nn - 3n}{2}\right)d + n - 1$. (§. 2.) Ainſi l'excès de $2V$ ſur $X + nd$ eſt $= \left(\frac{nn + 5n}{2}\right)d + n - 1$. Cet excès eſt poſitif dès que $n > 4$; il l'eſt même dans le cas de $n = 4$, ſi en même tems on a $d = 1$, parce qu'alors $3 - 2d = + 1$.

§. 5. *PROPOSITION 1.* Si le nombre entier e tombe entre le premier & le ſecond terme 1, & A, de la ſérie polygonale, le plus grand nombre t de polygonaux requis pour repréſenter e eſt: $t = d + 1$.

Cela eſt évident, puiſqu'il n'y a ici que le ſeul terme 1 qui puiſſe être employé à repréſenter e, & que la plus grande valeur de e eſt $e = A - 1 = d + 1$.

§. 6. *PROPOS.* 2. Si e tombe entre A & B, le plus grand nombre t de termes de la férie requis pour repréfenter e, fera: $t = d + 2$.

Ici le *maximum* de e eft $= B - 1 = 3d + 2 = 2A + d - 2$, qui donne $t = d$, & le *maximum* de t eft, $A + d + 1$, qui donne $t = d + 2$.

§. 7. *PROPOS.* 3. Si e tombe entre B & C, le *maximum* de t eft encore $t = d + 2$.

Car ici le *maximum* de e eft $e = C - 1 = B + 2A + d - 4$, qui donne $t = d - 1$.

Le feul cas douteux qui fe préfente ici c'eft celui de $e = B + A + d + 1$, qui donneroit $t = d + 3$. Mais décompofant B on a $e = 4A + d - 2$, qui donne $t = d + 2$.

§. 8. *PROPOS.* 4. Si e tombe entre C & D, le *maximum* de t eft encore $t = d + 2$.

Car ici le *maximum* de e eft, $e = D - 1 = C + 4d = C + 3A + d - 6$, qui donne $t = d - 2$.

Il n'y a ici que *deux cas douteux. Le premier*, qui ne renferme qu'un feul nombre, eft le cas de $e = C + A + d + 1$. Mais décompofant $C = 2B - 2$, on a $e = 2B + A + d - 1$, ce qui donne $t = d + 2$.

Le *fecond cas douteux* renferme les deux nombres $e = C + 2A + d$, & $e = C + 2A + d + 1$. Le premier fe décompofe en $2B + 2A + d - 2$. Le fecond en $B + 5A + d - 5$. Donc $t = d + 2$.

NB. $d - 5$ ne fauroit être ici négatif, puifque $B + 5A + d - 5 = 9d + 10$, & que cet intervalle ne va que jufqu'à $D = 10d + 5$; ainfi $d > 4$.

§. 9. *PROPOS.* 5. Si le nombre e tombe entre D & E, le *maximum* de t eft encore $t = d + 2$.

Ici

Ici le *maximum* de e eſt $e = 15d + 5 = D + 4A + d - 8$, ce qui donne $t = d - 3$.

Il ne peut y avoir ici que *trois cas douteux*, dont le premier embraſſe un nombre, le ſecond deux nombres, & le troiſieme trois nombres conſécutifs.

Le *I. Cas douteux* eſt $e = D + A + d + 1 = 12d + 8$. Mais décompoſant $D = C + B + d - 2$, on a $e = C + B + A + 2d - 1 = C + B + 2A + d - 3$, ce qui, lorſque $d - 3$ eſt poſitif, donne $t = d + 1$, & dans tous les cas on a $B + 2A + d - 3 = C$, donc ce cas-ci donne $e = 2C$, donc $t = 2$.

Le *II. Cas douteux* eſt 1°. $e = D + 2A + d$, 2°. $e + 1 = D + 2A + d + 1$.

Or décompoſant D en $C + B + d - 2$, on a $e = C + B + 2A + 2d - 2$, & $2A + 2d - 2 = 3A + d - 4 = B + d - 1$, donc $e = C + 2B + d - 1$, ce qui donne $t = d + 2$. Le nombre ſuivant $e + 1$ ſeroit $= C + 2B + d$, & décompoſant B on a $e + 1 = C + B + 3A + d - 3$. Or $d - 3$ ne peut jamais être négatif ici, puiſque $e + 1 = 13d + 10$, donne, en poſant $d = 2$, 36; & que le *maximum* de $e (15d + 5)$ ne donneroit que 35.

Le *III. Cas douteux* embraſſe trois nombres, $e = D + 3A + d - 1$, $e + 1$, & $e + 2$, ou $14d + 10, 11, 12$.

Or en décompoſant D en $C + B + A - 4$, on a $e = C + B + 4A + d - 5$, ce qui donne $t = d + 1$: ou lorſque $d - 5$ eſt négatif, on recompoſe $3A$, en $B + 3$, & l'on a $e = C + 2B + A + d - 2$, donc $t = d + 2$. Car $d - 2$ ne peut jamais être négatif ici, comme il eſt aiſé de s'en convaincre; le nombre $e + 1$ ſeroit donc $= C + 2B + A + d - 1$, ce qui donneroit $t = d + 3$; mais décompoſant un B, il devient $C + B + 4A + d - 4$, donc $t = d + 2$ & $d - 4$ ne ſauroit être négatif.

Le nombre $e + 2$ donneroit donc $e + 2 = C + B + 4A + d - 3$, donc $t = d + 3$. Mais en décompoſant B, on a $e + 2 = C + 7A + d - 6$, donc $t = d + 2$.

NB. Ici $d - 6$ ne ſauroit être négatif, puiſque $d = 5$ donne $14d + 12 = 15d + 7$, ce qui excede E.

§. 10. *PROPOS. 6.* Si le nombre e tombe entre les termes E & F, la plus grande valeur de t eſt encore $d + 2$.

Le *maximum* de e eſt ici: $e = 21d + 6 = E + 5A + d - 10$.

Il ne peut y avoir ici que *quatre cas douteux*:

I. $e = E + A + d + 1$ . . . . 1 nombre.
II. $e = E + 2A + d$; $d + 1$ . . . . 2 nombres.
III. $e = E + 3A + d - 1$; d; $d + 1$ . . . 3 nombres.
IV. $e = E + 4A + d - 2$; $d - 1$; d; $d + 1$ . . . 4 nombres.

I. Décompoſant $E = D + 5d + 1$, on a $e = D + 7d + 4$. Mais $6d + 4 = C$, donc $e = D + C + d$, donc $t = d + 2$.

II. Le nombre $E + 2A + d$ eſt donc $= D + C + A + d - 1$, qui donne $t = d + 2$.

Le nombre ſuivant donneroit ici $t = d + 3$. Mais décompoſant $C = 2B - 2$, ce nombre devient $= D + 2B + A + d - 2$, lequel donne $t = d + 2$.

III. Le nombre $E + 3A + d - 1$ devient (en décompoſant E en $2C + B - 5$) $= 2C + 2B + d - 3$, donc $t = d + 1$, & $d - 3$ ne ſauroit être négatif ici. Donc le ſecond nombre $e = 2C + 2B + d - 2$ donne $t = d + 2$.

Le nombre ſuivant donneroit $t = d + 3$. Mais décompoſant B en $3A - 3$, on a ici $e = 2C + B + 3A + d - 4$, donc $t = d + 2$, & $d - 4$ ne ſauroit être négatif.

IV. Le nombre $E + 4A + d - 2$ ſe décompoſe en $D + C + 3A + d - 3$, donc $t = d + 2$. Ici $d - 3$ n'eſt jamais négatif.

Pour le nombre suivant, il faut encore décomposer C en $2B - 2$, & l'on a $e = D + 2B + 3A + d - 4$, donc $t = d + 2$.

Le 3e nombre donne $e = C + 4B + A + d - 4$, donc $t = d + 2$.

Enfin le 4e nombre $E + 4A + d + 1$ se résoud en $C + 3B + 4A + d - 6$, donc $t = d + 2$.

§. 11. *Propos.* 7. Si le nombre e tombe entre F & G, le *maximum* de t est encore $t = d + 2$.

Ici la plus grande valeur de e est $e = F + 6A + d - 12 = 28d + 7$.

Il ne peut y avoir ici que *cinq Cas douteux*

I. $e = F + A + d + 1$ . . . . 1 nomb.
II. $e = F + 2A + d,\ d + 1$ . . . . 2 - -
III. $e = F + 3A + d - 1,\ + d,\ + d + 1$ . . . . . 3 - -
IV. $e = F + 4A + d - 2,\ + d - 1,\ + d,\ + d + 1$ . . 4 - -
V. $e = F + 5A + d - 3,\ d - 2,\ d - 1,\ d,\ d + 1$ . . . 5 - -

I. Cas douteux.

Décomposant $F = E + C - 3$, on a $e = E + C + A + d - 2$, & $t = d + 1$.

Mais si $d - 2$ est négatif, on aura au moins $d = 1$, & l'on a $e = 2D + A$; ou $= E + 2B$; & dans les deux cas $t = 3 = d + 2$.

II. Cas douteux.

1er nombre $e = F + 2A + d$. Ici F se décompose en $E + C - 3$, ce qui donne $e = E + C + 2A + d - 3$, donc $t = d + 1$, & lorsque $d - 3$ est négatif, il faut décomposer $E = D + B + 2A - 6$, & l'on aura: $e = D + C + B + 4A + d - 9$. Mais $C + 4A - 7 = D$, donc $e = 2D + B + d - 2$, & $t = d + 1$.

Si $d - 2$ est encore négatif, on a $d = 1$, & recomposant on a $e = F + B - 1$, ce qui donne $t = 3 = d + 2$.

Le 2^d^ nombre n'a point de difficulté, puisqu'il donne d'abord $e = 2D + B + d - 1$, & $t = d + 2$.

III. Cas douteux.

1[er] nombre $e = F + 3A + d - 1 = E + C + B + d - 1$, donne $t = d + 2$.

2[d] nombre $e = F + 3A + d = E + 3B + d - 2$, donne $t = d + 2$.

NB. Ici $d - 2$ ne sauroit être négatif.

3[e] nombre $e = F + 3A + d + 1 = E + 2B + 3A + d - 4$, donne $t = d + 2$.

NB. Ici d ne sauroit être moindre que 2.

Mais si l'on a $d = 3$, il faut décomposer E, & recomposer les termes inférieurs, & l'on aura $e = D + 2C + 2A + d - 3$, donc $t = d + 2$.

IV. Cas douteux.

1[er] nombre $e = F + 4A + d - 2$; or $F = E + C - 3$, & $3A = B + 3$, donc $e = E + C + B + A + d - 2$, donc $t = d + 2$.

NB. Ici $d - 2$ ne sauroit plus être négatif.

2[d] nombre $e = E + C + B + A + d - 1$ exige la décomposition de C, & donne $e = E + 3B + A + d - 3$, donc $t = d + 2$.

NB. Ici $d - 3$ ne sauroit plus être négatif.

3[e] nombre $e = E + 3B + A + d - 2$ exige la décomposition de $E = D + B + 2A - 6$, qui donne $e = D + 4B + 3A + d - 8$, & en recomposant les inférieurs, $E = D + C + 3B + d - 3$, donc $t = d + 2$.

4[e] nombre $e = D + C + 3B + d - 2$. Ici il faut une décomposition, & il suffit de décomposer B, puisqu'ici $d - 5$ ne seroit pas négatif; on a donc $e = D + C + 2B + 3A + d - 5$, & $t = d + 2$.

V. Cas douteux.

1[er] nombre $e = F + 5A + d - 3$. Il faut décompoſer $F = E + C - 3$, & recompoſer $5A = B + 2A + 3$, & l'on a $e = E + C + B + 2A + d - 3$, donc $t = d + 2$.

Ici $d - 3$ ne ſauroit être négatif.

2[d] nombre $e = E + C + B + 2A + d - 2$. Ici il faut encore décompoſer $C = 2B - 2$, & l'on a $e = E + 3B + 2A + d - 4$, donc $t = d + 2$.

Ici $d - 4$ n'eſt plus négatif.

3[e] nombre $e = E + 3B + 2A + d - 3$. Ici il faut encore décompoſer B en A, & l'on a $e = E + 2B + 5A + d - 6$, donc $t = d + 2$.

Ici $d - 6$ ne ſauroit être négatif.

Le 4[e] nombre eſt donc $e = E + 2B + 5A + d - 5$; décompoſant encore un B, j'ai $e = E + B + 8A + d - 8$, donc $t = d + 2$, & la moindre valeur poſſible de d eſt ici $d = 8$.

Le 5[e] nombre eſt donc $e = E + B + 8A + d - 7$, & décompoſant encore B, il devient $e = E + 11A + d - 10$, donc $t = d + 2$.

NB. $d - 10$ ne ſauroit être négatif ſans donner e plus grand que G.

§. 12. Comme il n'eſt pas queſtion de réſoudre notre probleme par induction, il ſeroit ſuperflu de pouſſer plus loin ces recherches; les cas que nous avons développé ſuffiſent pour indiquer l'ordre & la marche du procédé qui ramene toujours au nombre fixe $t = d + 2$ la quantité des termes polygonaux néceſſaire à exprimer tout nombre entier. Le développement de cet ordre doit fournir les principes de la ſolution du probleme.

ESSAI DE SOLUTION.

§. 13. Il eſt aiſé de voir par le développement précédent:

1°. Que le nombre des Cas douteux eſt toujours égal au nombre abſolu qui accompagne le moindre des deux termes polygonaux moins deux

unités. Par exemple, entre les termes D, & E, ayant $D = 10d + 5$, le nombre des cas douteux sera $5 - 2 = 3$. Ainsi le premier intervalle qui admet des cas douteux est celui d'entre B & C, puisque $B = 3d + 3$, on a ici le nombre des cas douteux $c = 3 - 2 = 1$, donc en général ayant le terme quelconque polygonal $X = \frac{nn + n}{2}d + n + 1$, §. 1. on a entre X & Y, $c = n - 1$.

2°. Que la quantité des nombres douteux que chaque cas renferme répond exactement à l'ordre du cas: ainsi le premier cas douteux de chaque intervalle n'a qu'un seul nombre; le second embrasse *deux* nombres, le troisieme *trois* &c. donc si le nombre des cas douteux de l'intervalle X, Y est $= c$, la quantité des nombres douteux sera $= 1 + 2 + 3 + \ldots + c = \frac{cc + c}{2}$, & puisque nous venons de trouver $c = n - 1$, il y aura $\frac{nn - n}{2}$ nombres douteux dans cet intervalle. Si par exemple X est le 8me terme de la série polygonale, à commencer de l'unité, on aura $X = G = 28d + 8$, donc $c = 6$, & $n = 7$, & $\frac{nn - n}{2} = 21$.

3°. Les termes généraux qui expriment les cas & les nombres douteux d'un intervalle quelconque $X \ldots Y$ sont

$$X + 1A + (d + 1)$$
$$X + 2A + d,\ (d + 1)$$
$$X + 3A + (d - 1),\ d,\ (d + 1)$$
$$X + 4A + d - 2,\ (d - 1),\ d,\ (d + 1)$$
$$\vdots$$
$$X + cA + (d - c + 2),\ (d - c + 3)\ \ldots\ldots\ (d + 1),$$

ou

$$X + (n - 1)A + (d - n + 3),\ (d - n + 4)\ \ldots\ (d + 1).$$

4°. Le terme général qui exprime la plus grande valeur du nombre entier e à représenter dans un intervalle X, Y est $e = X + nA + (d - 2n)$. Si par ex. X est le 8me terme de la série, ou le 7me depuis A, on a $n = 7$, & $e = G + 7A + (d - 14)$.

5°. Les nombres qui répondent au premier cas douteux de chaque intervalle sont successivement

$e = 5d + 6$ entre B & C,
$e = 8d + 7$ entre C & D,
$e = 12d + 8$ entre D & E,
$e = 17d + 9$ entre E & F,
$e = 23d + 10$ entre F & G,
. .
. .
$e = \frac{nn+n+4}{2}d + n + 4$ entre X & Y.

6°. Le premier nombre des seconds cas douteux est successivement

$e = 9d + 8$ entre C & D,
$e = 13d + 9$ entre D & E,
$e = 18d + 10$ entre E & F,
$e = 24d + 11$ entre F & G,
.
.
$e = \frac{nn+n+6}{2}d + n + 5$ entre X & Y.

7°. Le premier nombre des troisiemes cas douteux est successivement

$e = 14d + 10$ entre D & E,
$e = 19d + 11$ entre E & F,
$e = 25d + 12$ entre F & G,
.
.
$e = \frac{nn+n+8}{2}d + n + 6$ entre X & Y.

8°. Résumant tous ces cas on aura le premier nombre pour chaque ordre de cas douteux, dans un intervalle quelconque

$$\text{I}^e.\ \text{cas}\ e = \left(\frac{nn+n+4}{2}\right)d + n + 4,$$

$$\text{II}^e.\ \ldots\ e = \left(\frac{nn+n+6}{2}\right)d + n + 5,$$

$$\text{III}^e.\ \ldots\ e = \left(\frac{nn+n+8}{2}\right)d + n + 6,$$

$$\text{IV}^e.\ \ldots\ e = \left(\frac{nn+n+10}{2}\right)d + n + 7,$$

$$\text{V}^e.\ \ldots\ e = \left(\frac{nn+n+12}{2}\right)d + n + 8,$$

$$\vdots$$

$$(n-1)^e.\ \ldots\ e = \left(\frac{nn+3n}{2}\right)d + 2n + 2,$$

ou pour un cas q quelconque

$$e = \left(\frac{nn+n+2q+2}{2}\right)d + n + q + 3.$$

9°. Les premiers nombres des cas douteux dans un même intervalle, croissent uniformément de la quantité $d+1$. Il en faut dire autant des seconds, des troisiemes, & des autres nombres. Mais d'un intervalle au suivant l'accroissement de ces nombres est $=(n+1)d+1$; d'un intervalle au troisieme il est parconséquent $(2n+3)d+2$; au quatrieme $(3n+6)d+3$, & en général s'il y a s sauts d'un intervalle à l'autre, l'accroissement du nombre correspondant sera $= (s+1)nd + \frac{ss+3s+2}{2}d + s + 1$.

Par ex. de C à F il y a 2 sauts, donc $s = 2$; ici $n = 3$, donc l'accroissement est $= 15d + 3$.

10°. Tout nombre douteux est contenu sous la forme:

$$(d-p+1) + aA + bB + cC + \ldots\ tT,$$

&

& pour que ce nombre puisse être exprimé par $d + 2$ termes polygonaux, il faut le transformer en sorte que l'on ait

$$a + b + c + \ldots + t - p + 1 = 2.$$

Or on peut toujours augmenter le nombre absolu négatif p; on n'a pour cet effet qu'à décomposer les grands termes de la série polygonale en d'autres plus petits, jusqu'à ce qu'on parvienne à l'équation:

$$p = a + b + c + \ldots + t - 1.$$

Mais si par cette décomposition il arrive que p devienne plus grand que d, ce qui rendroit l'expression $d + 1 - p$ négative, il est toujours possible de rendre p plus petit; il n'y a pour cet effet qu'à convertir par la synthese les polygonaux inférieurs avec leurs coëfficiens a, b, c &c. en nn ou plusieurs polygonaux supérieurs.

11°. Pour mieux juger de l'effet de la décomposition des polygonaux supérieurs, par rapport à l'accroissement du nombre absolu négatif p dans l'expression $(d - p)$, nous allons mettre sous les yeux la décomposition des sept termes qui suivent le premier terme A.

On a
$$\begin{aligned}
B &= 2A + (d - 1),\\
C &= 5A + (d - 6),\\
D &= 9A + (d - 13),\\
E &= 14A + (d - 22),\\
F &= 20A + (d - 33),\\
G &= 27A + (d - 46),\\
H &= 35A + (d - 61),\\
&\;\,\vdots\\
X &= \frac{nn + n - 2}{2}A + (d - nn + 3),
\end{aligned}$$

d'où l'on voit que par la décomposition d'un seul polygone le nombre négatif p peut augmenter dans le rapport de nn à $n + 4$, ou que son accroissement rélatif est $= \frac{1}{2}nn - \frac{1}{2}n - 2$. Ainsi par ex. changeant le polygonal F en 20 polygonaux A, ayant ici $n = 6$, on gagne sur p,

$\frac{36}{2} - \frac{6}{2} - 2 = 13$. En effet on a ici $-p = -33$, d'où retranchant le coëfficient de $A = 20$, reste 13.

Il n'est pas besoin de faire remarquer que cet accroissement du nombre absolu négatif peut être modifié presque à volonté si, au lieu de décomposer un polygonal quelconque en A, on le décompose en B, C, D &c. c'est ce qu'il est aisé de conclure de ce que nous allons dire de la recomposition.

12°. Dans la réduction des polygonaux A en des polygones supérieurs, on a:

$$3A = B + 3,$$
$$6A = 2B + 6 = C + 8,$$
$$10A = 3B + A + 11 = C + B + A + 13 = D + 15,$$
$$15A = 5B + 15 = 2C + B + 19 = D + B + 2A + 18 = E + 24,$$
$$21A = 7B + 21 = 3C + B + 27 = 2D + A + 30 = E + C + 32 = F + 35,$$
$$28A = 9B + A + 27 = 4C + B + A + 35 = 2D + C + 2A + 38 = E + D + B + 42 = F + C + A + 43 = G + 48,$$

d'où l'on voit en général que chaque nombre $\frac{nn+n}{2}A$ se recompose en $n - 1$ manieres différentes, par l'accession d'un nouveau terme, & comme chacun de ces nouveaux termes peut se résoudre en tous les termes au-dessous de lui, il en résulte $\frac{nn+n}{2}$ combinaisons possibles. Mais la quantité de nombres douteux dans un intervalle n'est que $\frac{nn-n}{2}$. §. 13. N°. 2. Il y a donc pour chaque intervalle tout au moins autant de combinaisons différentes possibles qu'il en faut pour satisfaire à tous les nombres douteux renfermés dans cet intervalle.

Par exemple, dans l'intervalle F, G, on a $n = 6$, il y a donc 15 nombres douteux. Mais $F = 20A + A - 33 = 21A - 35$, & $21A$ peut être exprimé (N°. 12.) en cinq manieres générales, savoir par

B, C, D, E, & F, dont F se décompose tout au moins en 5, E en 4, D en 3, C en 2, B en 1; on a donc $15 + 6 = 21$ expressions pour satisfaire à l'équation $x = d + 2$.

§. 14. Observons encore que la quantité des nombres douteux, quoique déterminée en soi (§. 13. N°. 2.), peut diminuer considérablement selon la valeur de la différence constante d, ce qui est aussi assujetti à un ordre régulier. En effet comme dans un intervalle quelconque X, Y, le moindre nombre renfermé entre X & Y, est $X + 1$, & le plus grand $X + (n + 1)d$, (§. 13. N°. 4.), & que le plus grand nombre douteux est $X + (n - 1)A + d + 1$, toutes les fois que l'on aura $(n - 1)A + d + 1 > (n + 1)d$, ce nombre douteux n'existera pas. Or $(n + 1)d = (n - 1)A + 2d - 2n + 2$, donc le nombre douteux cesse lorsque $2n > d + 1$.

Pareillement le moindre nombre douteux de la premiere classe ou du premier cas est $X + A + d + 1$, donc quand $A + d + 1$, ou $2d + 3 > (n + 1)d$, tous les cas & les nombres douteux cessent. Or cela suppose $3 > (n - 1)d$. D'où l'on peut former les Tables suivantes.

Il n'y a point de 1^r cas douteux si $3 > (n - 1)d$,
2^d . . . si $4 > (n - 2)d$,
3^e . . . si $5 > (n - 3)d$,
.
.
$(n - 1)$^e . . . si $n > d - 1$.

Le plus grand nombre douteux cesse
dans le 1^r cas si . . . $3 > (n - 1)d$,
dans le 2^d . . si . . $5 > (n - 2)d$,
dans le 3e . . si . . $7 > (n - 3)d$,
.
.
dans le $(n - 1)$^e si . . . $2n > d + 1$.

Ainſi dans le cas quelconque q le nombre douteux quelconque m ceſſera d'exiſter, ou, ce qui revient au même, excédera le plus grand nombre renfermé dans l'intervalle de deux polygonaux immédiats lorſque $q + m + 1 > (n - q)d$.

Soit par ex. q le 4e cas, ou la quatrieme claſſe de nombres douteux, m le troiſieme nombre de cette claſſe à commencer du plus petit; on aura $q = 4$, $m = 3$, donc ſi $8 > (n - 4)d$, ce nombre tombe au-delà de l'intervalle donné. Car ce nombre ſeroit $X + 4A + d$, & ſi $4A + d > (n + 1)d$, on a $5d + 8 > (n + 1)d$, donc $8 > (n - 4)d$. Ainſi lorſque X eſt le huitieme polygonal à commencer de A, on a $n = 8$, donc lorſque $d = 1$, le nombre $X + 4A + d$ tombe déjà au-delà de Y, parce qu'alors on a $8 > 4d$.

§. 15. Pour démontrer rigoureuſement le Théoreme général de Mr. Fermat il ſuffiroit donc de démontrer qu'un nombre douteux quelconque énoncé généralement peut toujours être exprimé par $d + 2$ nombres polygonaux. Or ce nombre général ſeroit exprimé §. 14. par cette forme: $e = X + (q)A + d - q + m + 1$, où X déſigne le polygonal quelconque d'où commence l'intervalle X, Y; q déſigne la claſſe où ſe trouve le nombre douteux, & m le quantieme nombre douteux de cette claſſe; de ſorte que $m = 1, 2, 3 \ldots q$. Il eſt évident que ce nombre, s'il ne pouvoit pas être réduit ſous une autre forme, ſeroit exprimé par $d + 2 + m$ polygonaux. Il s'agit donc de décompoſer les grands polygonaux X, V, T &c. & de recompoſer les petits A, B, C, juſqu'à ce que le nombre m ſoit éclipſé.

Or on a par la nature des polygonaux: $X = V + nd + 1$, & $nd = nA - 2n$; on a donc:

$$e = V + (q + n)A + d + m + 2 - q - 2n,$$

ce qui donneroit $t = d + 3 + m - n$. Mais la plus grande valeur de m eſt $m = q$ (§. 13. N°. 2.) & la plus grande valeur de q, eſt $c = n - 1$, (§. 13. N°. 1.) Ainſi la plus grande valeur de m eſt $m = n - 1$. Dans ce cas on auroit $t = d + 2$.

Dans toute autre valeur de m il eſt évident que le nombre e feroit exprimé par moins de $d + 2$ termes polygonaux; car le nombre des claſſes q n'entre plus dans l'expreſſion de t, & la plus grande valeur poſſible de m étant $m = n - 1$, toutes les autres valeurs donneront $t < d + 2$.

Mais par cette même conſidération il peut très aiſément arriver que la décompoſition de X en V rende la quantité $d + m + 2 - q - 2n$ négative, quoique e ſoit contenu dans l'intervalle X, Y, & dans ces cas-là il ne feroit point clair combien de polygonaux il faut pour exprimer le nombre e. Ce qu'on voit c'eſt que les polygonaux trouvés $V + (q + n)A$, ne ſont pas propres à exprimer le nombre e puiſqu'ils l'excedent. Mais de même que la décompoſition du grand terme X en V, & A, a donné une valeur négative, de même la recompoſition des A en B, C, D &c. diminuera les nombres négatifs, juſqu'à les rendre poſitifs; car on a $(q + n)A = B + (q + n - 3)A + 3$, & par conſéquent:

$$e = V + B + (q + n - 3)A + d + m + 5 - q - 2n,$$

donc $t = d + 4 + m - n$. Ainſi le nombre négatif a diminué de 3, & celui des polygonaux n'a augmenté que de l'unité.

§. 16. La généralité des expreſſions V, q, n, m, ne permet pas de montrer que l'on parviendra toujours à une ſubſtitution qui donne $t = d + 2$. Ainſi je ne crois pas qu'on puiſſe par cette voie parvenir à une démonſtration rigoureuſe du Théoreme général. Mais en démontrant 1°. qu'il ne peut y avoir de doute que ſur les nombres entiers que j'ai indiqués; 2°. qu'il y a dans tous les intervalles autant de ſubſtitutions différentes à choiſir qu'il y a de nombres douteux; 3°. que la même raiſon ſuffiſante qui fait que dans les ſept premiers intervalles on arrive toujours à une expreſſion où l'on a tout au plus $t = d + 2$, a également lieu dans un intervalle quelconque, puiſqu'à meſure que l'intervalle croît, le nombre des décompoſitions & des réductions des polygonaux croît auſſi en même raiſon, ou plutôt en raiſon plus forte; 4°. qu'à meſure que les nombres douteux renfermés dans un intervalle quelconque X, Y, s'éloignent de X pour s'approcher de Y, la valeur abſolue de d croît auſſi; en ſorte que les nombres négatifs qui l'accompagnent, par ex. $- q - 2n$, peuvent de-

venir toujours plus grands sans rendre l'expression $d + m - q - 2n$ négative, on aura prouvé, ce me semble, qu'il n'y a point de raison de douter de la vérité du Théoreme de M. Fermat pour les nombres d'un intervalle donné, & par conséquent pour un nombre entier quelconque.

§. 17. Pour montrer, autant que la nature du sujet le permet, qu'il y a une raison suffisante de s'assurer que dans tous les cas douteux on peut réduire le nombre e à $d + 2$ polygones, nous allons encore faire une petite analyse de la décomposition d'un polygonal, rélativement à la quantité de termes polygonaux que le nombre e exige.

Que e soit représenté par t polygonaux, lorsque l'on emploie à le représenter le polygonal X, il s'agit de voir quel rapport ce nombre t aura au nombre t', qui résultera de la décomposition de X.

Or $X = V + nd + 1$, & ayant toujours $nd = nA - 2n$, on a:

$$X = V + nA - 2n + 1, \quad \text{donc } t.t' :: 1 . 2 - n.$$

Mais par la même formule on aura $V = T + n'A - 2n' + 1$, & ayant ici $n' = n - 1$, cette substitution donne:

$$X = T + (2n - 1)A - 4n + 4, \quad \text{donc } t.t'' :: 1 . 4 - 2n.$$

Par la même méthode on trouvera:

$$X = S + (3n - 3)A - 6n + 9, \quad \text{donc } t.t''' :: 1 . 7 - 3n.$$
$$X = R + (4n - 6)A - 8n + 16, \quad \text{donc } t.t^{IV} :: 1 . 11 - 4n.$$

D'où l'on voit qu'en général en décomposant le polygonal X en un terme quelconque inférieur Q, en supposant qu'à commencer de A, X est le n^{me}, & Q le $(n - p)^{e}$ de la série, on aura:

$$X = Q + \left(pn - \frac{(pp - p)}{2}\right)A - 2pn + pp,$$

$$\text{donc } t . t^{p} :: 1 . \frac{pp + p + 2}{2} - pn.$$

Or la plus grande valeur possible de p est $n - 1$, & la moindre, $p = 1$; posant donc $p = n - m$, on aura $m = 1, 2 \ldots (n - 1)$, ou $m < n$, & $t . t^{p} :: 1 . \frac{mm + n - m - nn + 2}{2}$; valeur qui est toujours négative dès

que $n > 2$, ou au lieu du rapport considérant le nombre absolu des polygones que la décomposition de X & Q fait évanouir, on trouve ce nombre $= pn - \frac{1}{2}pp - \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}mm - \frac{1}{2}n = \frac{nn-n}{2} - \frac{mm-m}{2}$.

§. 18. Réciproquement en recomposant les A en des polygones supérieurs, on augmente le nombre des polygonaux dans la raison suivante, comme il est aisé de s'en convaincre,

de A en B on a $t . t' :: 3 . 4$,
A . . C . . $t . t'' :: 6 . 9$.
A . . D . . $t . t''' :: 10 . 16$.
.
.
A . . X . . $t . t^{n-1} :: \left(\frac{nn+3n+2}{2}\right) . (nn + 2n + 1)$,

en sorte que sur chaque B qu'on tire des A, on augmente le nombre des termes polygonaux de 1; sur chaque C, de 3; sur chaque D, de 6; & en général sur chaque polygone de l'ordre n, ce nombre augmente de $\frac{nn+n}{2}$ polygonaux. On trouvera de même qu'en réduisant B dans les polygonaux supérieurs

on augmente sur	C . . .	1
	D . . .	2
	E . . .	5
	F . . .	8
	G . . .	11 &c.

Pareillement les C recomposés donnent sur	D . . .	0
	E . . .	2
	F . . .	4
	G . . .	6
	H . . .	10.

Il ſemble au premier coup d'œil que la compoſition & la décompoſition devroient produire un effet contraire, puiſqu'un grand polygone en donne pluſieurs moindres, & que pluſieurs moindres n'en font qu'un ſeul plus grand. Auſſi, excepté les nombres abſolus, ou les polygonaux d'unités, il eſt très vrai que la décompoſition augmente le nombre des polygones, & que la compoſition les diminue; mais cette augmentation & cette diminution eſt toujours accompagnée d'une diminution plus forte dans les unités, ou dans les nombres abſolus, ce qui produit la diminution totale du nombre des polygones dans la décompoſition, & l'augmentation dans la recompoſition.

§. 19. Quand donc un nombre douteux quelconque
$e = X + qA + d + 1 - s$ donne
$t = d + 2 + y$, on eſt toujours ſûr de pouvoir faire évanouir ce nombre y par la décompoſition de X en V, ou en T, ou en S &c. puiſque chaque décompoſition diminue t, & par conſéquent y, d'une quantité $\frac{nn-n}{2} - \frac{mm-m}{2}$; mais il en réſultera le plus ſouvent une quantité négative $-z$; ce qui ne ſeroit pas un inconvénient tant que $d + 2 - z$ ſeroit poſitif; cela prouveroit ſeulement que le nombre e peut être exprimé par moins de $d + 2$ polygonaux. Dans le cas au contraire où $d + 2 - z$ ſera négatif, il faudra, comme nous l'avons déjà montré, recompoſer les polygonaux inférieurs, juſqu'à ce que, ou $-z$ évanouiſſe, ou du moins $d + 2 - z$ devienne poſitif.

Or puiſque ſur chaque B tiré des A on augmente de *un* la quantité $d + 2 - z$, il eſt clair que cette ſeule réduction ſuffiroit, quel que fût le nombre z, à le faire diſparoître, pourvû que l'on eût $3zA$ à recompoſer. Mais ſi on n'a pas $3zA$ à réduire, on peut changer les A en C, parce que ſur cette réduction on gagne une unité de plus que ſur celle de A en B, puiſque $6A = 2B + 6 = C + 8$. Par la même raiſon, en changeant les A en D on augmente les unités de *ſix;* au lieu que la même quantité de A, réduite à des B, n'augmente les nombres abſolus que de *trois;* ou de *quatre*, étant réduite à C & B.

Pareillement

Pareillement en réduisant les A en E, on gagne sur chaque E *dix* unités; la composition en $5B$ ne feroit gagner que *cinq*; en $C + 3B$ *six*; en $2C + B$ *sept* &c.

Il est vrai que ces diverses réductions ne donnent pas tous les nombres naturels, & qu'ainsi on ne sauroit toujours faire disparoître le nombre négatif $- z$, par la composition des A. Mais cela n'est pas nécessaire non plus pour prouver la vérité du Théoreme; il suffit qu'on puisse toujours diminuer les unités que z renferme, au point que $d + 2 - z$ devienne positif, ce qui doit toujours être possible, puisque par le §. 14, à mesure que q & n croissent, d croît aussi, en sorte qu'il n'est pas besoin de détruire z, pour rendre $d + 2 - z$ positif; & obtenir l'unique chose requise ici.

§. 20. C'est donc la composition & la décomposition des nombres douteux qui renferme la raison suffisante de l'universalité du Théoreme de Mr. Fermat à l'égard de ces nombres-là; il ne reste plus qu'à montrer que sur tous les autres nombres entiers, ce Théoreme est évidemment démontré. C'est ce qui est manifeste par l'expression même de ces nombres.

Il est d'abord clair que tous les nombres X, $X + 1$, $X + 2$ &c. jusqu'à $X + d + 1$, donnent $t = 1, 2, 3, 4 \ldots (d + 2)$; or le nombre suivant $X + d + 2$ est $= X + A$, & par conséquent $X + A$, $X + A + 1$, $X + A + 2 \ldots X + A + d$, donnent $t = 2, 3, 4 \ldots (d + 2)$. Ainsi le premier nombre douteux est $X + A + d + 1$. Or le suivant $X + A + d + 2$ est $= X + 2A$. Ainsi $X + 2A$, $X + 2A + 1$, $X + 2A + 2 \ldots X + 2A + d - 1$, donnent $t = 3, 4, 5 \ldots (d + 2)$.

Par la même raison ayant $X + 2A + d + 2 = X + 3A$, on a de là jusqu'à $X + 3A + d - 2$, $t = 4, 5, 6 \ldots (d + 2)$.

Il en sera de même des cas suivans jusqu'au nombre $X + (n - 2)A + d + 2 = X + (n - 1)A$ toute la suite jusqu'à $X + (n - 1)A + d + 2 - n$, donne $t = n, n + 1, n + 2 \ldots (d + 2)$.

Enfin au-delà du dernier nombre douteux $X + (n - 1)A + d + 1$ le premier qui ſuit ſera $X + nA$, & le dernier de l'intervalle eſt $X + (n + 1)d$, (§. 13. N°. 4.) $= X + nA + d - 2n$; ces nombres donnent $t = (n + 1), (n + 2), (n + 3) \ldots (d + 1 - n)$.

Ainſi le ſeul ſcrupule qui pourroit reſter ſeroit la poſſibilité que l'on eût $d < n$. Mais dans ce cas-là le premier nombre de la claſſe $X + nA = X + nd + 2n$ ſeroit plus grand que le dernier nombre de l'intervalle qui eſt $X + nd + d$, (§. 13. N°. 4.); ce nombre appartiendroit donc à un intervalle ſuivant entre les polygonaux Y & Z.

ADDITION AU PRÉCÉDENT MÉMOIRE.

§. 21. En réfléchiſſant ſur cette propriété de la ſérie polygonale, que $d + 2$ termes de cette ſérie ſuffiſent pour exprimer tous les nombres entiers, il paroit évident que ce qui rend cette propriété poſſible c'eſt 1°. parce que le premier terme de cette ſérie eſt l'unité, 2°. que cette ſérie a une différence conſtante; car ſi toutes les différences étoient variables, le nombre t ne pourroit jamais être conſtant. Il ſemble donc qu'on en peut conclure que toute progreſſion algébrique d'un ordre n quelconque dont le premier terme eſt $= 1$, doit exprimer tous les nombres entiers poſſibles au moyen de la ſomme d'un certain nombre t de ſes termes.

§. 22. Mais la difficulté conſiſte à déterminer par une formule générale cette valeur de t pour toutes les progreſſions algébriques. Ce qui eſt évident, c'eſt que la progreſſion étant: $1, A, B, C, D \ldots$ on ne ſauroit avoir $t < A - 1$; enſuite il paroit clair que plus il y aura de différences variables, plus auſſi le nombre t doit être plus grand que $A - 1$; enfin la valeur abſolue d de la différence conſtante doit entrer pour quelque choſe dans la détermination de t. Or il eſt viſible qu'elle n'y entre pas toute entiere, puiſque dans la ſérie polygonale elle ne contribue point à augmenter la valeur de t; il ſemble donc qu'elle n'y contribue que dans ſon rapport à $A - 1$. D'après ces élémens on auroit dans une progreſſion

algébrique quelconque $t = A - 1 + n - 1 + \frac{d}{A-1}$, ou $t = A + n + \frac{d}{A-1} - 2$, bien entendu que de la fraction $\frac{d}{A-1}$ il n'y a que les entiers qui entrent en considération.

Dans les nombres pyramidaux si les côtés du polygone sont $= p$, l'ordre du pyramidal $= m$, on aura $A = p + m$, & la progression étant ici de l'ordre $m + 2$, on a $n = m + 2$, & $d = p - 2$; donc $\frac{d}{A-1}$, ne donne point d'entiers, & l'on auroit par la formule $t = p + 2m = p + 2n - 4$.

Par ex. dans la série 1. 5. 15. 35. 70 ... on a $p = 3$, $m = 2$, $n = 4$, donc on auroit $t = 7$.

Dans la série 1. 5. 14. 30. 55 ... on a $p = 4$, $m = 1$, $n = 3$, donc $t = 6$.

Dans la série: 1. 6. 20. 50. 105 ... on a $p = 4$, $m = 2$, $n = 4$, donc $t = 8$.

Dans la série: 1. 8. 35. 112. 294 ... on a $p = 4$, $m = 4$, $n = 6$, donc $t = 12$.

Dans la série: 1. 10. 55. 220. 2002 ... on a $p = 3$, $m = 7$, $n = 9$, donc $t = 17$.

Dans la série des puissances, on a $A = 2^n$, $d = (1 \times 2 \times 3 \times \ldots n)$, donc $t = 2^n + n + \frac{(1 \times 2 \times 3 \times \ldots n)}{2^n - 1} - 2$.

Donc cette formule donneroit

pour $n =$	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
$t =$	1.	4.	9.	19.	38.	79.	172.

§. 23. Mais quoique cette formule semble se vérifier dans les progressions des nombres pyramidaux, dans celles des puissances, & dans diverses autres, je ne dois pas dissimuler qu'elle ne se soutient pas généralement. M. *Euler*, à qui je l'ai communiquée, m'a fait remarquer que s'il y avoit une formule générale possible, il faudroit que le premier terme de

chaque différence y entrât pour quelque chofe; puifque fans cela on pourroit toujours, en déterminant arbitrairement ces premiers termes, trouver des progreffions auxquelles la formule ne feroit pas applicable. J'ai même remarqué que dans la progreffion pyramidale 1. 5. 15. 35. 70. 126 .... où felon la formule ci-deffus on auroit $t = 7$, il faut huit termes pour exprimer le nombre 64. La raifon en eft que dans les quatre premiers termes A, B, C, D, il entre à chaque terme une nouvelle indéterminée, puifqu'il y a ici quatre différences; & que chaque indéterminée peut augmenter la valeur de t, dans l'intervalle où elle entre; raifon qui ceffe dès qu'il n'entre plus de nouvelles indéterminées. Ainfi il paroit qu'il ne fauroit y avoir une formule générale, mais que pour chaque progreffion algébrique il faut tout au moins trouver la plus grande valeur de t dans les n premiers intervalles, avant d'en conclure qu'elle fuffira dans tous les intervalles fuivans.

Les deux premiers intervalles d'une progreffion algébrique quelconque ne fouffrent point de difficulté. D'abord l'intervalle $1 \,.\,.\, A$ donne $t = A - 1$, & fi l'on nomme le premier terme de chaque différence fucceffive a, b, c, d &c. on a $A = a + 1$, donc pour le premier intervalle, $t = a$.

Quant au fecond intervalle $A \,.\,.\, B$, foit q le nombre qui exprime combien de fois A eft contenu en B, en forte qu'il refte encore au moins A, mais non $2A$; la plus grande valeur de t dans cet intervalle fera $t = a + q$, & pofant $qA + a = B - m$, on aura $q = \frac{B - a - m}{A}$; or on a toujours $B = b + 2a + 1$, donc $t = a + \frac{b + a + 1 - m}{a + 1}$, en forte que $m = 1, 2, 3 \,.\,.\,.\, A$ foit tout au moins $= 1$, & tout au plus $= a + 1$, & en général $m = b + a + 1 - (a + 1)q$. Lors donc que la fraction $\frac{b + a + 1 - m}{a + 1}$ donne des entiers, ce qui doit arriver toutes les fois que l'on a $b > m - 1$, l'intervalle $A \,.\,.\, B$ donnera t plus grand que ne l'avoit donné l'intervalle $1 \,.\,.\, A$. Dans les féries polygonales, par

exemple, où l'on a $m = a - 1 = b$, cette fraction devient $\frac{a+1}{a+1} = 1$, donc $t = a + 1$.

Le troisieme intervalle $B \,.\,.\, C$ est déjà plus compliqué, parce que le même nombre e compris dans cet intervalle, qui exigeroit la plus grande quantité de termes pris d'une certaine maniere, peut en exiger moins, en les prenant d'une autre façon. Si, par exemple, pour avoir le plus grand reste d'unités a, on ne peut prendre que q fois B en sorte qu'il reste $rA + a$, le nombre $e = qB + rA + a$ sera le nombre de l'intervalle $B \,.\,.\, C$, qui donne la plus grande valeur de t, laquelle sera $t = q + r + a$, & l'on auroit $q = \frac{C - rA - a - m}{B} = \frac{c + 3b + (1 - r)a - m}{b + 2a + 1}$; mais il peut très aisément arriver qu'on ait $qB + rA + a = (q - s)B + (r + x)A + a - u$, & par conséquent $t = q + r + x + a - s - u$. Toutes les fois donc que les nombres négatifs $s + u$, excéderont le positif x, la valeur de t sera diminuée par cette transformation.

A plus forte raison le même cas aura lieu, & en plus d'une maniere, dans les intervalles supérieurs; de sorte qu'il n'y a dans les progressions algébriques au-delà du second ordre, que le développement d'autant d'intervalles qu'il y a de différences qui puisse indiquer la véritable valeur de t. Encore ce développement jusqu'à l'intervalle n ne suffira-t-il pas toujours; car quoique la raison des nouvelles indéterminées cesse au-delà de cet intervalle, il peut arriver néanmoins que la valeur de t croisse encore, par la raison que le nombre dans l'intervalle quelconque ultérieur $X \,.\,.\, Y$, qui doit produire cet accroissement $e = a + qA + pB + nC + \ldots + X$, ne sera ni réductible à de moindres termes, ni plus grand que Y. Mais les cas où ni l'une ni l'autre de ces conditions n'aura lieu, doivent être bien rares, & ne peuvent gueres prolonger le développement au-delà des premiers termes qui suivent l'intervalle n.

SUR LE PROBLÈME DE MOLYNEUX.

PAR M. MERIAN.

TROISIÈME MÉMOIRE.

§. 1.

Théorie du Docteur BERKELEY.

Le philoſophe qui réclame aujourdhui votre attention, eſt bien digne de l'obtenir: c'eſt le Docteur Berkeley, mort Évêque de Cloyne en Irlande, eſprit ſubtil, métaphyſicien profond s'il en fut jamais. Il n'eſt pourtant queſtion ici ni du ſyſtême de l'Idéaliſme, dont il fut le zélé defenſeur, ni de l'eau de goudron, dont il a ſi fort prôné les merveilles. Un ouvrage antérieur de ce ſavant homme doit fixer nos regards, ouvrage qui a déjà paru en 1709, ſous le titre, *Eſſai d'une nouvelle Théorie de la Viſion.*

Cette Théorie a joui d'un avantage rare, & dont peu d'écrits philoſophiques peuvent ſe glorifier, c'eſt d'avoir été, au bout de vingt ans, confirmée par l'Expérience, je veux dire par les obſervations faites ſur les aveugles-nés à qui l'on a réuſſi à abattre la cataracte; j'aurai ſoin de le faire remarquer dans le cours de ce Mémoire.

Or, ſi cette théorie eſt vraie, elle détruit, ou du moins elle ébranle puiſſamment les ſolutions du problème de Molyneux que nous avons propoſées dans notre dernier Mémoire. Mais comme elle n'a point été imaginée dans ce deſſein, & qu'en 1709 Mr. Berkeley ne connoiſſoit, ni ne pouvoit connoître aucune de ces ſolutions; il nous faudra prendre ici ſa place, & nous charger de l'application des principes que ſon livre nous fournit. Je vais donc les y puiſer, en développer les conſéquences, les étendre par des réflexions nouvelles, & par la voie la plus courte, & la plus lumineuſe, les amener à mon ſujet.

En tout ceci je ne parle pas en mon propre nom. Je continue de faire l'office d'historien ou de rapporteur: & je me transforme tour à tour en divers personnages, pour épuiser, autant qu'il est en moi, les matières que je traite, & pour les présenter par toutes leurs faces. Si donc ici je me fais un rempart de la doctrine du Docteur Berkeley, c'est pour éprouver la solidité de ce rempart; si je combats avec ses armes, c'est pour en essayer la trempe. Après quoi, il me sera libre de réfuter sa Théorie, ou d'en relever les endroits foibles, si tant est que je les puisse découvrir.

§. 2.

Application de cette Théorie.

Nous avons vu que les philosophes qui accordent à l'aveugle-né le pouvoir de distinguer le globe du cube, se fondoient sur l'identité soit des perceptions, soit des idées transmises par la Vue, & par le Toucher. L'étendue & les figures que nous voyons, & l'étendue & les figures que nous touchons, ne peuvent être les mêmes que de deux manieres; ou c'est la même perception immédiate qui affecte la Vue & le Toucher; ou c'est la même idée abstraite, tirée des perceptions immédiates que nous offrent ces deux sens. Il faut donc les envisager sous ce double aspect: & si nous prouvons que le sens de la Vue & celui du Toucher ne sauroient transmettre à l'ame ni les mêmes perceptions, ni les mêmes idées, nous aurons renversé, d'un seul coup, tous les argumens qui militent en faveur de ces philosophes.

§. 3.

Si la figure vue, & la figure touchée donnent la même perception immédiate.

Et d'abord, si l'Étendue & la Figure sont dans la classe des perceptions, ou des qualités sensibles dont nous sommes immédiatement affectés, il est contradictoire qu'elles soient les mêmes pour les deux sens. Voir une qualité tangible, toucher une qualité visible; ce seroit voir par le Tact, & toucher par la Vue; ce seroit voir ce qu'on ne voit pas, & toucher ce que l'on ne touche pas.

Nos ſens ont leurs limites exactement marquées, & ne ſauroient empiéter l'un ſur l'autre. L'ame eſt modifiée par chacun d'eux d'une façon particulière; & ces modifications conſtituent les diverſes qualités ſenſibles. Si donc l'Étendue & la Figure tangibles & viſibles ſont au nombre de ces qualités, loin d'être les mêmes, il n'y a pas plus de reſſemblance entr'elles qu'entre les ſons & les odeurs, ou entre les odeurs & les couleurs, ou entre les couleurs & les ſaveurs: & il ſera tout auſſi abſurde de prétendre voir une figure tangible, ou toucher une figure viſible, que de vouloir flairer un ſon, voir une odeur, ou ſavourer une couleur.

A parler rigoureuſement, il eſt donc faux que nous puiſſions jamais voir & toucher la même choſe. Nous pouvons exercer ces deux ſens à la fois, & par là former des liaiſons entre les perceptions & les idées introduites par la Vue, & par le Toucher; mais les perceptions qui nous viennent immédiatement de ces deux ſens, n'en demeurent pas moins diſtinctes & diſſemblables. Que par exemple un ſon & une couleur ſe préſentent, en même tems, à mon eſprit; cela peut, à la longue, les lier dans mon imagination; mais cela ne les fait point reſſembler. Il en eſt ainſi de toutes les autres qualités ſenſibles, & par conſéquent des qualités tactiles & viſuelles, & par conſéquent de l'Étendue & de la Figure tangibles & viſibles. Elles peuvent s'aſſocier, s'unir; mais cette union, quelque étroite qu'elle ſoit, ne les fait point changer de nature.

Je ſais que ces deux eſpèces d'étendue & de figure portent le même nom, & j'en dirai la raiſon plus bas. Ici je me contente d'obſerver que l'identité du nom n'emporte point l'identité de la choſe. Lorſque, dans deux langues, le même mot s'emploie en deux ſens, perſonne ne s'aviſe, pour cela, d'identifier les objets qu'il déſigne. En Latin le mot *cor* ſignifie le cœur, & en françois une trompe de chaſſe. Il ne s'enſuit point de là que le cœur ſoit une trompe de chaſſe, ni rien d'approchant. Et lorſque, dans la même langue, je donne à mon chien le nom d'*Hector*, le héros de Troie n'eſt point par là métamorphoſé en chien, ni le chien en héros.

C'eſt ainſi que chaque Sens a ſon langage propre; & lorſque les mêmes termes s'y rencontrent, les choſes ſignifiées ne laiſſent pas d'être d'une

nature

nature différente. On dit *une douce mélodie*, *un son aigu*, *un esprit pesant*. Est-ce à dire que l'on peut savourer ou toucher les sons, & peser les esprits à la balance? Jugeons de même des mots d'étendue & de figure, appliqués également aux qualités visuelles, & aux qualités tactiles: & nous concevrons que leur identité nominale ne prouve point leur identité réelle.

L'aveugle qui ouvre les yeux, est frappé de sensations toutes neuves, pour lesquelles il n'a point encore de langue; & si on la lui laissoit faire, il ne penseroit pas seulement à se servir d'aucun des termes qui lui désignent les objets tangibles: tant l'intervalle doit lui paroître immense entre ces deux sortes d'objets; tant il est loin de soupçonner que ce qu'il voit, puisse être ce qu'il a touché. Et c'est ce que l'expérience a constaté dans les aveugles-nés à qui l'opération de la cataracte a procuré l'usage de la vue.

§. 4.

Si la figure visible & la figure tangible donnent la même idée abstraite.

Nous venons de démontrer que la perception immédiate ne nous découvre rien de commun, rien de semblable entre l'Étendue & la Figure tangibles & visibles. Voyons à présent si cette identité, ou cette ressemblance, réside dans l'idée abstraite que nous nous formons de l'étendue ou des figures.

L'aveugle-né, dira-t-on, s'est fait des idées abstraites de la sphéricité & de la figure cubique, d'après les impressions qu'il a reçues par le Toucher. Il procède de la même maniere sur le globe & le cube devenus visibles; & les mêmes idées renaissent dans son esprit. D'où il conclut que les figures qu'il voit sont les figures qu'il a touchées.

Cela est bientôt dit; mais en supposant même la possibilité de ces opérations, nous avons déjà fait voir (*) que la chose n'est pas, à beaucoup près, aussi aisée qu'on se l'imagine. Que de réflexions & de combinaisons cela n'exigeroit-il pas? Que de perplexités, & de doutes ce voyant novice n'éprouvera-t-il pas, avant de parvenir à ranger les figures visibles en classes, & à esquisser dans son esprit des notions aussi pures, & aussi quintessenciées,

(*) V. Mém. II.

que celles du cube & du globe visible en général? Pour peu que l'on y songe, on ne conçoit gueres qu'il puisse y réussir sans le concours du sens de la Vue avec celui du Toucher.

§. 5.

Sentiment du Docteur BERKELEY sur les idées abstraites.

Mais il y a plus. Ces prétendues abstractions ne sauroient avoir lieu, & ne sont que de belles chimères.

Vous me parlez d'idées communes, extraites également des impressions que font sur nous la Vue & le Toucher. Ces idées en quoi consistent-elles? que sont-elles? où sont-elles? Il faudroit nécessairement qu'elles fussent dépouillées de toute couleur, de toute solidité, en un mot, de toutes les qualités visibles & tactiles, & même de tout ce qui est matériel. Or il n'y a point de pareilles idées. Ni le Toucher, ni la Vue, ni aucun sens ne sauroit nous les transmettre; & ce qu'on nomme l'Entendement pur ne sauroit les enfanter.

J'en appelle à l'Expérience. Essayez de concevoir un globe, un cube, une figure quelconque, une surface, une ligne, un point, qui ne soit ni coloré, ni solide: & vous vous convaincrez que cela est au-dessus de vos forces. Quand vous aurez exclu toutes les qualités tactiles & visuelles, il ne vous restera rien dans l'esprit.

Je comprends très-bien que je puis abstraire les unes des autres les parties intégrantes dont les objets matériels sont composés. Ainsi dans un homme je puis considérer séparément la tête, les bras, les pieds &c. Mais si je veux écarter de ma conception tout ce qui est visible, palpable, ou appercevable par quelque autre sens, l'objet s'évanouit tout entier, sans laisser la moindre trace après lui.

C'est donc à tort que l'on croit pouvoir se former de la figure cubique, & de la figure sphérique, des idées abstraites & générales, dans la signification que l'on attache à ces termes.

Rien n'existe en général; tous les philosophes en conviennent. Cependant ils admettent des idées générales; exception singuliere; tout comme

ſi les idées n'exiſtoient point, ou pouvoient s'affranchir de la loi préſcrite à toutes les exiſtences; tout comme ſi elles pouvoient être, ſans être d'une manière déterminée. Vous demandez, par exemple, ce que c'eſt que l'idée du Triangle en général. Voici l'étrange définition que vous en donnera le ſage Locke. C'eſt l'idée d'un triangle qui n'eſt ni rectangle, ni obliquangle, ni équilatéral, ni iſocèle, ni ſcalène, ni de telle ou de telle grandeur, ni de telle ou de telle couleur; qui n'eſt rien de tout cela, & qui pourtant eſt tout cela enſemble; car il comprend tous les triangles poſſibles, avec toutes leurs modifications poſſibles. Eſt-il jamais monté dans l'eſprit de l'homme une idée auſſi bizarre, compoſée de parties auſſi diſcordantes? ou plutôt peut-on donner le nom d'idée à cet amas de contradictions?

Mais en renonçant à ces idées, & en les renvoyant aux ténèbres de l'École d'où elles ſont ſorties, à quoi ſe réduiſent ces abſtractions, & ces généraliſations dont les philoſophes font tant de bruit? A deux choſes, à des images, & à des ſignes.

D'abord les impreſſions ſenſibles laiſſent dans l'Imagination des peintures qui nous les retracent au beſoin, & qui par leur reſſemblance, nous ſervent de modèles propres à les faire reconnoître, & à les rapporter aux claſſes où elles appartiennent: modèles viſibles pour les impreſſions que nous devons à la Vue, tangibles pour celles que nous devons au Toucher, & ainſi pour les autres ſens; modèles enfin compoſés, ou mixtes, pour les impreſſions réunies de pluſieurs ſens, lorſque nous les avons déployés à la fois.

Enſuite, pour fixer encore mieux ces modèles dans notre eſprit, on les attache à des ſons articulés, ou à des caractères, leſquels, par une longue habitude, ſe lient ſi étroitement avec eux, que déſormais ils ſont conſtamment réveillés dans la mémoire, & reproduits les uns avec les autres. Dans ces images, & dans cette nomenclature conſiſte tout le myſtère des idées générales & abſtraites.

§. 6.

L'aveugle-né du Problème.

Reprenons notre aveugle-né. Nous convenons qu'il n'a dans son esprit aucun de ces êtres scholastiques, aucune de ces idées pures, dégagée de toute image sensible & matérielle. Il ne connoît encore qu'une étendue & des figures tangibles, & inséparables du sens du Toucher: il n'en a reçu que des impressions & des représentations de cette espèce; il n'a d'autres modèles dans son imagination: toutes ses pièces de comparaison, les idées qu'il en tire, les ressemblances qui en naissent, & les noms qu'il leur donne, se réfèrent à ce sens.

Or, en ouvrant les yeux, que retrouve-t-il de tout cela? Absolument rien. Il ne retrouve ni les choses, ni les mots; tout est nouveau, tout est d'une nature différente.

Nous avons prouvé que les impressions immédiates des deux sens n'ont rien de commun. Les images de ces impressions, ou les modèles tirés d'après elles de part & d'autre, ne se ressemblent pas d'avantage, parce que ce ne sont que ces impressions mêmes, affoiblies dans l'imagination. Enfin les noms ne sont que des signes arbitraires, dissemblables, de tout point, aux choses signifiées: & d'ailleurs, ne les ayant appliqués jusqu'ici qu'aux objets tangibles, il ne songe pas plus, & moins encore, à les rapporter aux objets de la Vue, qu'à ceux de l'Ouïe, de l'Odorat, ou du Goût.

Quand vous lui diriez que ce sont les mêmes objets, & qui portent les mêmes noms; il seroit hors d'état de vous concevoir. L'un des deux; ou il croira que vous vous moquez de lui; ou si vous lui persuadez que vous parlez sérieusement, il ne pourra s'en prendre qu'à un caprice du langage, en vertu duquel il sait qu'on attribue souvent à un genre d'objets ce qui appartient à un autre genre, comme dans les exemples allégués plus haut. Mais cela ne lui fournit aucune lumière pour démêler ces objets: tout au contraire, cela même l'affermira dans l'opinion que ces

objets n'ayant rien de commun que le nom, ce feroit peine perdue que de vouloir les reconnoitre à la vue.

Mais qui pis eſt, il a raiſon en tout ceci; c'eſt à nous à nous inſtruire dans ſon école, & à apprendre de cet aveugle quelles ſont les choſes que nous voyons. Sa voix eſt la voix même de la Nature: ſon eſprit, encore tout neuf dans le monde viſible, n'eſt imbu d'aucun de ces préjugés que la combinaiſon habituelle de la Vue & du Toucher a engendrés dans nos eſprits, & qui nous font éternellement confondre les limites, les opérations, les objets, & les qualités de ces deux ſens.

§. 7.

Le viſible & le tangible ſont des choſes hétérogènes.

Je dis d'abord qu'il a raiſon de croire que les choſes viſibles diffèrent totalement des choſes tangibles. Elles diffèrent, en effet, non ſeulement en nombre, mais encore en genre; ce ſont des choſes hétérogènes; & s'il pouvoit reſter là-deſſus une ombre de doute à ceux qui nous ont ſuivis avec attention, j'ajouterois ici une preuve de mon Docteur, qui ne laiſſe rien à déſirer.

Suppoſons que l'Étendue & la Figure viſibles & tangibles ſoient des choſes homogènes: il s'enſuivra qu'on peut les ajouter enſemble, & les combiner de manière à former un tout homogène. Or eſſayons de prolonger une ligne viſible, en la mettant bout à bout avec une ligne tangible. Que réſultera-t-il de cette opération? en a-t-on même l'idée? ne feroit-elle pas auſſi abſurde que ſi l'on prétendoit renforcer un ſon en y ajoutant une couleur? En faiſant le même eſſai ſur les ſurfaces, ou ſur les ſolides viſibles & tangibles, on trouvera les mêmes contradictions dans le réſultat, ou plutôt on n'y trouvera rien du tout.

Voilà donc deux ordres de choſes hétérogènes qui ne ſe touchent par aucun point de communication: & tant que nous les appercevrons

ſéparément, il n'y a aucun terme moyen qui puiſſe les rapprocher dans notre entendement, & nous ménager un paſſage de l'un à l'autre.

§. 8.

Deux objections. Réponſe à la première.

Je me ferai ici quelques objections que le Docteur Berkeley ne s'eſt point faites; mais que je réſoudrai conformément à ſa Théorie, d'après laquelle je continue de raiſonner.

Ces objections peuvent être priſes, ſoit du principe matériel, exiſtant dans nos corps, qui reçoit les impreſſions ſenſibles, & les transmet au cerveau, ſoit de la première origine de ces impreſſions dans les corps extérieurs qui affectent le nôtre.

„Si le ſyſtême nerveux eſt l'inſtrument commun de la ſenſation; „eſt-il concevable, que ce principe homogène introduiſe dans l'ame „des perceptions & des idées auſſi hétérogènes que nous le diſons? Tous „nos ſens en effet peuvent être réduits au Toucher, & ne diffèrent que „par une organiſation proportionnée au plus ou moins de ſubtilité des „corps, ou des corpuſcules, qui viennent les frapper; tels que les ſels „volatils qui s'évaporent des corps odoriférans, les ſels de toute eſpèce „diſſous par l'organe du Goût, les particules de l'atmoſphère qui ébran- „lent le tympan, les pinceaux lumineux qui rayonnent au fond de l'œil, „& les parties plus groſſieres qui affectent le Toucher proprement dit, „en agiſſant ſur cette toile nerveuſe dont tout notre corps eſt tapiſſé. „On peut conſidérer tous ces organes comme des épanouiſſemens des „nerfs optique, auditifs, olfactoires &c. En un mot, il y a partout „des nerfs ébranlés, de la matière en mouvement, des corps faiſant im- „preſſion ſur des corps.„

Je tombe d'accord de tout cela; mais je réponds que tout cela ne ſauroit détruire une vérité de fait, ni renverſer les limites éternelles que

la Nature elle-même a posées. La conclusion que l'on voudroit tirer ici ne prouve rien, parce qu'elle prouveroit trop. Si elle prouvoit que l'Étendue & la Figure visibles doivent ressembler à l'Étendue & à la Figure tangibles; elle prouveroit également que les sons doivent ressembler aux odeurs, les odeurs à la lumière, celle-ci aux saveurs, & les saveurs aux qualités tactiles; ce qui est contraire à l'Expérience.

Il faut donc bien que la structure variée de nos organes suffise pour changer, du tout au tout, les représentations qui se font dans l'ame par leur moyen. Et il me semble même que de cette manière tout est dans l'ordre. Car entendons-nous. Quand je nomme hétérogènes les perceptions & les idées que nous recevons par différens sens; ce n'est pas à dire que de côté & d'autre, ce ne soient des perceptions & des idées; je ne nie point qu'elles n'ayent ceci de commun. Mais ce sont des perceptions & des idées qui ne se ressemblent point, & c'est sur quoi tombe leur différence générique, ou leur hétérogénéité.

Il est des philosophes qui pensent que la Vue ne nous donne pas seulement la même idée de l'Étendue & de la Figure que nous donne le Tact, mais encore celle de la solidité. Par là même, disent-ils, que la Vue s'arrête à la superficie des corps, elle sent les rayons réfléchis ou repoussés, & nous avertit ainsi de l'impénétrabilité de la matière (*).

Mais je leur demande s'ils ont jamais senti ces rayons réfléchis ou repoussés, & s'ils auroient jamais connu ce mécanisme de la vision sans avoir étudié l'Optique? Ceux mêmes qui ont le plus approfondi cette belle science, ne laissent pas de voir comme les autres hommes, & n'ont pas les yeux plus perçans que nous. Ils savent, à la vérité, que les objets se voient par des jets de lumière qui rebondissent de dessus leurs surfaces, soit en les touchant, soit sans les toucher; ou bien ils savent que la vision est produite par le mouvement vibratoire d'un fluide éthéré, dans lequel nos yeux & les objets sont également plongés, mouvement

(*) Boullier, *Essai sur l'ame des bêtes.* Part. II. Ch. 6. §. 17. 19.

qui ſe fait ſans déplacer la maſſe de ce fluide, & analogue aux vibrations de l'Air qui produiſent le ſon. Mais ils ne prétendent pas voir, ou ſentir, ni ces jets de lumière, ni la force qui les fait rebondir, ni l'Éther en vibration, ni la force qui le fait vibrer. S'ils voyoient ou ſentoient ces choſes, leurs opinions ne ſeroient pas partagées comme nous venons de le dire.

Quoi qu'il en ſoit, la Vue, ainſi que les autres ſens, eſt une eſpèce de Tact, mais trop ſubtil pour être apperçu, & qui donne à l'ame des perceptions toutes différentes de celles que produit l'attouchement immédiat. Ces angles viſuels, ces axes optiques, ces bâtons croiſés &c. ſont très-propres à dévoiler à l'entendement le myſtère de la Viſion. Mais nous n'appercevons rien de tout cela; & ce que nous n'appercevons pas ne ſauroit ſuggérer aucune idée à notre eſprit. Celle de la ſolidité n'entre donc pas plus par la Vue qu'elle n'entre par l'Ouïe: & quand on penſe voir les ſolides, ce n'eſt qu'une pure illuſion, cauſée par le mélange des idées tactiles avec les idées viſuelles, comme il ſera expliqué plus bas. Auſſi Locke reconnoît-il que la notion du ſolide nous vient du Toucher ſeul; mais il s'arrête à moitié chemin, & n'a point pouſſé cette théorie juſqu'où naturellement elle devoit le conduire. C'eſt donc encore une étrange erreur, lorſqu'on prétend que la Vue nous donne une idée plus nette des corps que ne fait le Toucher; puiſqu'elle ne nous donne aucune idée de la ſolidité, ou de la matière.

§. 9.

Réponſe à la ſeconde objection.

La cauſe externe de nos perceptions ſenſibles donne lieu à une autre objection, à peu près ſemblable à celle que nous venons d'examiner.

On dira „que l'Étendue & la Figure tangibles doivent néceſſaire„ment avoir quelque reſſemblance avec ce que nous appellons Etendue

„&

„& Figure viſibles; puiſqu'après tout c'eſt la même cauſe originaire qui „en fait naître la repréſentation dans notre eſprit. Cette cauſe c'eſt „l'Étendue & la Figure matérielles, ou les ſubſtances étendues & figu- „rées qui exiſtent hors de nous, & qui agiſſent ſur la Vue, auſſi bien „que ſur le Toucher. Or que leur action conſiſte en tout ce qu'il vous „plaira, il faudra au moins admettre une certaine analogie entre les re- „préſentations qu'elle excite ou occaſionne dans nos différens ſens, & „vous avez tort de mettre une diſtance auſſi énorme entre la Figure & „l'Étendue viſibles & tangibles, & de les prendre pour des choſes hé- „térogènes.„

Cette ſeconde objection n'étant au fond que la première retournée, je pourrois renvoyer à mes réponſes précédentes.

Les perceptions & les idées, introduites par divers ſens, ſont des perceptions & des idées; elles ont cela de commun, je ne le conteſte point. Qu'il y ait un rapport eſſentiel, une analogie fondamentale entre nos ſenſations, je ſuis très-porté à le croire. Toutes ces choſes ont été faites avec poids & meſure; & l'on reconnoît partout la main du ſouverain artiſte. Mais ce rapport, cette analogie ne ſe déclarent par aucune reſſemblance ſenſible: & par là les ſenſations, telles que nous les avons, ſont hétérogènes, ou de différente nature.

Les ſubſtances matérielles qui ſont hors de nous, peuvent avoir plu- ſieurs qualités dont chacune ne ſe manifeſte que par le ſens qui y eſt approprié. Du moins eſt-il de fait qu'elles excitent en nous des re- préſentations différentes, ſelon l'organe qu'elles affectent ou ſemblent af- fecter. Et ce que vulgairement nous appellons la même ſubſtance ma- térielle, nous donne, par la Vue, par l'Ouïe, par le Tact, &c. des perceptions tout à fait diſſemblables. Nous n'en voulons pas d'a- vantage.

Mais enfin, que ſont ces objets, ou ces ſubſtances matérielles hors de nous? Nous ne les connoiſſons pas. Elles ne reſſemblent nulle-

ment aux qualités ſenſibles qui paroiſſent en réſulter: elles ne ſont ni lumineuſes, ni colorées, ni ſonores, ni ſavoureuſes, ni chaudes, ni froides, ni &c. Tous les philoſophes en conviennent. Et des philoſophes d'une grande célébrité, les Leibnitziens par exemple, vont juſqu'à leur refuſer les qualités que l'on nomme premières, l'étendue, la figure, la ſolidité. Il eſt même fort à croire que ces qualités ne ſont, comme les autres, que des apparences, des phénomènes qui n'exiſtent que dans l'être penſant.

Ainſi les objets externes ſont tout autre choſe que les corps que nous voyons, que nous touchons, ou en général qui tombent ſous nos ſens, ces derniers n'étant que des aſſemblages, ou des groupes de qualités ſenſibles. Quel eſt donc ici votre raiſonnement? Vous inférez la reſſemblance de l'Étendue & de la Figure tangibles à l'Étendue & à la Figure viſibles, de l'identité de leur cauſe productrice, ou occaſionnelle. Mais pourquoi ſe reſſembleroient-elles, ſi elles ne reſſemblent pas même à cette cauſe? D'ailleurs, cette identité de cauſe eſt une ſuppoſition entièrement gratuite de votre part; puiſque les cauſes de nos ſenſations nous ſont cachées, & que les objets ſenſibles que nous appercevons ne ſont point ces cauſes, mais les effets que ces cauſes produiſent en nous. Toute votre objection porte ſur cette fauſſe idée, que l'Étendue & la Figure viſibles, & l'Étendue & la Figure tangibles ne ſont que deux copies, tirées d'après le même original, par un peintre nommé la Vue, & par un autre appellé le Tact. Or vous venez de voir combien cette idée eſt chimérique, & loin de la vérité.

Les détails où nous ſommes entrés, ne ſont point ſuperflus: de très-grands philoſophes paroiſſent s'être trompés, faute d'y avoir fait attention. L'auteur de la Lettre ſur les aveugles, pour prouver que l'œil peut, ſans l'aide du Tact, diſcerner les objets qui ſont hors de lui, & connoître leur figure, ſe fonde ſur la deſtination de nos or-

ganes, ſur la beauté des miniatures deſſinées ſur la rétine, & nommément ſur ce qu'il n'y a rien de plus précis que la reſſemblance de la repréſentation à l'objet repréſenté. (*)

Prenons ici la liberté de lui demander ce qu'il entend par cette reſſemblance, d'où il ſait qu'elle a un ſi haut point de préciſion, & même qu'il y ait aucune reſſemblance du tout entre ces deux choſes. Cet objet repréſenté lui eſt-il donc connu? & connoît-il autre choſe que des repréſentations? Quand je tourne la vue tantôt ſur un certain objet, tantôt ſur le fond d'un œil que je ſuppoſe dépouillé de la ſclérotique & de la choroïde, placé dans le trou d'une chambre obſcure, & dirigé vers le même objet; ſans doute que la miniature deſſinée au fond de cet œil reſſemble, en petit, à l'objet que je vois en grand. Mais ce dernier objet n'eſt encore qu'une image, deſſinée au fond de mon propre œil, où la rétine de l'autre œil, & ſa miniature ſont deſſinées de même, ſans quoi je ne les verrois pas. Il n'y a donc ici qu'une reſſemblance d'images. Quant à l'objet, ou aux objets externes, que ces images repréſentent, nous ne les connoiſſons pas, & ne ſavons par conſéquent s'ils reſſemblent ou non, ou juſqu'à quel point ils reſſemblent aux images repréſentatrices. Nos philoſophes même nieront cette reſſemblance: ils ſoutiendront hardiment que les perceptions & les idées ne peuvent reſſembler qu'à des perceptions & à des idées.

Ils nieront encore que ce ſoit la deſtination de nos organes d'opérer de pareilles reſſemblances. En quoi, par exemple, la ſenſation du ſon reſſemble-t-elle à l'air qui trémouſſe, ou au corps ſonore dont les parties s'éloignent & ſe rapprochent alternativement les unes des autres? Encore cet exemple eſt-il très-imparfait: ce ne ſeroient ici que des reſſemblances ſenſibles; puiſque par air, corps ſonore, & mouvement, nous ne pouvons entendre que des objets de

(*) Lettre ſur les aveugles, p. 70.

la Vue ou du Toucher, & non les objèts ou les ſubſtances externes qui cauſent en nous ces perceptions.

Après cette digreſſion, ſi c'en eſt une, je devrois revenir à mon aveugle-né. Mais ce Mémoire n'eſt déjà que trop long. Il importeroit ſans doute de traiter cette matière de ſuite, & ſans interruption. Mais il m'importe encore d'avantage de ne pas vous ennuyer.



NOUVEAUX

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE

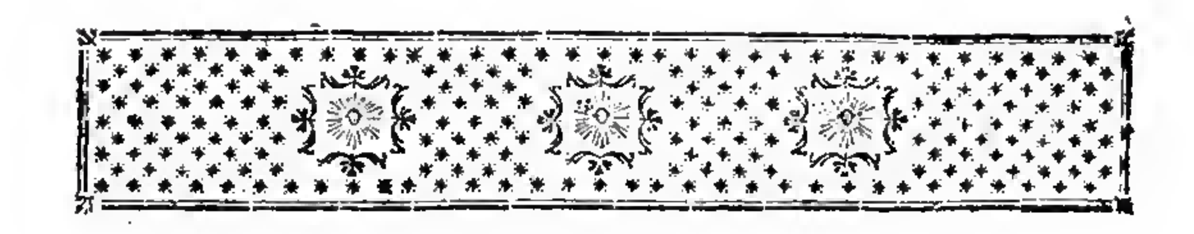
DES

SCIENCES

ET

BELLES-LETTRES.

CLASSE
DE BELLES-LETTRES.



DISSERTATION

SUR

CATHERINE DE BRANDEBOURG,

Épouse de GABRIEL BETLEN, *Prince de Transylvanie.*

PAR M. KUSTER.

Traduit du Latin.

Je me propose de répandre du jour sur l'histoire de CATHERINE de Brandebourg, fille de l'Électeur JEAN SIGISMOND & d'ANNE son Épouse, mariée à BETLEN GABOR, Prince de Transylvanie. Je crois rendre par là un bon office à ceux qui aiment les détails historiques, d'autant plus qu'on ne trouve presque que le nom de cette Princesse dans la plûpart des Auteurs qui ont écrit l'Histoire de Brandebourg.

BETLEN GABOR, en Hongrois, signifie la même chose que GABRIEL BETLEN; les Hongrois ayant coûtume de mettre le nom de famille avant le surnom. C'est donc à tort que Hübner, & même le docte Keysler, ont employé le surnom Hongrois & le surnom Allemand ensemble, en appellant ce Prince *Gabriel Gabor*, puisque *Gabor* & *Gabriel* sont un seul & même nom. Il ne faut non plus écrire, ni BETLEM, comme on le trouve sur une médaille, ni BETLEHEM. Le nom propre est BETLEN. Cette famille étoit également ancienne, illustre & florissante, comme je pourrois le prouver par plusieurs témoignages; mais je me borne à celui de *Jean Dayka*, dans sa Lettre à *Pareus*, qui a été insérée dans le Tome II. des

Monimenta Palatina, p. 227. Le Prince dont il eſt queſtion ici, reçut de la Nature les plus excellentes qualités, & fut en particulier un Guerrier illuſtre, doué d'une force de corps extraordinaire. Lorsque ſon prédéceſſeur mourut, il obtint ſans peine de lui ſuccéder, & l'Envoyé Turc y donna ſon conſentement au nom du Sultan. Il y a diverſes médailles qui font foi qu'il fut à la fin élu Roi de Hongrie. Je n'ai pas deſſein de raconter ici au long de quelle autorité il jouiſſoit; quelle part il eut aux troubles de Boheme; avec quels applaudiſſemens il fut reçu des États de Boheme & couronné, à la Diete de 1620, en préſence des Ambaſſadeurs de l'Empereur & du Grand-Seigneur, des Rois de France & de Pologne, & même du Roi de Tartarie; enfin combien d'allarmes il cauſa à l'Empereur Romain. Je me bornerai à dire, qu'ayant enfin renoncé au titre de Roi de Hongrie, (en vertu d'un accord entre lui & l'Empereur FERDINAND II.) il fut décoré de celui de Prince du St. Empire Romain, avec la poſſeſſion des Duchés d'Oppeln & de Ratibor qui lui fut conférée par l'Empereur. Il eſt vrai qu'il ne les poſſéda jamais effectivement, mais il en porta le titre, & conſerva même celui de Roi, juſqu'à ſa mort arrivée en 1629.

Ce Prince ayant perdu ſa premiere épouſe, qui mourut quatre jours après ſes nôces, demanda en mariage CATHERINE de Brandebourg, & envoya pour cet effet une ſplendide Ambaſſade à l'Electeur GEORGE GUILLAUME. Celui-ci, qui aimoit tendrement ſa Sœur, vit avec plaiſir qu'elle fût recherchée par un Époux ſi recommandable, & par ſon mérite perſonel, & par ſes richeſſes; & il écrivit à ce ſujet une Lettre au Roi de Pologne *, qu'il avoit pluſieurs raiſons d'inſtruire de la nouvelle alliance qu'il alluit contracter. Mais ce mariage déplut infiniment au Monarque, comme on le voit par ſa réponſe **. Et il refuſa pareillement d'honorer les nôces de ſa préſence, comme il y fut invité par des Lettres preſſantes de l'Époux ***. Cela n'empêcha pas qu'elles ne fuſſent célébrées avec beaucoup de magnificence au commencement de l'année 1622, (le 28 Février) à Caſſovie, où les Envoyés de Gabriel s'étoient rendus pour recevoir la Princeſſe. Il exiſte encore un petit Livre où toutes ces ſolemnités ſont décrites; & l'Ouvrage intitulé *Theatrum Europæum* en fait mention.

* Litt. A.

** Litt. B.

*** Litt. C.

Cependant

Cependant ce mariage ne fut ni durable, ni fécond. Au bout de trois ans, le Prince de Tranſylvanie quitta le monde & ſon Épouſe, étant décédé le 14 Novembre, 1629. Comme il avoit une extreme affection pour CATHERINE, il obtint ſans peine des Grands qu'ils la reconnoîtroient pour Dame & Maîtreſſe; le Sultan y conſentit, & *Dewerdeck* a mis dans ſa *Sileſia numiſmatica* une médaille où CATHERINE eſt repréſentée, & au revers de laquelle on trouve cette légende: *D. G. nata Marchioniſſa Brand. & Tranſſ. Princeps, partium Regni Hungariæ Domina, Siculorum Comes, ac Juliæ, Cliviæ, Montium Dux.* Ce gouvernement ne fut pourtant pas de longue durée; car, peu de mois après la mort de ſon Époux, elle rencontra une réſiſtance preſque univerſelle à l'exercice de ſon autorité. Je m'appuie ici ſur le rapport d'un témoin oculaire, ſavoir Paul de Strasbourg, Envoyé de Suede à la Porte, qui, dans la Rélation (*) de ſon voyage à Conſtantinople & des négociations dont il y avoit été chargé, a inſéré ce paſſage qui ſe rapporte au ſujet que nous traitons: „*Munkaz* eſt „une forteresſe & un territoire de la haute Hongrie, à douze milles de Caſ„ſovie, qui en eſt la métropole. Sa Jurisdiction eſt très étendue. Le „Château eſt fort & ſitué ſur une haute montagne, tout le terrain d'alen„tour étant uni. Il y a trois villes & 340 villages qui en dépendent, entre „lesquels on diſtingue *Böckzaz*, qui eſt fort eſtimé à cauſe de ſon extreme „fertilité & des vignobles excellens qu'il porte: le vin qu'on en fait a le plus „grand débit dans toute la Pologne. Gabor Betlen, Prince de Tran„ſylvanie, avoit aſſigné ce domaine entre autres biens dotaux, à Sa Séré„niſſime Épouſe CATHERINE, ayant obtenu pour cet effet le conſente„ment de l'Empereur Ferdinand & des États de Hongrie; cependant ceux„ci, après la mort du Prince, dreſſerent des embûches au Capitaine *Jean* „*Ballingh*, demandant contre l'équité, & la foi donnée au nom de l'Empe„reur, que le Château fût livré au Palatin Eſterhaſi. Le Capitaine implora „le ſecours de George Racockzi, alors Prince de Tranſylvanie; & il réſiſta „à main armée au Palatin Eſterhaſi & aux autres Catholiques Romains. „Quand nous approchâmes de la ville, il vint au devant de nous avec un

(*) Voyez le Tome II. des *Monim. Palat.* p. 185 & ſuiv.

„nombreux cortege de nobleſſe, & pour faire honneur à S. M. le Roi de „Suede, il ordonna pluſieurs décharges d'artillerie & de mouſqueterie. Je „paſſai douze jours dans ce Château, envoyant de fréquens Couriers à la „Princeſſe CATHERINE qui réſidoit à Tokay, & en recevant de ſa part. „Je fus pleinement informé de tout ce qui concernoit ſon état & ſa ſitua- „tion, tant par elle-même que par des amis dignes de foi. J'appris donc „que Sa Séréuité s'étoit laiſſé perſuader par le Baron Etienne Czaky de cé- „der à l'Empereur la fortereſſe de Tokay, en diſpenſant la garniſon du ſer- „ment de fidélité qu'elle lui avoit prêté; qu'Elle avoit pareillement ordonné „au Capitaine qui commandoit à Munkaz, de remettre ce domaine au Pa- „latin; qu'Elle avoit eu l'imprudence de livrer à Czaky ſon argent comp- „tant, & à Etienne Seney, Chancelier de Hongrie, ſes bijoux; qu'Elle „s'étoit laiſſé extorquer un acte ſigné de ſa main & ſcellé de ſon ſceau, par „lequel elle inſtituoit les fils du Prince Racockzi pour ſes héritiers; & „qu'en effet ce Prince l'avoit trompée par mille artifices, ayant ſurtout fo- „menté ſoigneuſement les inimitiés & les diviſions qui régnoient entr'elle & „Etienne Betlen, Gouverneur de Tranſylvanie, & frere du Prince défunt; „juſqu'à ce qu'à la fin, à la recommandation & avec le ſuffrage de CATHE- „RINE, tant auprès des États de Tranſylvanie qu'à la Porte Ottomane, „Racockzi eut obtenu la Principauté. Et après que la Princeſſe CATHE- „RINE eut ainſi entierement abdiqué le gouvernement, Etienne Betlen, „Gouverneur de Tranſylvanie, la fit encore ſolliciter par ſes fils & par ſon „gendre George Racockzi de le reprendre, étant bien perſuadé qu'il ne l'ob- „tiendroit jamais pour lui-même, à cauſe de la force du parti Catholique „qui lui étoit oppoſé." Telles ſont les circonſtances rapportées par Stras- bourg; & je pourrois en tirer encore pluſieurs autres de ſa narration, ſi je ne craignois d'être trop long. Je vais donc abréger ce qui me reſte à dire. CATHERINE ayant ainſi renoncé aux États que ſon Époux lui avoit laiſſés, changea de pays & de ſituation. Étant revenue en Alle- magne en 1633 avec de grandes richeſſes, ſuivant le rapport d'Imhof, elle épouſa François Charles, Duc de Lauenbourg; & l'année 1649 fut la derniere de ſa vie. Pour conclure, voici encore quelques faits. Après

la mort de GABRIEL, l'Electeur George Guillaume envoya deux de ses Conseillers, *Jean de Kospoth* & *Fréderic de Götze*, comme pour complimenter & consoler sa Sœur, mais principalement pour l'assister de leurs bons conseils.

Il existe encore une Lettre de *Jean Truchses de Wetzhausen* à la Reine de Suede, qui apprend que le Grand-Duc de Russie voulut épouser CATHERINE. Mais plusieurs de ses amis lui déconseillerent ce mariage, & furent d'avis qu'on fit partir des Envoyés pour aller au devant d'elle & la ramener dans sa patrie. Et il est vraisemblable, ou même à peu près certain, que c'est ainsi qu'elle revint en Allemagne. Keysler affirme qu'elle donna à Notre Dame de Laurette le collier précieux qui environne la Toison d'or; ce qui feroit croire qu'elle embrassa la Religion Catholique Romaine. Enfin, suivant Puffendorff, elle étoit en 1649 à Scheningen, où elle passa quelque tems; mais Abel le nie.

EPISTOLÆ
ratione nuptiarum BETHLEHEMI GABOR, *Princ. Transylv. scriptæ.*

A.

Serenissime ac Potentissime Rex, Domine cognate & affinis, uti Parens observandissime!

Serenissimus Princeps Dominus Gabriel, Sacri Romani Imperii & Transylvaniæ Princeps, partium Regni Hungariæ Dominus, Syculorum Comes, Oppoliæ & Ratisboriæ Dux, Dominus noster charissimus, misit ad nos legatos suos Magnificos, Generosos, & Nobilissimos, suæ Dilectionis Cancellarium, supremum Cubicularium, nec non ex ordinum Militarium Germanicorum suæ Dilectionis Ductoribus, ac per eosdem a nobis

petiit, ut Sororis nostræ minimæ naturalis Tutor legitimus, hanc suæ Dilectioni desponsaremus.

Quod etsi maximi momenti negotium esse, ideoque matura admodum deliberatione egere non immerito judicaverimus; cum tamen ex Dominorum Legatorum relatione intelleximus, jam suam Imperatoriam Majestatem a Principe Transsylvaniæ hujus sui consilii consciam redditam, idque Majestati Imperatoriæ adeo propemodum probatum fuisse, ut non modo memoratos Legatos clementissime liberalissimeque habere, sed eisdem etiam certos Viæ ductores assignari voluerit, qui eos ad extremos usque Ditionum Imperatoriæ suæ Majestatis (per quos in itinere ad nos transeundum erat) fines ducerent & comitarentur: noluimus rejectis Dilectionis suæ desideriis nos a petita nostra familiaritate atque affinitate, qua tanquam vinculo non nobis tantum, sed & Imperatoriæ & vestræ Regiæ Majestati & omnibus qui nos cognatione attingunt, magis magisque devinciri possit, alieniores ostendere, maxime cum Historiarum monumentis probe teneamus Transsylvaniæ Principes, Parentum memoriæ, indignos non judicatos, cum quibus Domus Austriaca, ex qua tot Imperatores prodiere, affinitatem contraheret. Cum itaque existimemus Dilectionem suam pro ante memorati matrimonii consummatione brevi nos pluribus requisituram; volumus S. R. Majestati vestræ imprimis negotium omne exponere, certa spe freti, sicut Imperatoriæ Majestati illud gratum & acceptum esse intelleximus, ita vestræ quoque Regiæ Majestati idem non minus probatum iri. Eandem quoque vestram Regiam Majestatem quam officiosissime rogamus, velit Sororem nostram charissimam, quæ cum Serenissima Regina S. R. Majestatis vestræ honoratissima conjuge ex Ferdinando primo Romanorum Imperatore laudatissimo genus ducit, quæque S. R. Majestati vestræ petitæ nuptiæ DEO juvante optatum Transsylvaniæ Principi finem sortiri potuerunt quam nobis unico suo vicinior erit, optime sibi commendatum habere, eamque favore & benevolentia sua Regia complecti, atque ita & nos & tanto majora de S. R. Majestate vestra & corona inclyta benemerendi studia excitare. Porro S. R. Majestati vestræ alia quoque obsequia officio & diligentia nostra semper & ubique sunt eruntque & paratissima & promtissima. Dabuntur ex Arce nostra Coloniensi ad Spream ad diem Octobris 3. Anno 1622. &c.

S. R. M. V.

GEORGIUS WILHELMUS,
Dei gratia Marchio Brandeburg.

Ad Regem.

B.

Illuſtriſſime Princeps &c. Optaſſemus, ut Illuſtritas veſtra maturius & re adhuc integra de ineunda cum Principe Tranſylvaniæ Affinitate ad nos pro eo ac par erat retuliſſet, meminiſſetque, cum Legationis noſtræ qua Anno ſuperiori Illuſtritati veſtræ Iudicium voluntatemque noſtram aperuimus, tum reſponſi ſui, quo ſe ab his nuptiis abhorrere, neque abſque ſcitu & aſſenſu noſtro quicquam eſſe facturum declaraverat.

Cum autem rem prope confectam Illuſtritas veſtra judicio & arbitrio noſtro ſubjicit, quam ſyncere & candide nobiſcum agat, quamque & beneficii accepti gratum & fidei datæ tenacem & tot neceſſitudinum memorem ſeſe oſtendat, orbis judicabit univerſus. Num Sereniſſimus Romanorum Imperator his nuptiis faveat, non indagamus. Quid rationes, quid exempla ab Illuſtritate veſtra adducta valeant, non diſceptamus, cum in altero neque nos dependere ab alieno arbitrio velimus, neque Illuſtritas veſtra debeat, in altero binum quidem exemplum ſed utriusque Matrimonii Turcicæ ſervituti obnoxii infelix & inglorius exitus: nec diſparem Illuſtritas veſtra domui ſuæ polliceatur, nos parem ominari & precari nolumus. Itaque non tam laboramus quam recto vel orbis Judicio laudabili, ad ſuique tum nominis tum generis claritatem tuendam ſalubri conſilio, Illuſtritas veſtra uſa eſt, quam graviter & moleſte ferimus, poſthabitam ea in parte autoritatem noſtram Regiam beneficiarii feudaliſque officii neceſſitudinem neglectam, affinitatis, fidei, amicitiæ jura parvi æſtimata, renovatumque prioris doloris vulnus Suecica affinitate inflictum, cui ſanando niſi Illuſtritas veſtra diligentius incubuerit, ſed nova hac acerbitate veteres cicatrices refricare voluerit, ineunda nobis omnino ratio cum ordinibus Regni foret, qua & Illuſtritatem Veſtram officii ſui ſerio admoneamus, & quid nobis & Reipublicæ in ejusmodi occaſionibus debeat, quare fide ligii feudi obſtricta ſit, luculentius Illuſtritati veſtræ declaremus, & denique ne quid incommodi ex duplicata hac affinitate Reipublicæ eveniat, deſtinateque conſilia Principis Tranſylvaniæ ex legatis anno ſuperiore interceptis nobis patefacta noceant, proſpiciamus teſtatumque faciamus nos ejusmodi injuriis permoveri, quæ eo graviores acerbioresque ſunt quod cum iis proficiſcantur, qui haſce ob accepta à nobis beneficia vel vitæ ſuæ diſcrimine propulſare deberent. De cætero Illuſtritatem veſtram bene ac feliciter valere cupimus &c.

Ad Elect. Brandeburg. &c.

C.

Ad Principem Transylvaniæ BETLEHEM GABOR.

Illustris Princeps, Amice noster charissime, quo animo nos erga has nuptias, quibus Sponsa, cujus soror Gustavo hosti nostro etiam nunc nefarium bellum gerenti, nupta est deducitur, affectos esse oporteat, facile Illustritas vestra judicare potest. Feret igitur æquo animo, si Illustritati vestræ, cum Sueco hoste nostro affinitatem ineunti, in cohonestandis nuptiis, quibus hostes nostri interfuturi sint, in præsentia gratificari non potuerimus. Cæterum propensam Illustritatis vestræ voluntatem benigne amplectimur, & in posterum sincere adnitenti de nobis & Republica Polona bene mereri paribus officiis respondebimus. Quam bene valere cupimus.

SIGISMUNDUS Rex.



SUR

LE BEAU ET SUR LA PENSÉE EN LITTÉRATURE.

PAR M. DE CATT.

Le Beau ne differe des autres objets de nos ſenſations ni par ſa nature, ni par la maniere dont nous l'appercevons, ni par les queſtions auxquelles il donne lieu. Les Corps ſont odoriférans, ſonores, colorés par l'effet de certains rapports qu'il y a entre ces corps, la conformation de nos organes & la conſtitution de notre ame. Le Beau eſt beau par l'effet de certains rapports qu'il y a entre les objets, la conformation de nos organes & la conſtitution de notre ame. On demande, quelles ſont les propriétés des objets, quelle eſt la conformation des organes & la conſtitution de l'ame d'où réſultent tous ces rapports. La Phyſique enſeigne que le mouvement élaſtique des petites parties des corps conſtituent les ſons, que la différence qui ſe trouve dans les corpuſcules de la lumiere forme les couleurs. L'Anatomie développe les merveilles des organes, la Métaphyſique s'efforce de fixer la conſtitution de l'ame lorsqu'elle examine l'influxion phyſique, les cauſes occaſionnelles & l'harmonie préétablie. La Littérature éclairée par le flambeau de la Philoſophie ne pourroit-elle pas fixer les qualités qui ſe trouvent dans les beaux objets & qui ne ſe trouvent pas dans les laids, & découvrir la conſtitution de l'ame &, pour ainſi dire, l'organe intérieur dont l'objet eſt le Beau? Comment fixer les qualités qui différencient les beaux objets des laids? Beau viſible, beau muſical, beau moral, beau littéraire: le beau m'environne de tout côté. Le beau viſible ſe trouve tantôt dans la figure, tantôt dans la couleur, tantôt dans la proportion & dans la ſymétrie, quelquefois même dans la confuſion. Le beau muſical conſiſte, ou dans l'harmonie, ou dans la mélodie, ou dans l'une & dans l'autre; le beau

moral . . . . dans quel labyrinthe je m'engage! L'énumération complette de toutes les especes de beau passe mes forces, je l'avoue, & celle des différentes qualités qui distinguent les beaux objets est à mon avis au dessus des forces de l'humanité, & autant que cette énumération étoit possible, les de Crousaz, Hutcheson, le Pere André & Montesquieu qui m'ont prévenu, l'ont déjà faite.

Je rentre dans mon objet, & je trouve qu'en Littérature la seule qualité qui excite en nous ce plaisir déterminé qui accompagne ou plutôt qui constitue la beauté, est l'imitation de la belle Nature. La Nature pour le littérateur ne se borne pas au physique, elle s'étend aux actions, aux pensées, à tout ce qui est ou peut être une suite de la constitution des hommes, & des autres êtres soit existans soit possibles, soit conçus & imaginés comme possibles. Quelle étendue! l'imitation . . . . nous savons tout cela, l'Abbé Batteux nous l'a dit, mais il a oublié de *mettre à la tête de son Ouvrage un Chapitre sur ce que c'est que la belle Nature;* sans ce Chapitre le traité do l'Abbé Batteux reste sans fondement (*). On croit d'abord avec un Auteur qui s'est acquis de la célébrité en *jettant ses idées sur le papier* & les laissant *devenir ce qu'elles peuvent*, qu'il est facile de satisfaire à cette question & aux autres que ce même Auteur nous propose; il y auroit satisfait lui-même s'il s'étoit donné la peine de penser un peu avant de jetter ses idées sur le papier.

La belle Nature est celle qui est à sa place, & tout objet représenté avec ses vrais rapports appartient à la belle Nature. Les vrais rapports sont, non pas tous ceux qui se trouvent dans les objets, mais ceux qui conviennent au but que l'Artiste se propose.

Le but général est de plaire & de toucher; le but particulier est d'exciter un sentiment déterminé, tantôt la colere & tantôt la compassion, tantôt la terreur, tantôt l'admiration.

L'Artiste peut-il obtenir le but général ou le but particulier s'il n'exprime pas si bien l'objet qu'il veut représenter, qu'on le reconnoisse d'abord

&

(*) Diderot, Lettres sur les sourds & muets, p. 206.

& qu'on le distingue de tout autre; ou s'il manque de cette expression non-équivoque sans laquelle il ne peut jamais bien distinguer les objets, ne manque-t-il pas son premier but, & il n'en distingue aucun. *Voilà pourquoi une peinture admirable dans un poëme devient ridicule sur la toile* (*). Voilà *pourquoi le peintre ne pourroit point prendre le moment frappant où Neptune élevè sa tête hors de l'eau*, s'il vouloit rendre avec son pinceau les beaux vers de Virgile,

Interea magno misceri murmure pontum
Emissamque hyemem sensit Neptunus & imis
Stagna refusa vadis; graviter commotus & alto
Prospiciens, summa placidum caput extulit unda.

Virgile nous représente Neptune; & le peintre ne peut représenter qu'un homme plongé dans l'eau. Virgile saisit tous les rapports, le peintre ne peut saisir que ceux qui sont visibles & indépendants du mouvement. Virgile prend tout le tems convenable & nécessaire à l'action, le peintre ne peut prendre qu'un moment, & par conséquent il lui est impossible de peindre successivement, ainsi que Virgile fait, les Vents déchaînés, les flots agités, la mer bouleversée jusqu'au fond, Neptune appercevant le désordre qui regne dans son Empire, la colere de ce Dieu contre les Vents, le soin qu'il prend de la mer, la résolution qu'il forme de lui rendre le calme, & sa sortie de l'eau pour exécuter son dessein. Si Virgile eût dit simplement: *At caput interea Neptunus sustulit unda*, *Cependant Neptune leve sa tête au-dessus de l'eau*, auroit-il fait un tableau admirable? *Le beau moment du poëte* est, j'ose le dire, toujours *le beau moment du peintre*, mais c'est lorsque le poëte prend *un moment* & lorsque le peintre peut clairement exprimer son objet dans ce moment. Il le peut sans difficulté s'il veut peindre Polypheme qui fait *craquer* sous ses dents les os d'un des compagnons d'Ulysse (**). Cependant qui pourroit supporter cette vue sur la toile? *qui verroit sans horreur un géant tenir un homme en travers dans sa bouche énorme & le sang ruisseler sur sa barbe & sur sa poitrine?* (***) Ce sera celui qui a pû

(*) Id. ib. p. 209.
(**) p. 279.
(***) 279. 280.

ſans horreur tracer cette deſcription, & j'oſe ajoûter, celui qui peut ſans horreur lire celle de Virgile. (*) A peine eſt-elle diminuée par l'harmonie des vers, la magie du ſtile, l'art admirable dont le poëte s'eſt ſervi pour ſauver cette deſcription. Il la met dans la bouche d'un Grec qui demande grace aux Troyens ennemis & qui pour les toucher leur repréſente le ſpectacle horrible qui l'a frappé & le danger qui le menace. Cependant on ſouhaiteroit qu'il eût donné à entendre ce qu'il décrit. On ſent que Virgile a oublié la ſeconde ſorte de rapports qu'il ne faut jamais manquer, celle des objets repréſentés avec notre nature. *Nec pueros coram populo Medea trucidet:* les images ſont horribles, & jamais il n'eſt vrai de dire que

D'un pinceau délicat l'artifice agréable
De ces affreux objets faſſe un objet aimable

à moins qu'il ne les voile en partie & pour n'en montrer que ce qu'il y a de plus ſupportable. Si j'étois peintre je ne choiſirois jamais Achéménide & le Cyclope pour le ſujet d'un de mes tableaux, je craindrois de ne pouvoir pas rendre Achéménide aſſez reconnoiſſable. Si une ſuite de ſujets tirés de l'Énéide m'aidoit à le bien diſtinguer de tout autre qui auroit pû aſſiſter à ce dégoûtant ſpectacle, je repréſenterois Achéménide proſterné aux pieds d'Énée & lui montrant à une diſtance convenable le Cyclope, qui ne tiendroit pas un homme en travers dans ſa bouche énorme, mais qui en auroit un dans ſes mains élevées comme pour l'écraſer contre un rocher. Le ſpectateur intelligent ſe ſouviendroit du repas affreux de Polypheme ſans voir le ſang *ruiſſeler ſur ſa bouche & ſur ſa poitrine.*

(**) Il n'eſt point de ſerpent ni de monſtre odieux
Qui par l'art imité ne puiſſe plaire aux yeux

mais c'eſt lorſque l'imitation eſt faite avec ces ménagements, c'eſt lorſqu'elle eſt conforme aux rapports que les choſes ont avec notre nature

Car il eſt des objets que l'art judicieux
Peut offrir à l'eſprit & doit ſouſtraire aux yeux, ou, doit offrir à l'eſprit & reculer des yeux.

(*) Æneïd. lib. III.

(**) Boileau Art poëtique V. 1. 2.

Il en eſt que l'art ne doit pas même offrir à l'eſprit. Je ne parle pas de ce qui bleſſe la pudeur, on ſait qu'il faut en éviter juſqu'aux apparences. Je parle de ce qui ne s'accorde point avec le ton général de l'Ouvrage, ou avec le but particulier de l'Auteur. S'il nous préſente le paſſage des Iſraélites à travers la Mer Rouge, qu'il ſe garde bien de décrire les jeux d'un enfant

(*) Qui va, ſaute & revient
Et joyeux, à ſa mere offre un caillou qu'il tient.

Dans un prodige où ſe montre le doigt de Dieu, cet enfant eſt ridicule; il ſeroit charmant dans une partie de plaiſir faite au bord de la mer. Un peintre judicieux (**) ne plantera jamais *un vieux chêne gercé, tortu, ébranché* à la porte d'un payſan aiſé & diligent, encor moins devant la retraite d'un philoſophe ſolitaire mais ſociable; il le peindra à la porte d'un payſan pauvre & indolent, qui néglige de le couper par pareſſe, ou devant la chaumiere d'un miſantrope diſgracié de la Nature, dont la mauvaiſe humeur eſt nourrie par la vue de cet arbre, ou d'un courtiſan réduit à la miſere par les jeux cruels de la Fortune, qui a bien d'autres ſoucis que ceux d'embellir le lieu de ſon exil. Ce chêne eſt *beau* lorſqu'il s'accorde avec le but de l'artiſte, il eſt laid lorſqu'il le contrarie. Par la même raiſon on doit conſidérer le rapport des circonſtances entr'elles. Dans le Bacchus de Michel-Ange tout reſpire une douce ivreſſe. Le grand artiſte auroit-il donné l'air d'un homme égayé par le vin à Bacchus vainqueur des Indes? Dans la Vénus de Médicis on voit éclater la pudeur virginale. La Déeſſe ne fait que ſortir des flots auxquels elle doit ſa naiſſance. La pudeur feroit place à la hardieſſe & à l'ambition dans Vénus diſputant la pomme, à la honte dans Vénus priſe aux filets de Vulcain; cette Déeſſe déplorant aux pieds de Jupiter les malheurs d'Énée ſeroit affligée; elle ſeroit preſſante demandant à Vulcain les armes pour ſon fils. Dans ces deux circonſtances elle auroit l'air ſuppliant, mais varié par des nuances différentes occaſionnées par les différentes paſſions qui l'agiteroient. Quand même la *Nature* ſe montreroit *toujours dans toute ſa perfection*, la ſcience des artiſtes ne ſe borneroit

(*) Moyſe ſauvé. Idylle héroïque par S. Amand. Voy. Art poét.
(**) Voyez Diderot Maceſ, p. 107.

pas à *peindre les faces qu'ils auroient eues devant les yeux.* (*) Ils auroient à choisir la face convenable à leur but & aux autres circonstances; la beauté peut être majestueuse & reservée, ou tendre & gracieuse, dédaigneuse & fiere, ou douce & prévenante. D'ailleurs l'attitude, le mouvement, la physionomie de la même personne varient suivant les occasions & ouvrent un vaste champ au choix des artistes. Un choix qu'il n'est pas moins important de bien faire c'est celui des expressions, qui doivent être convenables au sujet, *Versibus exponi tragicis res comica non vult.* Le teint basané d'Hercule ne convient pas à Ganimede & la peau du Lion de Némée ne s'accorde pas avec la délicatesse d'Iole. Le bon choix du ton général du coloris amene aisément ces sons imitatifs, ces expressions pittoresques sur lesquelles on a tant disserté.

Les rapports dont nous venons de parler sont généraux, ils doivent être observés non seulement dans tous les tems; dans toutes les langues, mais dans tous les Beaux-Arts. Ils contiennent l'unique fondement des beautés communes de la Poésie, de la Peinture & de la Musique. (**) Dans les Ouvrages de ces trois arts les objets doivent être si bien représentés qu'on les distingue de tout autre. Tout ce qui révolte doit être soigneusement évité, & le ton général ne doit jamais être démenti. Voilà les *Analogies:* le poëte, le peintre, & le musicien choisissent les sujets & les rapports qu'ils peuvent exprimer avec clarté & avec force, & ils abandonnent ce que leur art ne peut pas embellir, & *quæ desperat tractata nitescere posse relinquit.* Virgile nous montre Neptune sortant de la mer; le peintre nous le représente hors de l'eau; le musicien par un concert bruyant, confus & artistement mêlé de dissonances, nous donne l'idée d'une tempête; il change de ton, il rend les dissonances moins fréquentes & moins sensibles pour exprimer la mer qui s'appaise; & enfin par la douceur de la musique, par les consonances & par la petitesse des intervalles, il nous donne l'idée d'un calme profond.

(*) Voyez Batteux I. Part. p. 113. 114.

(**) Voyez Diderot Lettres sur les muets, p. 205

La belle Nature eſt une pour le peintre, pour le poëte, & pour le muſicien. (*) Chacun d'eux nous peint Didon mourante; (**) la maniere eſt la même puiſque l'un imite les expreſſions de l'autre, (***) la différence conſiſte uniquement dans les moyens. Les couleurs ne frappent pas les oreilles, les ſons n'affectent pas les yeux; les ſons inarticulés de la Muſique ſont plus harmonieux que les ſons articulés de la Poéſie, mais ils expriment les idées d'une maniere plus vague, ou plutôt les mots expriment les idées, & les ſons rappellent directement tout au plus le ſouvenir des mots, & par conſéquent celui des idées.

Ces trois arts ſe reſſemblent auſſi en ce qu'ils font attention aux relations que j'appellerai *locales;* elles tirent leur ſource de l'aſſociation nationale des idées; cette aſſociation explique pourquoi ce qui paroit beau à une nation paroit laid à une autre, pourquoi la Nature ici doit être repréſentée toute nue, & là avec *certains traits de l'art*, & pourquoi ces traits ſont bien différens à Paris & à Vérone (†); pourquoi Lucrece & le Taſſe après lui ont employé avec applaudiſſement *la comparaiſon du charme des fables qui enveloppe des leçons utiles, avec une médecine amere donnée à un enfant dans un vaſe bordé de miel*, & pourquoi la même comparaiſon *ne ſeroit pas ſoufférte dans un poëme épique françois* (††); pourquoi le Marquis Maffei a pû faire uſage d'un anneau *pour faire penſer à Mérope que ſon fils eſt l'aſſaſſin de lui-même*, & pourquoi M. de Voltaire n'a pû s'en ſervir; *depuis l'Anneau Royal dont Boileau ſe moque dans ſes Satyres, cela ſembleroit trop petit ſur notre Théatre.* (†††) Tant il eſt vrai que la moindre circonſtance ſuffit ſouvent pour changer le goût d'une nation.

Les aſſociations d'idées, qui ſont la principale ſource de ce qu'il y a d'arbitraire dans le *beau*, dépendent principalement des mœurs, des coutumes,

(*) Diderot, p. 210.

(**) p. 211. & ſuiv.

(***) Bon pour faire connoître les objets, mais s'il s'agit de peindre les paſſions, alors les tons différens le font ſi bien par eux-mêmes que ſouvent ce n'eſt que par leur moyen que les mots nous font diſtinguer ces mêmes paſſions ſans équivoque; ces tons ſont la baſe de la Muſique comme de la déclamation.

(†) Voyez Voltaire, Lettre à Mr. Maffei devant Mérope.

(††) Voltaire, Eſſai ſur la Poéſie épique Chap. I.

(†††) Voltaire, réponſe à Mr. de la Lindelle devant Mérope.

du climat, de la religion & du gouvernement; il eſt donc néceſſaire qu'un littérateur connoiſſe les coûtumes & la religion des Auteurs qu'il lit, pour les entendre, & encore plus pour en juger. Il devroit même poſſéder à fond la prononciation de leurs langues, qui change l'expreſſion & qui donne aux mots ce qu'ils ont de pittoreſque.

L'*ululatus* des latins prononcé à la françoiſe ne fait plus entendre le hurlement du loup. (*) Prononcez le *procumbit humi bos* de Virgile comme ſi le poëte avoit écrit *humibos* en un ſeul mot, ou ce qui revient au même, arrêtez-vous ſur la derniere ſyllabe de *humi*, & gliſſez ſur la ſuivante, vous effacerez tout le ſon imitatif de ce vers. Si l'on n'entend pas bien diſtinctement le bruit cadencé d'un cheval qui galoppe dans le vers *quadrupedante putrem ſonitu quatit ungula campum*, la raiſon en eſt qu'on ne marque pas aſſez les longues & les brèves en prononçant.

Voilà les principaux rapports qu'un artiſte, auſſi bien qu'un juge, doit obſerver & conſidérer. Tout ce qui ne renferme rien de contraire à ces rapports eſt *beau*. L'artiſte ne réuſſira jamais, & le juge ſe trompera toujours, ſi l'un & l'autre ne ſaiſiſſent pas les vraies relations des choſes & les expreſſions propres à mettre ces relations dans tout leur jour. C'eſt la premiere ou plutôt c'eſt l'unique regle, les autres n'en ſont que des modifications.

Scribendi recte ſapere eſt & principium & fons, & ce bon ſens dont parle Horace ne conſiſte qu'à voir les vrais rapports & la maniere de les exprimer, & par conſéquent à abandonner ce qu'on ne peut rendre par des expreſſions convenables. C'eſt uniquement parce qu'il eſt impoſſible de bien repréſenter la métamorphoſe de Progné & de Cadmus, que le Théâtre ne doit pas offrir ce ſpectacle. (*Nec in avem Progne vertatur, Cadmus in anguem.*) Tout ce qui eſt conforme à cette regle eſt *beau*, donc toute la Nature eſt belle quand elle eſt à ſa place, donc il n'y a point de Nature laide en elle-même, mais il y a ſouvent de laides imitations.

L'imitation proprement dite, conſiſte à repréſenter les rapports qui ſe trouvent dans les choſes mêmes. L'imitation dans ce ſens eſt un miroir

(*) Voyez du Bos.

plao, une chambre obscure qui peint les objets tels que la Nature les présente; aussi la principale regle de l'imitation est qu'elle soit vraie. Cependant on doit s'appercevoir que c'est une imitation. L'art se décele toujours dans un tableau, parce qu'il manque de relief, & dans une statue, parce qu'elle est destituée de couleurs. On s'effrayeroit si les couleurs réunies aux reliefs nous montroient des hommes, non des statues. (*)

Dans les Ouvrages d'esprit, l'Auteur se montre à découvert si ces Ouvrages ne sont pas dramatiques, & s'ils le sont, quand même ils seroient portés au comble de la perfection, l'Auteur ne cause qu'une illusion momentanée. Auguste & Octavie furent touchés jusqu'au fond de l'ame par les vers qui regardoient Marcellus, mais la récompense qu'Auguste & Octavie accorderent à Virgile dans le moment même, montre bien qu'ils ne crurent pas entendre Anchise. Si le spectateur oublioit qu'il est au Théâtre, il se jetteroit sur Cléopatre (**) pour la déchirer & sur Orosmane (+) pour lui arracher le poignard. (++)

Mais quand l'Auteur s'annonce, pour ainsi dire, comme imitateur de lui-même, quand il déclare qu'il expose ses propres idées ou qu'il exprime ses propres passions, il ne doit dire que ce qu'il pense ou ce qu'il sent, ou il faut qu'il trompe par son imitation. Tibulle aimoit-il, ou feignoit-il d'aimer, quand *il soupiroit ses vers?* Cicéron étoit-il ému quand il faisoit tomber les tablettes des mains de César, étoit-il irrité quand il foudroyoit Verrès, Catilina & Antoine?

Le littérateur qui ne fait qu'exprimer les rapports de la Nature n'est littérateur que par le stile. C'est un peintre en portraits; tout son mérite consiste à ne pas défigurer les traits de l'original & à le revêtir de couleurs vraies; le mérite n'est pas petit, mais il est infiniment moindre que celui du peintre en histoire qui choisit le moment, imagine les personnages, invente les attitudes, les traits & les couleurs.

(*) Voyez les Notes sur les premiers vers du Liv. 3. de l'Art poétique de Boileau.

(**) Dans Rodogune.

(+) Dans Zaïre.

(++) On ne pourroit assister à une Tragédie sans renouveller la scene de Don Quichotte & des marionettes.

Le plus haut degré de perfection consiste à *inventer*, & *l'invention* à imaginer des rapports qui n'existent point, mais que le littérateur trouve parce qu'ils pourroient exister. Si le rapport n'a pas été imaginé par l'Auteur, il n'y a ni invention ni pensée.

En Philosophie une pensée est un état de l'ame qui apperçoit un des termes d'une proposition ou une proposition entiere, fournie soit par l'entendement, soit par la nature des choses. En Littérature une pensée n'est jamais qu'une proposition dont les termes logiques sont comparés par l'esprit de l'écrivain. S'il trouve la comparaison des termes toute faite, il peut énoncer une pensée *philosophique*, mais il n'offre point de pensée *littéraire;* car celle-ci n'existe que lorsque le rapport est le fruit de l'imagination de l'artiste.

Dans ce sens le *qu'il mourût* du vieux Horace dans Corneille est une pensée; le songe de Décius sa mort volontaire, n'est pas une pensée dans Cicéron. C'est Corneille qui a imaginé la réponse d'Horace, qui a comparé & réuni les idées qu'elle renferme; Cicéron dans l'exemple cité n'imagine rien, ne compare rien, il rapporte un fait.

Même, si un poëte mettoit en action la mort de Décius & faisoit dire à ce héros, *je vais m'immoler pour la patrie*, cette expression dans ce cas ne contiendroit point de pensée *littéraire*, ce ne seroit point le génie du poëte qui auroit inventé ce sentiment. Dans les paroles de Moyse, *Dieu dit que la lumiere soit & la lumiere fut*, il y a une très-belle pensée dans le sens philosophique; il n'y a point de pensée, dans le sens littéraire, pour nous qui savons que Moyse rapporte un fait; il y en avoit une dans ce sens & fort belle pour Longin qui croyoit que Moyse avoit imaginé ce qu'il avoit écrit.

Le sculpteur qui a placé la statue d'Hercule Musagete à une des entrées du Parc, a eu une pensée très-heureuse; il a imaginé une allusion aussi juste que délicate à ce héros qui soutient & orne les arts & les sciences avec cette main qui a moissonné tant de palmes. Le peintre qui représenteroit cette statue dans une des vues du Parc, n'auroit aucune pensée, parce qu'il n'inventeroit rien.

Le

Le Pouſſin repréſente un payſage; j'y vois le beau d'imitation. Il y place le tombeau d'une jeune fille avec cette inſcription: *j'ai auſſi vécu en Arcadie*; j'y trouve le beau d'invention & j'admire la penſée.

En montrant que l'eſſence du beau en littérature conſiſte dans l'expreſſion des vrais rapports, que les rapports ſont fondés, ou ſur la nature des choſes, ou ſur la maniere d'enviſager les objets, que par conſéquent il y a un beau général qui eſt du reſſort de tous les hommes & de tous les âges, & par conſéquent invariable, & un beau national, perſonnel même, & par conſéquent arbitraire juſqu'à un certain point, que l'un & l'autre ſe diviſent en beau d'imitation & en beau d'invention; j'ai ſatisfait, je penſe, à la premiere queſtion: quelles ſont les qualités qui ſe trouvent dans les beaux objets & qui ne ſe trouvent pas dans les laids? Je tâcherai de réſoudre la ſeconde queſtion dans un autre Mémoire.



SUR LA PHILOSOPHIE DE L'HISTOIRE.

PAR M. WEGUELIN.

SECOND MÉMOIRE.

Notion de la diverſité indéfinie des faits

Un fait differe de l'autre par les principes & les motifs, les tendances & les vues, le local & l'individuel. On ſe rencontre rarement dans les principes, on eſt encore moins d'accord dans les vues, & quant au ſyſteme local on ne convient jamais. Ainſi la diverſité des faits s'étendant ſur leurs cauſes productrices, incidentelles & finales, on peut la regarder comme indéfinie. Pour comprendre la diverſité indéfinie qui a lieu parmi les agens & les actions, on n'a qu'à ſuivre la façon d'agir des hommes en général. En produiſant un acte, on cherche à améliorer ſon ſort. Le ſort de chacun conſiſte dans l'aſſemblage de ſes facultés, de ſes forces & de ſes rapports, reſtreints & modifiés ſelon ſa poſition & la place qu'il occupe dans le ſyſteme ſocial. Par cette détermination inhérente à la notion du ſort l'on voit qu'il eſt impoſſible de le changer, ſans paſſer par deux états qui different réellement l'un de l'autre. Un de ces états paſſant pour meilleur dans l'eſprit de l'agent, la diverſité qu'il met dans ſes notions ſert à diverſifier ſon acte. D'ailleurs chaque ſociété forme un corps dont les parties ſont plus ou moins unies, ſelon le degré de la bonté, de l'étendue & de la force du lien ſocial; & il eſt de la nature des ſyſtemes tant pratiques que ſpéculatifs de maintenir l'ordre qui eſt rélatif à l'emplacement des parties, de ſorte qu'on ne peut placer l'un ou déplacer l'autre, ſans produire des changemens plus ou moins perceptibles. Chaque combinaiſon d'évenemens & d'intérêts reſſemble à une partie d'échecs, où l'on ne peut remuer une ſeule piece ſans former une poſition du jeu différente. Il y auroit un ſeul moyen par lequel les hommes pourroient mettre plus d'unifor-

mité dans leurs actions; ce feroit de les conformer aux regles immuables de l'ordre & de la convenance univerfelle des chofes; mais l'ordre focial ne retraçant point celui de la Nature, chacun de ceux qui s'attachent à connoître ces notions abftraites a fa maniere propre de les appliquer & de les commenter. Le code de la Nature a beau être clair, fimple, évident, les hommes apportant à fa lecture un efprit préoccupé de leurs intérêts, ils ont fait à l'égard du code des loix naturelles ce qu'on leur a vu faire à l'égard du code des loix religieufes, qui a occafionné autant de fectes qu'il y a eu d'efprits prévenus en faveur de quelques hypothefes.

La diverfité indéfinie des faits eft un principe de l'hiftoire réfléchie.

Une notion fert à diriger la marche de nos idées, lorfqu'à fon défaut on tombe dans l'erreur: or en omettant la confidération de la diverfité indéfinie des faits on met de l'égalité dans les faits qui ne font que femblables, ce qui fait que l'on confond les faits de diverfe efpece, & que l'on fe trompe dans leur application & dans leur imputation. Il eft donc de toute néceffité de faire intervenir la notion différentielle des faits dans toutes les difcuffions de l'hiftoire réfléchie. Lorfqu'une notion eft riche, féconde & étendue en même tems, on doit la mettre au rang des principes; & la diverfité indéfinie des faits n'influe pas moins dans le monde moral, que le principe des *Indifcernables* n'a d'influence dans le fyfteme des corps. On établit également des deux côtés l'impoffibilité de prendre un objet pour l'autre. A confidérer le fyfteme des êtres moraux comme dirigé par la repartition infiniment diverfifiée des talens & des penchans, il n'y a rien de plus gratuit que la fuppofition du même emploi que feroient deux hommes de leurs facultés, foit naturelles, foit aquifes. Ce différent emploi des forces qui concourent fi diverfement à la production des actes, font regarder chacun de ces actes comme un *Tout*, déterminé par des raifons & des rapports qui lui font propres. Si l'on voit les faits tenir les uns aux autres, ce n'eft jamais par l'enfemble de leurs rapports, mais par celui qui eft le plus univerfel de tous. Dans la combinaifon des faits hiftoriques on agit à peu près comme dans la claffification des corps, que l'on unit par le moyen de leurs propriétés les plus foncieres & les plus univerfelles, fans que ces claffifications faffent jamais évanouir la diverfité qui eft propre à chaque corps. Quand les chofes

ſont extrémement variables & ſujettes à ſe décompoſer, on ne les réduit pas aux raiſons générales, mais aux raiſons particulieres. Les météores, ces emblemes des opinions vulgaires, ſont de cet ordre; & il y a mille cas où l'individualité attachée à un événement moral ſe conſerve en entier; ce qui nous doit rendre fort reſervés dans l'uſage des *Paralleles d'hiſtoire*, dans leſquels, malgré leur reſſemblance apparente, il y a toujours quelques parties diſſemblables.

Loi de la diverſité des actes particuliers & individuels.

De la diverſité des faits l'on peut déduire la diverſité de leurs cauſes occaſionnelles; car un événement ſeroit d'abord confondu avec un autre, ſi les cauſes occaſionnelles de ces deux actes pouvoient être les mêmes. Pour conſerver l'individualité à ces cauſes, il eſt donc néceſſaire de les rendre, d'un côté, complettes ou analogues à tous les rapports ſpécifiques de l'agent & de l'action, & de les réduire, de l'autre côté, à de juſtes bornes. S'il faut rendre ces raiſons complettes pour ne pas omettre une détermination qui eſt entrée dans l'acte, il faut ſe garder de leur donner trop d'étendue, afin de n'y pas faire entrer des déterminations qui n'appartiennent pas à l'acte. En négligeant de prendre ces précautions on perd de vue ce que l'acte contient de ſpécifique, & l'on eſt porté par là même à changer les raiſons particulieres & individuelles en générales, vagues & indéterminées, qui embraſſant trop d'objets à la fois, ne ſervent jamais à éclaircir un ſeul fait iſolé ou détaché des autres. D'abord que les raiſons qui devroient être particulieres conviennent à des faits de diverſe eſpece, on eſt dans le cas de ceux qui faute de ſignes diſtinctifs ne peuvent pas s'orienter.

La néceſſité indiſpenſable où l'on ſe trouve de recourir aux raiſons particulieres, dans tous les cas ſpécifiques, ſe rapporte à la nature de ces raiſons, qui doivent être tirées du fond des diſpoſitions que l'homme a apportées à l'acte. Ces diſpoſitions ſont *internes* ou *externes*. Les diſpoſitions internes ſont rélatives au ton de l'eſprit & à celui de l'ame de chacun, ou à ſa façon de penſer & d'agir. La façon de penſer eſt la maniere qui eſt propre & particuliere à chacun de ſe conſidérer ſoi même, c'eſt à dire l'uſage qu'il fait de ſa raiſon & de ſon eſprit. De mille embarras d'où l'homme s'eſt tiré avec plus ou moins d'adreſſe, il ſe forme une idée plus ou moins

diſtincte de la faculté de ſaiſir & de combiner les choſes. Comme il croit que ce jugement pratique vient de l'expérience & des faits, il y adhere & n'y renonce jamais. A force de ſe complaire dans cette opinion favorite de ſon ame, elle intervient dans chaque acte & regle les degrés du plaiſir & du déplaiſir que lui cauſent les actes qui ſe rapportent à lui. Sur un homme qui a une idée plus étendue du prix de ſes facultés, le même acte, ſoit favorable, ſoit défavorable, fait une impreſſion plus vive & plus forte que ſur un autre qui n'a pas conçu de ſoi-même la même idée. On feroit tort aux hommes, & on démentiroit en même temps l'expérience, ſi l'on ne poſoit pas en fait que tous les hommes croient avoir aſſés de raiſon pour ſe conduire; puis qu'il n'y en a aucun qui ne ſe ſoit trouvé quelquefois dans la néceſſité de s'en ſervir. C'eſt à cauſe de l'univerſalité de cette prétention, que l'uſage ordinaire de la raiſon s'appelle le *ſens commun*. Ainſi l'échelle ſur laquelle les hommes meſurent réciproquement leurs talens, ne concerne que ce que chacun a fait pour embellir ſon eſprit & pour étendre ſa raiſon. Le Savant met en ligne de compte la juſteſſe de ſes notions aquiſes, & l'homme du monde fait valoir la multitude de ſes obſervations uſuelles & pratiques. L'on ne convient ni dans l'évaluation du mérite de la même eſpece, ni dans l'appréciation du mérite d'une eſpece différente; parce que chacun évalue ſes propres idées ſelon la ſucceſſion de ſes actes, ſoit intellectuels, ſoit publics, & qu'il met aux notions qui lui ſont les plus familieres un prix égal à celui de la vie. L'homme ne s'ouvre jamais avec moins de reſerve que pour prôner la marque diſtinctive de ſon être. La vie de chacun nous offre par conſéquent aſſés d'occaſions par lesquelles il nous met au fait de ce qui l'affecte le plus. Lorsqu'on connoît, par pluſieurs faits analogues à cette opinion dominante de l'homme, l'état de ſon ame, on dit que l'on connoît l'*aſſiette* de l'ame ou le *caractere* de l'eſprit de quelqu'un. Car ſaiſir le caractere, c'eſt ſavoir en quoi l'on met le principal mérite, qui, par rapport aux variations que l'on fait ſubir à l'ame, doit être conſidéré comme leur *terme moyen*. Cette appréciation ſeroit plus aiſée à faire, ſi l'homme ne faiſoit varier à chaque inſtant l'opinion qu'il a conçue de ſon mérite. Le bonheur & le malheur, le plaiſir & le déplaiſir,

l'état, la condition & le rang font passer la présomtion humaine par une infinité de variations qui font changer l'homme d'un instant à l'autre. L'ame differe tant d'elle-même qu'il faut beaucoup d'art pour en tracer un portrait tout à fait ressemblant. Le meilleur est d'imiter la méthode de ces savans peintres, qui, après avoir vû l'homme dans plusieurs attitudes & positions différentes, s'arrêtent enfin à celle qui est la plus connue. On ne reconnoit un homme que par l'expression des traits que l'on a vus le plus souvent, & qui ont laissé les plus longues traces. Ce qui dans le moral donne une teinte ineffaçable à l'ame est l'impression habituelle du rang, de la dignité & de l'office. L'homme qui n'a pas toujours lieu d'être content de ses dispositions internes, cherche à se faire valoir par ses qualités *externes;* & attentif à ne pas laisser transpirer le secret de ses imperfections & de ses foibles, il s'empresse à dépayser les autres par l'art qu'il met dans la représentation & dans le soin de figurer. Ayant formé ses habitudes, ses penchans & ses goûts sur les notions que la société a adoptées, il ne sépare jamais de la représentation de son propre bonheur, ce que la société peut y joindre. De tous les rapports socials celui qui tient immédiatement à son existence publique l'intéresse le plus; & ce qui concerne sa position sociale agit sur lui avec toute la force de l'intérêt qu'il prend à sa dignité. A mesure qu'elle est plus grande & plus étendue il s'en occupe d'avantage; & le maintien de l'autorité met en mouvement toutes les facultés & les dispositions internes. L'ame, montée sur le ton de la dignité dont l'homme est revêtu, pense & se détermine en conséquence; & l'idée de la dignité extérieure, fondue, pour ainsi dire, dans celle de la dignité intérieure, en est inséparable. D'où il suit que pour rendre raison d'un événement particulier & individuel il faut recourir à l'assiette instantanée de l'ame, réglée & dirigée par le principal rapport social de l'agent. Ainsi la loi de la diversité indéfinie des actes particuliers peut être conçue en ces termes: *Trouvez le juste rapport entre la disposition actuelle de l'ame & l'office de l'agent.* Les idées variables & qui diversifient tous les événemens particuliers sont, l'assiette de l'ame qui est diverse dans chacun, & le rang qui varie indéfiniment. De la situation interne de l'ame, produite par les faits précédens,

l'homme tire ſes premieres réſolutions, qu'il modifie & arrange enſuite ſelon l'intérêt auquel il eſt aſtreint par ſon office. Si l'homme ne réfléchit pas, il confond ces deux notions. L'humeur prend la place de l'office, ou l'office remplace l'humeur. Mais pour peu qu'il réfléchiſſe, il ſépare le politique du moral, pour les unir enſuite conformément à la conſidération qui a prévalu. L'homme public donne la préférence aux conſidérations publiques, & les fait accorder avec les conſidérations particulieres ou rélatives à l'état de ſon ame. L'homme privé au contraire conſulte ce qui ſe paſſe dans ſon ame, & agit plus directement en vertu de ſes diſpoſitions internes. Tous en général veulent mettre la juſtice de leur côté, & ſauver du moins les dehors. Jamais action n'a été commiſe ſans que l'agent ſe fût donné la peine de la munir de quelques titres juſtificatifs. Bien ou mal imaginés, juſtes ou injuſtes, ces motifs ou prétextes tirés de ſes rélations & des rapports ont toujours ſervi à juſtifier ou du moins à pallier l'acte. Les plus honnêtes gens ne ſe ſont jamais portés à une action par le bien conſidéré indéterminément, mais par le bien déterminé ſelon leur état, leur rang & leur poſition. De même, les plus grands ſcélérats ne ſe ſont pas propoſé dans un acte le mal en général, mais un mal particulier & rélatif à la ſomme de leurs mauvaiſes diſpoſitions, de leurs déſirs & de leurs forces. La généralité de cette conſidération fait qu'il y a autant d'exemples de cette loi qu'il y a de cas individuels. Je me contente d'alléguer l'exemple de la translation du ſiege de l'Empire à Conſtantinople, où l'on voit très diſtinctement le concours des raiſons tirées de la diſpoſition interne de l'ame, & de celles que Conſtantin le Grand a empruntées de ſa qualité d'Empereur. Les plaiſanteries, les libelles & les animoſités des Romains donnerent à ce Prince de l'éloignement pour le ſéjour de la capitale, & des conſidérations d'État firent tomber ſon choix ſur Byzance. En prenant cette réſolution l'Empereur concilia l'intérêt de ſa paſſion avec l'intérêt de l'Empire. Le ſyſteme des cauſes productrices de cet acte conſiſtoit dans l'accord qu'il mettoit entre la ſituation ulcérée de ſon ame & ce qu'exigeoit de lui ſa dignité de Souverain & de Protecteur de l'État. Ainſi les raiſons de cet événement doivent être reſtreintes à ce qui ſe paſſoit alors dans ſon ame & à ce qu'exigeoit de lui ſon

office. La ſituation de l'ame de Conſtantin étoit analogue à la combinaiſon des circonſtances locales, & la conſidération de l'intérêt de l'Empire juſtifioit le choix de Conſtantinople. Ces deux ſortes de raiſons que Conſtantin a unies déterminément dans ſon acte, ſont claires & préciſes; mais elles ceſſeroient de l'être dès qu'on joindroit à ces raiſons exactes tous les lieux communs de la Morale & de la Politique.

Regle pour diverſifier les raiſons des actes politiques & publics.

Le rapport de la ſituation de l'ame à l'office de l'agent eſt la formule générale de toutes les raiſons individuelles, parce que ce rapport contient toutes les déterminations particulieres. Car rien ne ſert tant à particulariſer l'agent & l'action que la conſidération de l'état ſpécifique de l'ame & celle du rapport public, qui different dans chacun. Ces ſortes de raiſons conviennent aux événemens particuliers, parce que leur nature exige de ſpécifier ce qui doit entrer diſtinctement dans l'expoſé de chaque action. Dans les actes publics on n'a pas les mêmes raiſons de s'appeſantir ſur le ſpécifique & individuel, puiſque de tels actes préſuppoſent une combinaiſon de cauſes plus générales. Un événement n'eſt public que par la généralité de ſes rapports. Pour éclaircir des rapports qui en comprennent d'autres il faut s'appuyer ſur des conſidérations qui ne leur cedent pas en étendue. Il ſeroit même contradictoire de vouloir expliquer des choſes générales par des conſidérations moins générales; puiſqu'en agiſſant de cette maniere, on laiſſeroit à côté tous les cas qui ne ſeroient pas compris dans cette conſidération trop particuliere pour l'objet, & qui cependant devroient y être compris, vû la dénomination univerſelle qu'elle auroit d'abord affichée. D'où l'on peut inférer la néceſſité de l'analogie qui doit ſe trouver entre l'étendue des faits & celle des raiſons deſtinées à les expliquer.

Ce qui ſe rapporte au cœur eſt beaucoup plus particulier & individuel que ce qui concerne l'eſprit. L'ame paſſe par des ſituations où elle éprouve des plaiſirs ou des déplaiſirs, dont la ſomme peut être meſurée ſur l'échelle du bonheur & du malheur. Chacun compare ſon état précédent à l'actuel, ou l'actuel au précédent, & les ſait très bien évaluer. Il n'en eſt pas de même de l'eſprit, dont les progrès & l'affoibliſſement ſont beaucoup mieux apperçus par les autres, ou par l'obſervation, que par l'intuition.

La

La raison de cela est, que le champ de la vision de l'esprit, ou sa portée, comprend un nombre indéterminé d'objets à la fois qui ne peuvent jamais être déterminés quant à leur nombre & à leur enchaînure. Notre ame, qui est le dépôt de nos facultés pratiques, n'a quelquefois qu'un seul sentiment qui la remplit & l'occupe entierement; au lieu que mille idées nous passent presqu'en même tems par l'esprit, & ne nous laissent pas le loisir de fixer le jugement sur notre capacité pour les concevoir, pour les étendre & pour les combiner. Ce qui sert à fixer l'esprit est l'analogie qu'il met entre ses notions à l'aide du systeme social dont il les a empruntées. Comme chaque société a un certain nombre de maximes qui, réduites en notions, forment le sommaire des enseignemens publics, ou l'esprit de la société, de même chaque membre du corps social se fait un recueil de notions usuelles & pratiques qui, jointes ensemble, font ce que l'on nomme le *tour d'esprit*. Je me représente cet assemblage particulier des notions pratiques comme un extrait des notions sociales que chacun en a tirées pour son propre usage. Cet extrait est-il bien fait, ou comprend-il les principales notions sociales, rangées dans l'ordre qui leur convient, le tour d'esprit est tel qu'il doit être. Comme ces notions s'aquierent par l'expérience, c'est l'usage & le commerce du monde qui peuvent les donner; & le seul mérite ou démérite qui reste à l'homme est de les combiner & de les appliquer d'une maniere plus ou moins exacte & complette. C'est de la variété de ces applications, faites de l'esprit social à l'esprit de conduite & à celui des affaires, que dépendent toutes les classifications des esprits propres à agir. Tous les faits publics ayant été mis en exécution par des hommes de cet ordre, c'est donc à cette sorte d'esprit qu'il faut rapporter l'existence des événemens du monde politique; ce qui nous doit conduire à établir pour la regle & le correctif de tous les raisonnemens sur les faits publics, *l'accord entre le tour & la force de l'esprit politique de l'agent & la combinaison des affaires publiques.* Cette analogie devient fautive, ou par la faute du *sujet*, ou par le défaut de l'*objet*. L'ignorance, la légéreté & la présomtion font manquer l'agent; & la situation des affaires étant tellement embrouillée qu'on désespere du succès, il y a souvent une impossibilité morale de la tirer au

clair. Quand ces deux imperfections se rencontrent à la fois, la perte de l'État est infaillible. Souvent le dérangement qui s'est introduit dans l'ordre public démonte les meilleures têtes, & en les intriguant étourdit les esprits. Si le mal vient du sujet, il est plus aisé d'y remédier. On n'a qu'à suivre la marche de ses idées & voir comment d'une fausse supposition il a été conduit d'erreur en erreur. Ces erreurs sont d'autant plus faciles à commettre qu'il n'y a rien de plus variable que la combinaison des affaires publiques, c'est à dire, que le rapport que les événemens ont entr'eux & corrélativement à celui qui les considere. Dans cette complication des intérêts il y a un *maximum* pour chaque État & qui consiste dans son intérêt principal & essentiel. Cet intérêt procédant de l'assemblage de tous les intérêts particuliers & subordonnés, il est comme le centre de l'activité politique, d'où partent tous les actes réfléchis. Pour connoître la combinaison des affaires publiques, il ne suffit pas de bien saisir le point d'appui de l'État en question; mais un Politique, semblable à un Général d'armée, ne doit pas moins étudier les mouvemens des alliés & ceux des ennemis, soit pour déconcerter, soit pour agir de concert. Dans les choses où il faut combiner tant d'idées à la fois, c'est un avantage des plus précieux que de rencontrer juste. C'est pourquoi on ne peut rien exiger d'un homme public si ce n'est la prudence. Nécessité d'agir par la combinaison des affaires, il s'agit seulement de savoir, si ses talens ont été au systeme public dans la même proportion où ont été ses mesures à la probabilité du succès. C'est tout ce qu'on peut demander de lui; & c'est à quoi se réduisent les raisons des événemens publics.

Les faits nationaux se rapportent aux actes de prudence, parce que ces faits dérivant de la considération des intérêts externes & socials, ne comportent pas la notion du *vrai* & du *bon absolu*, mais du *vrai* & du *bon rélatif*. Le vrai absolu est l'expression de la nature, & il n'y a aucune société qui n'ait été nécessitée de restreindre l'usage de quelques notions & de quelques droits originaires de l'homme. Le bien public consistant dans l'avantage de tous pris collectivement, chacun a dû céder sa quotepart, & ce qu'il a une fois cédé il ne peut plus le redemander, ou agir comme s'il

ne l'avoit point cédé. Dans chaque ſociété les avantages ſont repartis ſelon la portion que chacun a miſe dans le fonds, où il faut laiſſer encore ce qui eſt néceſſaire pour faire face à tous les beſoins urgens du corps ſocial. Cette modification étant inhérente à la nature de chaque aſſociation, on ne peut exiger qu'un bien modifié par la conſtitution ſociale. Quand on agit univerſellement, on agit conformément au plus grand bien public, qui eſt le réſultat de l'ordre & du maintien de la ſociété. L'univerſalité comprend tous les cas particuliers, mais ſubordonnément à leur principe. Cela eſt ſi vrai que nous faiſons tous les jours les mêmes abſtractions, & nous généraliſons nos idées tout comme l'on généraliſe les actes dans les corps d'État. Chaque forme ſociale étant une idée univerſelle, il ſeroit abſurde de vouloir la rendre individuelle & particuliere en même tems. La perfection d'un État eſt ſemblable à celle d'une horloge, dont la deſtination eſt de donner une meſure exacte du tems. Ce but auquel doivent coopérer tous les rouages eſt-il rempli, on n'en exige pas d'avantage.

Ou qui pourroit exiger le vrai abſolu des maximes d'État, qui ne ſont tirées que des notions d'intérêts ſocials? Le vrai politique ſeroit abſolu, s'il n'y avoit pas d'autres intérêts oppoſés à celui de l'État dont il s'agit. Dans le meilleur des mondes il n'y auroit qu'un ſeul intérêt, qui ſeroit par conſéquent abſolu; mais dans un monde où il y a des intérêts ſi compliqués, le vrai, le bon n'eſt que rélatif. Car ce n'eſt que de la ſomme de tant d'intérêts variés & incidentels que le Politique tire ſes principes, qui ſont bien plus conformes aux regles de la routine & de l'expérience qu'à celles de la théorie & de la ſpéculation. Mettant pour baſe que l'État doit ſe maintenir & ſe conſerver, il remonte dans le temps paſſé, & conſidere attentivement le local. Le prix de ſes maximes ne conſiſte pas dans le frappant & le neuf, mais dans le ſolide & le continu.

Ainſi l'art de négocier & de gouverner ne ſe réduit pas à multiplier les notions, mais à les ſimplifier. On ne poſſede cet art à fond qu'en le réduiſant aux notions les plus ſimples & en même tems les plus fécondes. Si une grande machine eſt plus ingénieuſe ſelon qu'elle eſt plus ſimple, le prix de la politique conſiſte à ſe ſervir des notions communes.

Ces notions étant toujours les mémes, elles varient ſeulement dans leur application & dans leur connexion. Les divers uſages qu'on fait de la même notion ſont comme les traductions d'un même livre en pluſieurs langues. Tous les peuples ſe ſont ſervis des mêmes regles de prudence, & ils ont ſeulement différé dans l'expreſſion. Dans le fond on ne doit conſidérer ces maximes que comme des pieces conventionelles, où à la faveur de l'épithete auguſte d'inſtitution ſociale la prudence paſſe pour ſageſſe, & où l'art de meſurer les intérêts ſur l'échelle des convenances publiques fait une des principales parties de la juſtice diſtributive. Celui qui voudroit jetter ces actes dans le creuſet de la raiſon morale feroit plus de mal que de bien, puisqu'en les dépouillant de leur valeur ſociale & externe il les dépouilleroit en même tems de tout ce qu'ils peuvent valoir pour le maintien de l'ordre & du repos ſocial. Ce ne feroit pas rendre un grand ſervice aux autres que de les inſtruire de la valeur interne des monnoies qui ont cours dans le pays, puisque leur mérite ne conſiſte pas à avoir exactement la valeur qu'elles déſignent, mais à être les ſignes du prix des choſes & à être généralement reçues dans le commerce. Si dans chaque acte public on vouloit remonter jusqu'aux premiers principes du bien & du mal, on agiroit comme ces mauvais philoſophes qui, au lieu d'expliquer les phénomenes de la nature par le méchaniſme des corps & les loix du mouvement, ont peuplé le monde de bonnes ou de mauvaiſes intelligences. En donnant à chaque mouvement corporel un principe intelligent, on feroit exactement ce que fait un homme qui explique un acte de prudence par un ſentiment moral. C'eſt dans les actes particuliers & perſonnels, où l'homme a agi de ſon chef & n'a pas eu à ſoutenir les intérêts des autres, qu'il faut inſiſter ſur le moral. Mais dans les délibérations qui concernent les intérêts des corps ſocials on n'eſt pas toujours le maître de choiſir le parti qui convient à la juſtice univerſelle. Ajoutons encore que ce feroit une peine perdue que de vouloir approfondir ce qui s'eſt paſſé dans l'ame de l'agent, lorsqu'occupé de mille objets à la fois l'eſprit n'a pas bien ſu ſe fixer. On n'eſt jamais moins recueilli que dans le tems où l'on s'ébranle pour agir. Alors l'ame attachée à la conſidération d'un grand objet n'eſt pas à elle-même, mais ſe

portant au dehors parcourt les endroits où doit se passer l'action; occupée à animer les autres elle est sur les levres ou dans l'énergie de l'acte. Les César & les Alexandre auroient été bien embarrassés s'il leur eût fallu distinctement énoncer tout ce qui se passoit dans leur ame lorsque mille pensées diverses l'assailloient à la fois. Ce n'est jamais dans le trouble causé par les grandes passions, mais dans l'état paisible, que l'homme raisonne conséquemment; & ce n'est pas dans le concours & le choc des forces physiques qu'il faut chercher la force de l'esprit & de l'intelligence, mais dans un principe qui est hors de ce conflit. Comme Dieu n'est pas l'ame du monde, la vertu ou la raison morale n'est pas l'ame & le principe des combinaisons politiques. C'est à la vertu que l'on doit la somme de tous les biens particuliers & individuels qui contrebalancent le mal causé par l'arbitraire, le faux & l'intéressé des mesures publiques. En observant cette regle on a de plus le précieux avantage de ne pas mettre en opposition le vrai, le bon, considéré comme tel dans un pays, avec le vrai, le bon, considéré différemment chez une autre nation. Tous les actes publics qui tiennent aux divers systemes de religion sont de cet ordre. L'expulsion des Juifs par Ferdinand le Catholique & Isabelle, Rois d'Espagne, & par Émanuel, Roi de Portugal, ne doit être mesurée que sur l'échelle des convenances, & non sur celle des notions religieuses & morales. Il en est ainsi de tous les actes de cette espece, où il n'appartient pas à l'historien de faire l'office d'Inquisiteur de la foi ou celui de Casuiste, mais appellé à narrer les faits il doit se contenter de faire voir leur convenance ou leur disconvenance avec les intérêts solides & avérés de l'État.

Application du principe de la diversité indéfinie des faits à la suite des évènemens.

De ces regles & de ces maximes de la politique naissent les diverses séries des actes nationaux & publics, toutes les fois que la même maxime préside à la direction de plusieurs actes successifs. Selon le nombre des hommes qui ont réuni leurs intérêts, il y a eu plus d'uniformité dans les maximes qui les ont tenus unis. Cette uniformité croit tellement avec la grandeur des corps d'État, que les plus vastes États suivent ordinairement les maximes les plus uniformes. La difficulté d'ébranler ces grandes machines est la cause de l'attention que l'on a de ne pas leur donner des impressions

différentes. A peine une feule maxime eſt-elle affés vigoureuſe pour s'étendre fur toutes les parties d'un grand Empire; & ſi on la partageoit, ou ſi l'on y mettoit des conflits, on en affoibliroit viſiblement l'effet. Il eſt permis aux petits États de varier; mais les mêmes variations introduites dans un grand État le feroient périr. Semblables à ces maſſes énormes où la cohéſion des parties doit correſpondre à la violence & à la vélocité du mouvement, il faut que la ſolidité ſoit à toute épreuve.

Nous voyons cette tendance à l'uniformité croître avec les forces progreſſives & accélératrices des États; de ſorte qu'ils approchent plus du principe le plus uniforme, qui eſt le pouvoir abſolu, à meſure qu'il y a plus d'États particuliers fondus dans un ſeul. Le deſpotiſme, à en bien conſidérer l'origine & les progrès, n'eſt pas le réſultat d'un deſſein formel & conçu dans la vue de ſubjuguer; mais le pouvoir devient plus abſolu ſelon le nombre des conflits & des difficultés qui naîtroient de la diverſité des intérêts, & des privileges particuliers & individuels. Or dans un grand État, composé de pluſieurs peuples, le nombre de ces libertés feroit prodigieux, & leur variété rendroit tout deſſein d'union & d'uniformité entierement impoſſible. On cherche donc à aſſimiler ces privileges excluſifs, à faire diſparoître les marques diſtinctives des peuples & à égaliſer la condition de tous les ſujets; ce point d'égalité eſt celui de la ſoumiſſion abſolue & complette. Ce point auquel tend tôt ou tard tout ſyſteme ſocial, eſt comme le centre de gravité qui ſe place dans l'endroit qui lui convient ſelon l'arrangement, la figure & la denſité des corps. Par cette tendance des corps ſocials à être toujours plus reſſerrés par l'augmentation de l'efficacité du lien ſocial, ſelon leurs accroiſſemens en forces & en nombre, la ſuite des événemens ſocials forme une eſpece de chaîne bien liée, uniforme quant au principe & à la tendance, & diverſifiée par rapport aux moyens & à l'arrangement.

Le vrai point d'où il faut partir pour tracer le fil des faits nationaux eſt l'époque où la nation a véritablement agi de ſon chef. Au lieu de reculer ce terme je voudrois plutôt le rapprocher. Les aſſemblées nationales des Gaulois & les mœurs des Germains décrites par Tacite & par Céſar ſont les vrais pivots ſur leſquels ſe doit appuyer tout ce qui eſt antérieur à ces épo-

ques. A l'aide de ces notions exactes on a un point d'unité auquel doivent se rapporter les mouvemens de l'antiquité la plus reculée, qui sans céla ne sont que des lambeaux & des fragmens de l'histoire. Quand l'esprit n'est pas encore mûr & exercé par l'usage, on a beaucoup de peine à saisir des notions aussi mal conçues qu'imparfaitement articulées. Avant que d'avoir contracté la faculté de penser, les idées ne sont que des rêves dont le souvenir s'efface d'abord; & personne ne se souvient distinctement de l'état de son esprit dans le tems où il n'étoit pas encore formé. Tous les peuples ont été dans un tems d'enfance où à un langage rude & informe on joignoit la difficulté de concevoir les choses. On ne peut rien comprendre dans les actes où l'agent lui-même n'a rien compris. L'historien appellé à décrire & à prôner les faits des premiers habitans, seroit dans le cas de ces meres indulgentes qui voient dans leurs enfans l'esprit qu'ils ont & celui qu'ils n'ont pas. Il en est de l'esprit des nations comme de l'esprit de chaque individu, qui après mille essais qui n'ont point eu de succès prend enfin l'essor & se développe entierement. L'enfance est l'état des idées obscures, où l'on ne distingue pas plus les objets qu'on ne les apperçoit dans un corps qui est dans l'ombre d'un autre. Comme on commence à compter la cessation d'une éclipse du point de l'émersion du corps obscurci, de même ne faut-il commencer à considérer les accroissemens de l'esprit que du tems où l'esprit est véritablement éclos. Neuton, qui n'avoit qu'à jetter un coup d'œil sur les élémens d'Euclide pour les saisir, annonçoit dès lors le grand Neuton, & les premieres loix adoptées par les Egyptiens & les Perses présageoient l'excellente police de ces peuples.

En voulant réduire les suites des actes publics & nationaux à des notions fixes, je suis fort éloigné de blâmer l'esprit de recherche qui, en nous familiarisant avec les usages & les actes particuliers des anciennes nations, enrichit le fond de nos connoissances & nous met au fait des raisons particulieres & locales qui ont produit l'état social. Il y a dans chaque science une partie prélusoire qui n'influe qu'indirectement sur le but principal, & une partie qui l'atteint, parce qu'on se sert des voies les plus directes. L'esprit observateur étend la sphere des connoissances rélatives à l'organisa-

rion & aux propriétés particulieres des corps. De tous les objets connus par l'observation le physicien ne met cependant dans le fil des vérités physiques que ceux dans lesquels, par la voie d'une expérience savante & exacte, il a reconnu tel ou tel rapport aux loix du mouvement & de la nature, ou à telle ou telle notion & propriété universelle des corps. Mettant à la place des faits physiques, & connus par notre propre expérience, les faits publics, & tirés de la véracité & de l'expérience des autres, ou des monumens publics & bien avérés, je ne vois aucune raison qui pût nous empêcher de procéder également de deux côtés. Toutes les notions de l'histoire naturelle seroient isolées & perdues pour l'instruction, si on ne les eût rapportées aux notions générales de l'ordre de la nature; & nous tirerions très peu d'utilité des faits particuliers de l'histoire, si on ne les rapportoit à l'ordre social. C'est en s'assemblaut en corps de société que les hommes ont étendu, renforcé & exalté leurs sentimens. Avant que de s'être distingués en diverses classes par des intérêts différens on ne connut pas le prix des talens; & si on les connut par l'expérieoce, on ne sut pas l'apprécier. La parfaite égalité éteint l'émulation, au lieu qu'elle commence à exercer son empire d'abord que l'inégalité lui laisse le champ libre. On ne peut s'illustrer que quand la carriere de l'illustration est ouverte; & elle l'est par les honneurs & les applaudissemens publics. Les nations se sont ennoblies comme les hommes qui, confondus d'abord dans la foule, sont parvenus à force d'actes distingués à procurer à leur race des distinctions durables. Les sceaux auxquels on peut reconnoître les distinctions nationales sont les formes des sociétés. Ainsi on ne sauroit établir de meilleure regle pour commencer le fil des événemens publics que celle-ci: *Dattez l'existence d'une nation du moment où vous avez assés de données pour avérer sa forme sociale.* Cette époque sera en même temps celle de tous les faits publics de cette nation. En suivant cette regle, on a un guide sûr & infaillible; puisqu'une nation ne peut agir en corps que pour étendre & resserrer la force du lien national, qui ne peut être étendu ou resserré qu'en conformité de ce qu'il étoit au commencement de son institution.

Comme

Comme chaque forme ſociale ſe rapporte au caractere, à l'intérêt, à la force, au genre de vie & à la ſituation d'un peuple, il y a une diverſité indéfinie entre les liens ſocials. A l'exemple des corps compoſés les ſociétés different ſelon le divers aſſemblage des parties qui les compoſent. On a rangé les gouvernemens en claſſes, genres & eſpeces. Ces claſſifications, faites pour aider la mémoire & pour les faire mieux reconnoître, n'expriment pas cependant au juſte toutes les diverſités, gradations & nuances que l'on obſerve dans les formes des ſociétés. C'eſt par la voie de l'abſtraction qu'on a tiré de quelques propriétés générales des corps de ſociété ſemblables les noms de Monarchie, d'Ariſtocratie, de Démocratie &c. ſans que ces termes donnaſſent l'excluſion aux qualités qui ſont propres à chaque corps de ſociété en particulier. S'il n'y a pas deux hommes dont le caractere ſoit exactement le même, cette différence doit auſſi s'étendre ſur les hommes aſſemblés en corps de ſociété. Réunis par l'union des volontés ou par celle des forces, cette union qui n'eſt qu'un ouvrage de l'induſtrie ou de l'art, varie ſelon les changemens introduits dans les raiſons déterminatrices de la volonté, ou dans la direction & la meſure des forces. Les corps d'État paſſant par tous les eſpaces intermédiaires qui ſe trouvent entre les points de leur plus grande ou de leur moindre force, avancent ou reculent ſelon les impreſſions qu'ils reçoivent du dedans ou du dehors. Dans aucune de ces poſitions l'État n'eſt exactemenr le même; & la forme de la ſociété, qui eſt toujours en raiſon de la diverſe repartition des libertés & des forces, participe à rous les changemens que le bonheur ou le malheur fair ſubir à la ſociété en corps. C'eſt de cette diverſité des conſtitutions ſociales qu'il faut dériver la diverſité indéfinie des faits publics & nationaux. Car chacun de ces fils d'événemens découlanr d'un principe ſocial qui eſt différent des autres, tout ce que l'on a fait en conſéquence de ce principe doit entierement difféter de ce qu'on a ſait en conſéquence d'un autre principe ſocial; & tout comme il y a des variations indéfinies dans le cours des événemens d'une ſeule eſpece, la même diverſiré doit avoir lieu par rapport aux raiſons générales & particulieres qui ont produit ces variations.

Notion du Principe de continuité dans les faits en général.

Ces suites des faits ne pourroient pas résulter des formes sociales, & ces formes sociales n'auroient point de durée, s'il n'y avoit pas un principe qui les rendît durables. J'appelle ce principe celui de la *continuité indéfinie*; & j'entends par ce terme la durée de certains faits publics qui est illimitée à cause de la même valeur que les raisons déterminatrices de ces faits peuvent obtenir dans plusieurs âges successifs. Ces raisons déterminatrices se rapportent à l'*homme* ou à la *société*. L'homme suit deux loix qui sont indestructibles, dont l'une concerne la conservation de son être, l'autre l'augmentation de son bonheur. Tantôt ces deux loix agissent conjointement, & tantôt chacune de ces loix fait ressentir son effet séparément. Elles sont destinées originairement à aller de pair, parce que l'homme n'a une notion intuitive de son être que par le sentiment de son bien-être, ou d'un état conforme à une certaine maniere d'exister qui est réglée par les circonstances. Nous n'interceptons la force combinée de ces loix, qu'en substituant l'une à l'autre. Un homme enivré de plaisirs se presse de vivre & sacrifie son existence à quelques instans d'un bonheur, qui consiste en plusieurs sensations réunies dans une seule, desquelles l'impression trop violente absorbe toutes les facultés de son esprit & le fait tomber en délire. Cette façon d'agir n'est pas fort différente de celle d'un homme qui, accablé du poids de ses malheurs, regarde la non-existence comme le terme de ses souffrances, & préfere la cessation de son état gênant à la durée de son être. La joie & la tristesse portées à l'excès confondent également l'idée de l'existence avec la représentation infiniment exaltée d'une félicité présente ou absente. Ces sortes d'exemples font plutôt voir la force irrésistible avec laquelle ces loix agissent sur l'homme, que les forces par lesquelles l'homme réagit sur elles. Soumis sans réserve à ces principes de son existence, sa vie n'est qu'un développement successif de leurs impressions, réglées & modifiées à la vérité par l'usage de la raison, mais qu'elle ne peut jamais abolir. L'homme est bien le maître de substituer l'idéal au réel; mais il ne laisse pas de tendre au bonheur, & les actes de l'austérité la plus rigoureuse partent de la représentation de son bien-être. Tant l'empire des loix prescrites à l'homme est continu & inaltérable! La *société* n'y est pas moins sujette, puisqu'il faut considérer l'intérêt

public comme ce que le bien-être de chacun en particulier peut avoir de commun avec celui de tous. Ainſi aimer l'État, c'eſt aimer ſon exiſtence publique, ou la ſomme des biens & des agrémens qu'on tire de la ſociété, & que l'on ne peut conſerver & augmenter que par la conſervation & l'augmentation des forces ſociales. D'où il doit réſulter une tendance auſſi continue à augmenter le bien ſocial, que l'on a d'empreſſement pour augmenter & conſerver ſes propres forces. L'Etat formé ſur le modele de l'homme ſubſiſte donc auſſi longtems que l'homme ne ſépare pas ſes propres intérêts de ceux de la ſociété, & que ceux-ci lui ſervent à avancer les ſiens.

Le Principe de continuité tient aux bornes de l'eſprit humain.

Le principe du bonheur ne pourroit pas influer ſans diſcontinuité ſur l'homme dans un monde ſujet à tant d'alternatives & de viciſſitudes, ſi la repréſentation d'une certaine eſpece de bonheur n'occupoit chacun ſans ceſſe. De la repréſentation indéfinie du bonheur on paſſe inſenſiblement & comme par degrés à une repréſentation plus définie ou déterminée par un certain ordre d'objets. A meſure que la repréſentation de ce bonheur eſt plus vive, on met moins d'intervalles pour y parvenir. L'eſprit eſt-il une fois épris du beau idéal qui lui dépeint un objet, ſon application devient ſoutenue & ſon travail continu. En paſſant par les divers âges de la vie, on approche toujours plus de ce point qui paroit être celui de l'équipondérance des forces & des déſirs de l'homme. C'eſt du moins le vrai terme de l'âge paſſif de l'homme, & où il commence à devenir actif. Commençant à tirer ſes idées du chaos où les perceptions vives & les déſirs volages de la jeuneſſe les ont jettées & entaſſées, il ſe décide préférablement pour celles de ſes notions qu'il peut adapter à ſon office. Alors ces notions, après être devenues pratiques & uſuelles, laiſſent de plus longues traces après elles. On s'occupe à les varier, & à les appliquer à une infinité d'objets. Les mêmes notions reparoiſſent ſous une infinité de faces. Ce ſont les occupations de la vie qui reglent le nombre de ces notions & qui aſſignent à chacune ſon rang. C'eſt dans cette ſphere d'activité que l'homme ſe meut. Son orbite eſt dans la vigueur de l'âge d'une étendue proportionnée à celle de ſes forces & de ſes déſirs. A meſure que les unes & les autres s'affoibliſſent, ſon orbite ſe rétrécit

toujours davantage, jusqu'à ce que la vieillesse la restreigne totalement. La roideur des sens émoussés rendant le vieillard peu propre à recevoir de nouvelles perceptions, leur absence fait paroître plus claires les impressions du tems passé, à peu près comme dans le silence de la nuit l'oreille est frappée de chaque bruit sourd, & du son d'une voix qui se fait entendre de fort loin. En considérant le cours de la vie humaine l'on voit une tendance perpétuelle à rendre certaines notions continues. Le goût & le discernement, l'intelligence & la raison font aboutir toutes leurs opérations à choisir, à concentrer, à fondre nos idées ensemble, à en faire un bréviaire & un recueil propre à tous les usages de la vie. Si notre attention pouvoit suffire à plusieurs objets à la fois, & si nous pouvions étendre la sphere de nos connoissances aussi loin que vont nos désirs, nous ne serions pas si empressés à gagner en profondeur ce qui nous manque en superficie, à tourner une idée de tous les côtés afin qu'elle ne nous échappe plus, à nous rappeller si souvent le même fait. L'homme ne peut pas se dissimuler que ses facultés sont bornées, puisque l'usage même de ses facultés sert à l'en convaincre. Original & copie, Auteur & Traducteur en même tems, la vie de l'homme se passe à développer, à commenter, à retoucher le peu de notions que l'observation & l'expérience lui ont aquises; & il ne peut que sentir que les bornes de son esprit le ramenent sans cesse au continu & à l'uniforme.

La perfection artificielle tend à la continuité.

Les bornes de l'esprit portent l'homme à profiter de tous les secours que lui offrent la nature & l'art, qui different dans leur destination plus ou moins universelle. La nature, qui est l'assemblage des forces originaires des corps & des esprits, les fait tendre au beau, au grand, au parfait, au continu en général. L'art, qui subdivise ce que la nature a uni, rapporte les beautés & les perfections particulieres à certains objets, & nous conduit vers la perfection de la nature par le moyen de quelques méthodes ou voies abrégées. Toutes ces méthodes sont concentriques & tendent unanimement au grand but de tous les arts, qui est leur exacte conformité avec la beauté, l'étendue, la majesté & l'énergie de la nature *physique* & *morale*. Selon la régularité de la notion que chacun s'est formée du beau & du bon, de l'utile

& du vrai, il y a des tendances plus réglées pour l'atteindre. Mais si l'on pouvoit jamais parvenir à l'égaler ou à perfectionner tellement un ouvrage de l'art qu'il pût tenir la place du beau & du parfait idéal, on n'auroit qu'à s'y arrêter, & à ne plus s'en écarter. Chaque notion qu'on a du beau & du parfait est comme le soleil de la sphere de notre activité, qui reste fixe & immuable, en répandant ses rayons sur ce qui l'environne. A l'aide de ces lumieres chaque méthode artificielle rassemble autant de perfections particulieres qu'il est possible & tend à s'approcher du plus haut point de perfection. En répétant les mêmes opérations & en les rendant familieres au sujet, elle travaille à les rendre continues, c'est à dire, telles qu'avec le moindre emploi des forces & du tems on puisse opérer. Si les manieres des artistes different quant à la diversité de leurs notions originaires du beau, qui imprime divers degrés de perfection à leurs ouvrages, ces manieres conviennent dans un point, qui est l'aisance & la facilité de l'exécution que chacun de ces artistes peut donner à ses ouvrages après en avoir fait un assés grand nombre d'essais. C'est que le principe de continuité commence à opérer sur l'esprit & le génie, la main & l'exécution, dès qu'on croit avoir satisfait à toutes les regles de l'art.

Il en est de la perfection morale comme de celle qui imite les beautés & les contours des corps. Tous les êtres pensans se font des regles de sentiment & de conduite. Ceux qui dépourvus de la faculté de réfléchir, s'abandonnent au courant des passions, suivent ordinairement les impressions les plus violentes, qui sont les plus propres à vaincre leur indolence & inertie naturelle. La loi de continuité commence d'abord à agir sur des hommes qui tiennent si fort à la matiere. S'étant laissés violemment ébranler une fois, ils sont ébranlés au moindre conflit qui se trouve entr'une de leurs notions confuses & un incident de la vie. Semblables à ces matieres inflammables qui ne perdent jamais la tendance à se dilater, l'explosion suit l'offense de près. L'approche de chaque activité qui leur répugne & qui par sa vitesse ressemble tant au feu, les fait réagir. Cette disposition que l'on contracte à réagir avec toute la somme de ses forces, dépouillée comme elle est de tout principe capable d'en modérer l'impétuosité & la fougue, ne s'accroît pas

en intensité, & si elle produit de plus funestes effets, ce n'est qu'à cause du plus grand nombre d'obstacles qu'elle a rencontrés. Comme la poudre à canon fait sauter les tours & les palais, les chaumieres & les cabanes, les passions s'enflamment également & partout; ce qui est la cause de tant d'actes d'atrocité & de violence qui paroissent énigmatiques aux yeux de l'humanité, mais qui ne le sont pas à ceux de la raison accoutumée à comparer les effets avec leurs causes. L'homme, qui est un être actif, agit indéfiniment jusqu'à ce qu'il ait obtenu des directions qui le déterminent à agir plutôt de cette maniere que d'une autre. C'est la police & la raison qui servent à apprivoiser l'homme & à lui ôter ce qu'il tient de sa férocité naturelle. Néglige-t-on de lui former l'esprit & le cœur, il aura les passions d'un Sauvage, & leurs traces seront ineffaçables. Pour peu que l'homme veuille se donner de la peine, il parvient à joindre une notion à ses actes. Cette notion, tirée de sa dignité particuliere, ou de sa dignité publique, imprimera un caractere d'uniformité à ses actes qui les fera reconnoître fort aisément. A force d'appliquer la même notion aux actes de diverse espece, cette notion deviendra si familiere à l'homme qu'elle sera inséparable de son être, & qu'il la mettra de pair avec la vie. Pour reconnoître la continuité de l'empire que les notions exercent sur les facultés déterminatrices de l'ame, l'on n'a qu'à considérer la force & la durée des impressions que fait sur nous le point d'honneur. Que l'on déclame tant que l'on voudra contre les vues destructrices de l'ambition, on n'en arrêtera jamais le cours, parce qu'une notion tirée de la condition, du rang & de la dignité d'un homme, lorsqu'elle est accompagnée d'une grande activité, doit nécessairement produire ces effets. Chaque notion, mise plusieurs fois en acte, subit la force du principe de continuité, & déterminant l'homme à agir devient inaliénable de la nature de son être. C'est un malheur pour le genre humain qu'il y ait si peu d'occasions où les vrais sentimens de probité, de justice & d'honnêteté universelle puissent se faire jour au travers des conflits & des embarras de la société. Comme ces actes ne semblent être que des exceptions mises à l'observation des regles sociales, ils ne font pas assés de sensation. Destitués de l'éclat qui devroit assurer à chacun de ces actes un plein effet,

le principe de continuité ne peut jamais avoir prise sur eux. L'on ne se conforme qu'aux choses qui par la fréquence de leur exercice peuvent être combinées & appliquées aux divers usages de la vie. Les traces de la raison & du bon sens que l'on trouve au milieu d'un peuple ignorant & abruti, seront aussi peu utiles que sera à un pilote l'apparition des astres dont il ignore la position & le cours. Quand on ne peut pas comparer une notion avec une autre on n'en tire aucun parti. C'est pourquoi ces actes que l'on traite de signalés & d'extraordinaires, parce qu'ils n'ont aucune analogie avec les rapports socials, paroissent être comme *incommensurables.* L'histoire les conserve dans ses archives, & ne les produit que lorsqu'il s'agit de prouver le prix de la vertu, & la dignité attachée à la qualité d'homme de bien.

L'idée de continuité entre dans celle d'association publique.

Les hommes étant susceptibles de continuité quant au soin de se perfectionner en sens artificiel & moral, ils ont une tendance à faire durer leurs actes. La durée des actes présuppofant l'uniformité d'un modele & l'égalité successive des moyens que l'on emploie pour le copier, cette faculté rend l'homme propre à l'unir avec les autres. Car on ne peut concevoir aucun ordre de société, sans se représenter en même tems que cet ordre a été établi par l'uniformité des raisons. Or ce qui a servi à établir une chose, doit aussi servir à la perpétuer. Pour perpétuer un établissement quelconque, il faut donc que les mêmes raisons qui l'ont institué, servent aussi à le perpétuer. Ainsi le principe de continuité tient immédiatement à tout ordre social, destiné par sa nature à être perpétuel. S'il n'y avoit que des sentimens variables, & si le libre arbitre de chacun n'étoit pas soumis à la volonté de tous, aucun lien social ne pourroit avoir lieu. Toute société où l'usage de la liberté ne se trouve pas restreint, est dans le cas d'une cohue rassemblée par le hazard, & que le moindre caprice disperse. L'uniformité des vues, produite par celle des volontés, étant l'ame des corps socials, il faut que l'on ait la disposition d'envisager de la même maniere les objets. On ne peut envisager de la même maniere les objets qui n'ont pas le même rapport & la même analogie avec nous. Les notions habituelles que l'on joint aux actes, & les idées que l'on a d'un certain bien-être public, sont ordinairement celles qui ont la plus longue durée. Ces idées étant comme inséparables de l'existence pu-

blique, elles réſiſtent comme les ſels fixes à tous les diſſolvans. Si le fondateur d'une ſociété l'a fondée ſur ces parties inaltérables, il peut s'aſſurer de la ſolidité de ſa conſtitution. On n'a point de peine à fléchir la volonté, parce qu'on l'a déjà fléchie pluſieurs fois. La prévention dans laquelle nous ſommes en faveur d'un homme, nous fait paſſer par deſſus mille conſidérations; & nous ne ſommes jamais prévenus plus favorablement que pour notre propre façon de penſer & de ſentir. Tout l'art des anciens législateurs ſe réduiſit à aller à la découverte des ſentimens & des notions dont l'indeſtructibilité leur répondît du ſuccès. Sans avoir l'audace de vouloir heurter de front la nature, ils ſe contenterent d'y mettre quelques nouvelles déterminations, & de donner une permanence légale à ce qui ne répugnoit pas à l'uſage. Au lieu de gêner les penchans, ils agirent comme ces ſages conducteurs des eaux qui, attentifs à la direction de leur cours, élargiſſent les lits des rivieres, coupent les terres qui ſont trop avancées en quelques endroits, nivellent les eaux d'un fleuve, & en ôtant la cauſe des tournans & des eaux mortes le font couler d'une maniere moins inégale. La nature leur donnoit-elle quelques indices des diſpoſitions militaires ou civiles, pour le ſavoir ou le commerce, ils en faiſoient des citoyens ou des ſoldats, des ſages ou des négocians. Preſcrivant ce qui étoit du reſſort de tous, leurs réglemens prohibitifs ne tendoient qu'à éloigner ce qui empêchoit la nature de coopérer. Comme il y avoit alors dans l'eſprit national beaucoup de parties continues & peu de variables, il étoit plus aiſé à un ancien législateur de former un corps ſocial, qu'il ne le ſeroit aujourd'hui, où la variété des ſentimens artificiels & la diverſité des goûts factices ont fait preſque éclipſer l'uniforme & le continu. Avant qu'on eût trouvé un terme moyen pour tant de diverſes notions ſociales, elles auroient déjà changé de forme & de nom; de ſorte que ce ſeroit toujours à recommencer. A faire abſtraction des liens que la force coactive introduit dans la ſociété, & qui doivent ſuppléer aux liens de la nature, il eſt conſtamment vrai de dire que le monde ſocial ne s'eſt formé, & ne ſe maintient encore, que par l'action du principe de continuité ſur les penſées & ſur les affections de l'homme. C'eſt à lui qu'on doit l'amour de la patrie & tous les actes de patriotiſme. Il en eſt

des

des corps de société comme des corps physiques qui, destinés par leur essence à ne pas être altérés, doivent avoir des parties bien durables. Otez, si vous pouvez, à un corps les parties qui constituent sa diversité spécifique, & ce ne sera plus le même corps. En substituant aux notions continues & solides des notions & des actes éphémeres, on fait approcher un corps social de son terme. Un État ne se perd jamais par le déplacement de ses notions originaires, ou par leur association avec des notions de diverse espece. Car il en est des notions sociales comme des forces corporelles, qui reparties différemment dans les muscles ne laissent pas de rendre l'homme également robuste. L'infirmité résulte uniquement de ce que les muscles n'ont plus la même tension & que leur rapport tonique s'est perdu. Le dépérissement des États procede également de ce que les notions continues ont perdu, pour ainsi dire, leur élasticité, ou de ce que la même notion ne produit plus les mêmes effets, & qu'il n'y a aucun rapport entre l'esprit de la nation & celui du gouvernement. On dit que les États se dénaturent, lorsqu'à la place des mœurs & des sentimens qui leur sont propres, ils en prennent de diverse espece. Mais ce n'est pas encore le terme de leur durée. Ils ne se corrompent pas comme s'enrouille le fer qui, quoique rongé par les acides de l'air, ne laisse pas d'être le même métal. Les États ne périssent que quand ils sont gangrenés, ou privés de la sensibilité morale. Aussi rapide & violente dans ses effets que le poison, la corruption, semblable à la gangrene, parcourt les jointures & les vaisseaux, produisant la stagnation dans les parties fluides & la pourriture dans les parties solides. La société, en dégénérant de son institution primitive, au lieu d'avoir tel ou tel nombre de parties continues, n'en a plus que la moitié, le tiers, le quart, & passe enfin jusqu'à n'en plus avoir. C'est alors que la forme seule reste à ce corps social, & il n'est que l'ombre de ce qu'il avoit été.

Constituté des institutions & des formes sociales.

Ce qui résiste le plus longtems aux atteintes est la forme de la société, ou la maniere dont les divers ordres de l'État se sont unis ensemble. Le vice, qui est le plus grand fléau des sociétés, fait sentir d'abord ses malignes influences aux individus. Accompagné de tout ce que la sensualité a de plus séduisant il traîne à sa suite l'indolence & la perversité, l'incrédulité &

le fanatiſme, l'effronterie & l'engourdiſſement moral. Malgré tous ces ravages faits dans l'intérieur de la ſociété, ſa forme ne laiſſe pas de ſubſiſter quant à l'extérieur, à cauſe de la durée des forces qui la maintiennent. Toutes les formes ſociales ſont fondées ſur des notions univerſellement reçues, & dont l'application étoit aiſée à faire. Selon le divers génie des peuples qui ſe ſont formés, ou ſelon le génie des législateurs qui ont voulu les former, on a ſaiſi les différens rapports des ſociétés privées ou les principes de la vie ſociale, pour les adapter à la ſociété en corps. L'Empire de la Chine, dont les inſtitutions partent d'un Sage, a reçu l'empreinte d'une Académie. L'Empereur, en qualité de fils du Ciel, en eſt le législateur & le modérateur. Tout le corps des lettrés parvient aux honneurs de l'État d'une maniere à très peu près ſemblable à celle de nos promotions Académiques. Les Tartares ont formé leur État ſur l'idée d'une Horde, & le Khan eſt le chef de pluſieurs de ces hordes. Tous les États deſpotiques ſont exactement gouvernés de la façon dont le Sultan agit dans le Serrail, qui eſt l'image de l'Empire. Les Califes, qui ſe donnoient pour les fils ou les vicaires du Prophete, demandoient une obéiſſance ſtricte de tous les Croyans. Lycurgue, qui ne vouloit pas fonder ſon État ſur l'opinion, choiſit pour modele de ſa conſtitution une phalange des mieux diſciplinées & aguerries, dont les Généraux, qui étoient les deux Rois de Sparte, devoient être reſponſables de leur conduite à un Sénat. L'Ariſtocratie a tiré ſon origine du reſpect que l'on a porté de tout tems à l'expérience & à l'âge; la Démocratie au contraire naquit de la néceſſité où pluſieurs ſe trouverent de réclamer le ſecours des autres; & les attroupemens du peuple qui ſe firent dans ces occaſions, donnerent la premiere idée des aſſemblées publiques, ſur leſquelles on ſe mit à former les conſtitutions de ces États. La protection & la défenſe qu'on attendit des talens & du mérite établirent la forme du gouvernement qui eſt la plus unie & la plus étendue. Les ſentimens d'amitié occaſionnerent les États confédératifs, & les intérêts communs des Négocians les États commerçans. On n'auroit jamais fini ſi on vouloit entrer dans le détail, & il ſuffit de dire que toutes ces formes ſociales, indépendamment de toute autre conſidération, ont en général une *continuité qui eſt*

rélative à leur ſimplicité, à leur applicabilité à tous les ordres & à toutes les parties de l'État, & à l'excluſion formelle de tous les conflits. Pour prouver la vérité de cette regle j'en appelle au corps de l'hiſtoire, qui nous fait voir que toutes les révolutions internes, & la plupart des révolutions externes, ont tiré leur origine des conflits qui ſe trouvoient entre les parties conſtitutives du gouvernement. Et il eſt difficile de prévenir la renaiſſance perpétuelle des colliſions qui doivent réſulter d'une idée trop compliquée qu'on a attachée à la forme originaire du gouvernement. En partant de la continuité des formes ſociales conformément à leur ſimplicité & à l'univerſalité non interrompue de leurs effets, je préſuppoſe une continuité d'efforts tendans à réaliſer cette notion & à produire la plus grande ſomme de biens qui ſoient compatibles avec un ordre de gouvernement. Car les plus belles conſtitutions, ſemblables aux notions du génie, doivent être miſes en œuvre ; & c'eſt dans leurs développemens qu'on voit leur utilité.

Continuité des notions vulgaires, qui ſe rapportent à la Théorie.

Ces notions fondamentales de l'ordre ſocial ſont les plus durables, parce que tous les membres de la ſociété ſont également intéreſſés à les maintenir. A côté de ces notions il faut mettre celles auxquelles une infinité d'incidens de la vie font recourir l'homme. Une idée ne peut être rapportée à une infinité de cas ſans être, d'un côté extrémement *exacte*, ou de l'autre extrémement *vague & confuſe*. Les idées exactes, ces rayons de la lumiere la plus pure, ont une inaltérabilité inhérente à leur nature & indépendante de l'uſage. Faites pour nous ſervir de regle invariable du vrai & du bon, elles ſont dans les rapports éternels des choſes. Le Sage qui en eſt le dépoſitaire & l'interprête, a beſoin de toute la ſagacité de ſon eſprit pour les rendre intelligibles au vulgaire. Encore n'y parvient-il que fort rarement ; & s'il lui arrive de rencontrer la façon de penſer du peuple, c'eſt à cauſe d'une analogie qui ſe trouve entre une notion de l'intelligence & une face ſous laquelle on ſe repréſente un beſoin de la vie. Quand le peuple ſaiſit ces idées, c'eſt toujours après les avoir miſes à ſa portée, ce qui leur fait ſouffrir une déviation à peu près ſemblable à celle que ſubiſſent les rayons du Soleil en paſſant de l'éther dans notre atmoſphere. Cette réfraction croiſſant ſelon la grandeur & la ſublimité de ces notions, elle paſſe

quelquefois jusqu'à les transposer & à les transformer entierement. On doit être moins étonné de cette tranformation d'une idée quand on considere le nombre de ceux qui la veulent adapter à leurs usages. Chacun voulant en avoir une portion, s'attache à la considérer sous une face particuliere; & le sort d'une grande notion tombée entre les mains du vulgaire est semblable au sort d'une statue de grand prix qui tombe entre les mains avides de soldats qui la brisent en mille pieces. Le peuple est le plus avide des notions qu'il peut considérer sous plusieurs faces, & qui lui servent à résoudre quelques problemes sur des questions intéressantes de la vie active. L'origine du bien & du mal, la nécessité & le hasard, furent de tout-tems les objets de la curiosité populaire. Chacun sait la fortune prodigieuse qu'a faite la doctrine des Mages sous le nom de Manichéisme. L'idée des deux principes, après avoir été le pivot de la religion & de la doctrine des Perses, se répandit dans les églises de l'Orient & de l'Occident. Il n'y eut point d'hérésie contre laquelle on vît tant sévir le zele ardent des conciles & des Papes. Au milieu des persécutions les plus atroces la doctrine de Manès ne se soutint pas seulement, mais fit encore des prosélytes. C'est que cette idée semble être un des axiomes du vulgaire, dont il se sert pour expliquer mille incidens de la vie. Dans toutes les especes d'idolatrie & dans tous les systemes religieux interprétés par le vulgaire on trouve des traces de Manichéisme. Les grandes difficultés auxquelles on s'expose en voulant expliquer l'origine du mal & celle du bien, ont fait que les théories les plus lumineuses n'ont jamais pû ôter de l'esprit du peuple l'idée que mille accidens fâcheux lui avoient fait naître de l'existence d'un principe malfaisant & de sa puissance absolue. Que l'on prenne la peine de considérer le sort des idées qui concernent le Fatalisme & le cas fortuit, l'amende & l'expiation, la félicité & le malheur, & l'on sera surpris de voir jusqu'où a pu aller l'envie de commenter, de varier & d'appliquer ces notions. Ne suffit-il pas d'alléguer la notion de l'Être par excellence & le nombre infini des changemens & des altérations que le vulgaire lui a fait subir? Comme cette transformation infiniment variée n'est arrivée qu'aux notions qui étoient susceptibles de tant de variations, éta-

bliſſons pour regle de la continuité indéfinie des notions: *Qu'une notion ſe maintient dans l'eſprit du peuple, ſelon l'intérêt qu'il prend à l'objet de cette notion, ſelon le nombre des cas dans leſquels il doit y recourir, & ſelon qu'elle eſt plus indéterminée ou qu'il y a plus moyen de la façonner & de l'arranger ſelon les déſirs & ſelon les intérêts de chacun.* Souvent il eſt arrivé à un Philoſophe d'avancer une propoſition comme un objet de recherche ultérieure, & ſous la forme de ſimple conjecture; mais à peine cette penſée, qui lui eſt échappée, entre-t-elle dans le tourbillon des idées & des déſirs vulgaires, qu'elle change de nature & prend toutes les formes que l'intérêt & la curioſité du peuple veulent bien lui donner. Le premier qui a imaginé la Métempſycoſe ne s'eſt pas aſſurément figuré l'effet qu'elle devoit produire un jour, & Pythagore, qui ſeroit bien ſurpris de voir une ſaillie philoſophique changée en article de foi, ne réuſſiroit pas à en déſabuſer les Indiens comme il n'avoit que trop réuſſi à les induire en erreur, ou du moins à les affermir dans leur opinion, s'il eſt vrai qu'il l'a tirée des Indiens.

Continuité des notions morales ou pratiques.

Si les idées théorétiques ont tant de pouvoir ſur l'eſprit du vulgaire, les notions pratiques, qui ſont plus directement de ſa compétence, doivent produire encore de plus grands effets. En parlant de notions morales, je n'ai pas en vue ces préceptes invariables de la raiſon qui nous ont été donnés pour régler nos mœurs. Car ces commandemens ſupremes ſont au-deſſus de toute atteinte, & tiennent à l'ordre moral de la même maniere que les loix de la nature ſont compriſes dans l'ordre & dans l'arrangement univerſel des corps. Je prends le mot de notions morales & pratiques dans un ſens plus reſtreint, & je veux déſigner par ce terme ces inſtituts tirés des mœurs nationales, qui ſe ſont perpétués à la faveur du rapport particulier qu'ils ont eu à un certain ordre de perſonnes. Le ſentiment d'honneur adopté par la nobleſſe eſt, par exemple, une notion pratique, fondée ſur l'idée de diſtinction, de rang & de dignité. Cette idée étant reſtrictive, elle ne regarde que les gens de qualité. Comme la liberté étoit anciennement la marque diſtinctive de la nobleſſe, il y eut une diſtance infinie entre un noble & un ſerf. L'immenſité de cette diſtance produiſit une idée indéterminée de prééminence qui fut ſoutenue par un ſoin des plus ſcrupuleux

& des plus exacts à éloigner tout ce qui pouvoit flétrir l'honneur attaché au rang & à la condition. L'exercice de la liberté ne peut subsister à moins qu'elle ne souffre aucune atteinte de la part de ceux qui sont d'une condition égale. De là procédoient ces idées de *parité* qui imposoient la nécessité d'avoir pour un de ses *pairs* les mêmes égards qu'on avoit droit d'exiger de lui. Chaque offense fut donc envisagée comme une infraction faite aux droits de pair. Quoique les choses eussent changé de face, la même notion ne laissoit pas de subsister. Celui qui voudroit faire l'analyse de tout ce que la délicatesse sur le point d'honneur comprend sous le nom ambigu de flétrissure & d'offense, entreprendroit une tâche à peu près semblable à celle d'un homme qui voudroit faire le dénombrement des articles de foi traités comme tels par un rigide orthodoxe, puisqu'il y a des deux côtés la même façon d'argumenter. L'homme zélé pour le point d'honneur regarde comme flétrissant tout ce qui a quelque liaison avec l'idée vague qu'il s'est formée de la flétrissure; & l'homme zélé sur les points de doctrine traite d'hétérodoxe tout ce qui ne lui paroit pas convenir avec son systeme. Prenons encore l'exemple du respect que l'on doit avoir pour un homme qui a passé sa vie dans des actes de sainteté & de dévouement au service de Dieu, ou celui que nous fournissent les mesures prises pour conserver la pureté du lien conjugal; & nous serons obligés de convenir que *la continuité des sentimens pratiques & vulgaires est en raison des restrictions exclusives que l'on met à un rang, qualité ou condition, qui n'ayant pour base qu'un accord tacite, semblent autoriser la supposition qu'il y ait un nombre indéterminé de cas dans lesquels ces prééminences puissent souffrir quelque atteinte.* Le gentilhomme & le dévot, l'Espagnol & l'Oriental sont également attentifs à se prémunir contre toutes les altérations que pourroient subir les notions exaltées qu'ils se sont formées de la religion, de l'honneur & de la fidélité. On est comme en sentinelle pour prévoir le danger, & afin de n'être pas pris au dépourvu on est toujours armé de la force & de l'énergie du sentiment. Tant d'occasions réelles, & tant d'autres qu'on a seulement imaginées, servent à entretenir, à répandre & à rendre continus les sentimens de cette espece qui, par leur con-

nexion immédiate avec notre exiſtence publique, ſont renforcés & exaltés ſans ceſſe.

Un ſentiment ſe change en uſage d'abord qu'il a l'approbation publique. Mille idées échapperoient au peuple s'il n'en fixoit la ſignification par des repréſentations ſymboliques. Les belles images qui ſont employées dans le diſcours pour nous repréſenter d'une maniere vive & ſenſible l'étendue & la fineſſe d'une idée, & les cérémonies inſtituées dans le deſſein d'imprimer & de perpétuer une notion pratique, nous rendent les mêmes ſervices, puiſqu'elles facilitent également la conception, & nous déterminent plus puiſſamment à agir. Tout ce qui de ſa nature tend à la durée, & qui ne doit plus être révoqué, demande l'appoſition du ſceau inviolable de l'uſage. Les récompenſes dues à la vertu, & les flétriſſures dont il faut noter le vice, portent cette empreinte. Les choſes qui ſont faites au nom de pluſieurs & dont la publicité leur doit donner une autorité ſacrée & inviolable, ont beſoin de ſignes dont la ſignification puiſſe être ſaiſie de chacun. La continuité de ces ſortes d'uſages tenant aux inſtitutions & aux formes ſociales, ils ne doivent s'anéantir qu'avec la forme ſociale. Leur ſort étant le même que celui de toute la ſociété, ils n'ont d'autre regle que celle qui eſt preſcrite à tout le corps ſocial. De ces uſages, que l'on peut appeller ſocials dans un ſens ſtricte & particulier, ſont entierement différens ceux qui réſultent de quelques notions vagues & indéterminées de police & d'adminiſtration. La queſtion à laquelle on met les priſonniers pour en tirer l'aveu des crimes dont ils ſont accuſés, eſt encore un reſte des anciennes épreuves par l'eau & par le feu, que les législateurs ont cru propres au deſſein qu'ils avoient de s'éclaircir ſur la vérité d'un forfait. La férocité du ſiecle & le danger que couroit la ſociété par les conjurations & les brigandages publics, ſemblent avoir porté les Magiſtrats à introduire cet uſage dans les cours de judicature. L'origine de la torture étant rélative à une combinaiſon de circonſtances qui avoient une analogie vague & générale à la corruption du genre humain en général, on a laiſſé ſubſiſter cet uſage, même après l'abrogation des raiſons qui l'ont fait inſtituer, & il s'eſt continué juſqu'à nos jours à la faveur du change que prirent les Juges, en mettant tout le genre humain & ſes diſpo-

Continuité des uſages.

fitions vicieufes à la place d'une conftitution mal affurée & expofée à des dangers perpétuels de la part des pertutbateurs de la fociété & de la paix publique. D'où l'on peut inférer que *la continuité des ufages fe rapporte à l'analogie vague & indéterminée des raifons particulieres & variables d'un événement aux raifons univerfelles & déterminées par la nature des chofes.* La crainte a plus lieu dans les chofes de gouvernement & de pratique que dans les objets de théorie; c'eft pourquoi la queftion s'eft encore maintenue en quelques endroits, au lieu que la connoiffance exacte & déterminée du fyfteme des corps céleftes a fait entierement évanouir tous les ufages de l'Aftrologie judiciaire, parce qu'il n'y a plus même d'analogie vague & indéterminée entre le fort des hommes & le cours des aftres. Les notions aftronomiques ayant totalement diffipé les rêves aftrologiques, ces faux prophetes furent chaffés de leur dernier retranchement. Si la théorie de la contingence étoit auffi bien éclaircie que celle du ciel, on parviendtoit également à bannir de la fociété tous les ufages fuperftitieux & amphibologiques qui fe rapportent à la prefcience de l'avenir.

Les loix continuent d'exercer leur efficace dans un ordre fucceffif.

Il y a une continuité de *durée*, & c'eft celle dont nous avons parlé jusqu'à préfent; mais il y a encore une autre efpece de continuité, que l'on peut appeller d'*acceffion*. Car il y a des féries d'actes, qui, fuivant une proportion conftante avec les parties de l'État, reçoivent des accroiffemens continuels. De cet ordre font les *loix* qui reglent la conftitution & l'ordre civil de l'État. C'eft la fomme des intérêts publics qui doit déterminer le nombre, l'ordre & l'exécution des actes rélatifs à ces intérêts, tout comme dans le régime qu'on prefcrit à un homme, le nombre auffi bien que la nature des préceptes doit être analogue au nombre & à la qualité des états fucceffifs dans lefquels doit fe trouver un homme qui veut prévenir les maux capables d'altérer fa fanté. Ainfi les loix doivent avoir un parfait rapport avec les chofes que l'on veut régler par ces loix, ou avec le principal but auquel aboutit le réglement. Dans la législation c'eft la plus grande union de tous les membres de la fociété. Une législation eft donc plus parfaite qu'une autre, lorfqu'il y a moins de collifions entre le bien public ou celui qui eft commun à tous, & le bien particulier de chacun, le tout confor-

conformément à la nature du lien social. Pour produire le bien public, il faut que les loix soient observées, ce qui se fait par l'obéissance *stricte* ou l'observation *réfléchie*. L'obéissance stricte suit la lettre de la loi par des actes simples isolés, & où la même force doit toujours intervenir. Chaque acte d'obéissance stricte est le produit de la loi par la somme des forces physiques de l'agent, à l'exception de la force que la volonté du législateur, qui dans ce cas fait l'office de levier, doit joindre à un acte coactif pour vaincre l'inertie ou la répugnance de celui qu'on va contraindre. D'une toute autre nature est l'obéissance *réfléchie* qui, accompagnée de principes, joint à l'acte l'étendue des vues & l'énergie des sentimens. Saisissant l'esprit de la loi, c'est à dire, sa connexion avec l'ordre & le bonheur, on s'y porte avec toutes les facultés de son ame. Ainsi un acte d'obéissance réfléchie est le produit de la lettre de la loi multiplié par les forces morales & réfléchies de l'agent. Les loix exécutées de cette maniere ont une continuité *progressive* par l'augmentation de l'intensité de ces actes, qui produit toujours une plus grande somme de biens par l'augmentation du degré de satisfaction qu'on ressent dans leur observation. Les regnes des Tite, des Trajan & des Marc-Aurele ont été signalés par cet accroissement progressif du plaisir & de la félicité que donnoient les loix, & qui excitoient les sujets à joindre des sentimens toujours plus relevés à leur observation. L'intérêt public, mêlé & confondu avec l'intérêt particulier, tient souvent la place d'un Prince doux & bienfaisant. Les loix qui régloient le *Droit des Citoyens Romains*, le *Droit Italique* & le *Droit Municipal* étoient de cet ordre, puisque ces loix ouvrirent autant de nouvelles sources de ferveur & d'émulation. Par l'aggrandissement *simultané* de Rome & de tous les citoyens en même tems chaque citoyen fut porté efficacement à donner plus d'étendue, plus d'efficace & de force à ses offices. La prospérité de l'Italie & la sureté des villes municipales y produisirent les mêmes effets; & cette continuité *simultanée* des loix est encore aujourd'hui l'ouvrage de l'accord qu'une sage législation fait établir entre la somme des biens qu'elle veut repartir & la somme des moyens qu'elle prescrit pour s'en mettre en possession.

A regarder la ſociété comme un corps qui eſt mis en mouvement par la vigueur de la législation, les uſages & les notions participent aux lumieres répandues par le législateur qui, corrigeant dans les uſages ce qui ne convient plus à la combinaiſon des circonſtances, & joignant aux notions sociales de nouvelles vues, rectifie l'eſprit national, & le met mieux en état d'agir.

Notion des forces mortes de la ſociété.

Toutes les parties continues qui entrent dans la conſtiſtution du corps social, comme les loix, les notions & les uſages, ſont, ainſi que les parties ſolides du corps humain, deſtinées à prémunir la ſociété contre toute altération *interne* & *externe*. La continuité des notions réſiſte à l'introduction des nouvelles opinions avec toute la force des impreſſions nationales, ou la ſomme de tous les actes produits par ces notions. Le droit de preſcription, acquis par chaque idée publique, ne la fait pas moins reſpecter que l'on ne reſpecte l'âge & l'expérience. L'attachement de tous les âges ſe concentre en quelque maniere pour produire la plus grande aliénation contre une nouvelle doctrine qui exigeroit une nouvelle façon de penſer, à laquelle les nations ſe font auſſi peu que les vieillards. A raiſon des ſentimens qu'on joint à l'obſervation des préceptes ſocials, on y eſt plus conſtamment affectionné. Régulus mourut en Romain, Caton ne voulut pas ſurvivre la République, & le ſage Chancelier Morus s'immola pour le chef de l'égliſe. Les meilleures têtes de l'État ont la force d'un attachement vif & intelligent. Le peuple s'attache par inſtinct. Cet inſtinct renforcé par toutes les diſpoſitions aquiſes rend une nation ſupérieure à elle-même lorſqu'il s'agit de défendre ſes notions & ſes uſages. Le tragique ne produit jamais un effet ſemblable à celui qui eſt effectué par l'étalage du cérémonial de la Religion lorſqu'on la croit en danger. Pour comprendre la force de ces effets on n'a qu'à ſe ſouvenir de ceux qui ont été produits par les hoſties qu'on prétendoit avoir été percées par les Juifs. Les deſcriptions lamentables qu'on fit de l'état du Saint Sepulcre ébranlerent toute l'Europe; & les Proceſſions des Ligueurs à Paris firent ſonner le tocſin dans le Royaume. Quand une notion étrangere ébranle l'ame juſqu'au fond de ſes facultés & de ſes puiſſan-

ces, l'homme eſt d'abord étonné, interdit, anéanti, & dans le cas d'un Romain aux comices qui entendit tonner. Mais revenu à lui-même, il ſemble n'avoir tardé que pour ramaſſer de nouvelles forces & pour s'oppoſer avec plus de vigueur. Une nation n'obtient cette force que par le principe de continuité. Ne doutant d'aucun article de la foi elle va s'expoſer au plus grand danger pour ſa défenſe, & regardant ſes uſages comme les meilleurs de tous elle ne les quitte qu'avec la vie. Les fortes paſſions naiſſent des notions confuſes, & ce ſont les notions de cet ordre qui ont affermi & bouleverſé les Empires. L'eſprit d'examen ne donne qu'un courage réfléchi; le Sage a de la fermeté, mais il n'eſt jamais fougueux. Connoiſſant le fort & le foible des opinions & des uſages il cherche plutôt la voie de la conciliation que celle de la rupture, au lieu qu'un homme qui juge de la vérité de ſes idées par la force des impreſſions qu'elles font ſur lui donne tête baiſſée dans tout ce qu'elles ſemblent exiger de ſes forces. Ces ſortes de caracteres, qui ſont les vrais dépoſitaires des notions ſociales, ſervent le plus à conſerver la ſociété en entier. C'eſt auſſi leur unique deſtination; car une prévention qui va juſqu'à la roideur rend l'homme entierement incapable de goûter de nouvelles notions, & de s'en ſervir pour rectifier ſes ſentimens. N'ayant donc aucun principe actif qui les fit penſer & agir de leur chef dans tout ce qui regarde les conſtitutions ſociales, on peut les regarder comme les *forces mortes* de la ſociété. Car comme les corps ſelon la grandeur de leurs maſſes éteignent une portion déterminée des forces qui veulent les ébranler, les tendances à ne pas diſcontinuer le même fil d'idées & le même cours de ſentimens épuiſent ſouvent les reſſources de la raiſon; & on ne parvient à perſuader & à émouvoir ces hommes prévenus en faveur d'une opinion qu'après avoir ſû vaincre leur inſenſibilité & leur engourdiſſement, qui répondent exactement à ce que nous nommons *inertie* dans les corps. Cette inertie les fait graviter vers le centre pour y reſter en repos; & c'eſt de la même maniere que le préjugé, la prévention & la foi implicite tendent par un mouvement continu à faire reſter l'intelligence dans l'inaction. Si on avoit laiſſé faire le peuple, ſa maxime dominante auroit toujours été de ne rien changer dans la façon de penſer & d'agir. C'étoit toujours par de

violentes secousses qu'il falloit réveiller le vulgaire de sa léthargie, & s'il veilloit quelques instans, son esprit qui est si enclin à se reposer sur la foi d'autrui s'endormoit de nouveau. La masse des forces mortes qui ne produit aucun bien interne, fait un bien *externe* à l'État en ce qu'elle le garantit contre les attaques de ces hommes légers & superficiels qui voudroient faire changer l'État de sentimens & de maximes aussi vîte & autant de fois qu'ils en changent eux-mêmes. Si un Ministre hasardoit le sort d'un État sur des probabilités qui lui font hasarder ses biens & son honneur, l'État n'auroit point de consistance & la marche des affaires ressembleroit à l'allure de l'esprit d'un étourdi. Le principe de continuité, qui rappelle des maximes avérées par l'expérience, est d'un secours réel pour les États, en les empêchant de varier dans leurs directions, ou de suivre des mouvemens trop compliqués. Ainsi la loi de continuité qui agit sur un si grand nombre de membres de l'État, le retient dans son orbite; & il se forme insensiblement par l'action des forces vives ou la représentation du Beau & du Grand qui se trouve dans de nouvelles idées & dans de nouveaux sentimens, & par la réaction continuelle du principe de continuité qui s'attache obstinément aux anciennes notions & aux anciens sentimens; il se forme, dis-je, par la collision perpétuelle de ces deux principes un cours des affaires & des notions qui tient le milieu entre la trop grande vitesse & la trop grande lenteur.

Forces vives intellectuelles.

A l'opposite de ces forces mises en action par les autres & par lesquelles on agit uniformément, il y a des forces par lesquelles l'homme agit déterminément lui-même & met toute la diversité possible dans ses actes. Cette diversité résulte de la diverse mesure de ses facultés & des diverses manieres dont il regle leur emploi. L'ame étant un être actif, elle a une tendance perpétuelle à agir: ou l'esprit agit *sur lui-même*, ou sur les objets *du dehors*. L'une de ces deux especes d'activité ne peut jamais être bien conciliée avec l'autre. L'homme public, à force d'être répandu dans la société, sait moins ce qui se passe dans son ame; son activité étant partagée entre mille détails, la moindre portion est réservée pour des actes intuitifs & réfléchis. De là vient que son ame contracte une espece d'incapacité de

ſoutenir l'attention qu'exige l'eſprit d'examen. Pour être mieux ſoulagé, il croit à crédit, ou ſe jette dans le ſcepticiſme. Dans ces deux cas ſon activité eſt également perdue pour la ſociété, & ſes forces deviennent mortes. Car ce n'eſt qu'un homme dont l'eſprit a bien agi ſur lui-même qui peut bien agir ſur les autres. Les forces vives commencent par la connoiſſance réfléchie qu'on a de ſes facultés & de leur uſage. L'ame n'eſt jamais plus active qu'au ſortir d'un état où occupée à ſe contempler elle-même elle eſt comme imprégnée des rayons de la vérité intuitive. Si l'homme pouvoit faire le tour du monde viſible, ſans avoir la réflexion pour guide, ſes idées ne ſeroient que des phantômes & ne produiroient pas plus d'effet que les contes. L'activité de l'ame ſe décele d'abord par un déſir vague & inquiet de paſſer d'une idée à l'autre, & de parcourir avec la même rapidité le cercle des notions comme celui des plaiſirs. La ſimple curioſité, cet inſtinct de l'être penſant, eſt le beſoin d'une ame qui ſent confuſément ſes forces. La nature intelligente agit d'abord indéterminément, & la raiſon ne parle intelligiblement à l'homme qu'après qu'on s'eſt mis en état d'entendre ſon langage. C'eſt après bien des eſſais, que l'homme découvre le rapport de deux idées qui le frappent d'abord par leur convenance. De vague & flottante cette perception devient enfin fixe & déterminée. A la premiere rencontre de deux idées, dont l'une s'accorde parfaitement avec l'autre, l'homme s'apperçoit qu'il poſſede la faculté de voir la reſſemblance des choſes. Cette découverte eſt comme le premier rayon de lumiere qui diſſipa les ténebres du chaos. Sûr de pouvoir reproduire tous les objets viſibles, par la clarté & la force de la repréſentation, & de créer un monde dont ſa propre activité ſoit le foyer & le centre, ſon imagination s'enflamme, & embraſant l'ame l'affecte puiſſamment. Un eſprit qui commence à ſe déployer, ſi on lui laiſſoit le tems de ſe développer par le ſentiment ſucceſſif de ſes forces, ſeroit plus d'une fois dans des ſituations auſſi intéreſſantes que furent celles du premier homme, que chaque objet ravit juſqu'à l'extaſe. Un homme qui ne ſait pas encore queſtionner la nature, n'en reçoit point de réponſes exactes. Étant en pleine liberté d'agir, il donne carriere à ſon

imagination, & les conjectures volent autour de sa tête comme les songes de la nuit vont assaillir le cerveau d'un Poëte. Malgré toutes les sensations agréables que la beauté & la variété de ces images excitent dans son ame, l'homme qui est né pour l'ordre cherche à les ranger pour en tirer du profit. Un heureux hasard lui fait découvrir le rapport de deux notions dont l'une servant à éclairer l'autre, elles portent conjointement la lumiere dans l'ame qui commence alors à se reconnoître & à goûter le plaisir ineffable de l'intuition. A la faveur de quelques étincelles que la réaction de l'ame sur elle-même ou son activité intérieure a su produire, il voit une suite de ses nouvelles notions, dont l'aspect éblouissant s'efface d'abord. Ce trait fut un trait de génie qui passa comme un éclair. Mais se souvenant trop de ces instans lumineux pour ne pas chercher à les allonger & à les ramener plus souvent, il consulte l'observation & l'expérience, l'intelligence & la raison, qui le mettent sur la bonne route; son génie qui a aquis de la beauté, de l'élévation & de la vigueur, aggrandit la sphere de ses connoissances selon qu'il s'est plus aggrandi avec elle. Agissant alors avec toutes les facultés de son ame mises dans le plus heureux accord, ses productions sont les vrais résultats de l'intensité de ses forces intellectuelles. Tels devroient être les progrès de l'activité de l'esprit en général. La diversité indéfinie que l'on remarque dans les divers ordres des intelligences n'a d'autre raison que la précocité ou la lenteur des méthodes. Quoique l'homme ne possede pas les connoissances qui lui sont attribuées par sa présomtion, il en possede cependant beaucoup en comparaison du petit nombre de ses facultés & de leur usage très imparfait. Il semble que la souveraine intelligence, en donnant à l'homme peu de fonds & beaucoup de désirs, ait voulu l'exciter à augmenter son activité, en raison de sa curiosité intelligente & de l'application soutenue qu'il faut employer pour la satisfaire. Du moins une activité indéfinie paroît être le partage des esprits faits pour la théorie & pour les affaires. Si l'on compte toutes les forces vives consumées en recherches & plans inutiles, la somme de ces forçes est incontestablement plus grande qu'elle ne le seroit si nous vivions dans un monde plus intelligent & mieux constitué.

La nature a donné une ſi grande activité à nos facultés intellectuelles parce qu'elles doivent nous déterminer à agir. L'homme n'eſt un être doué de forces vives qu'autant qu'il a aſſés de reſſorts dans ſon eſprit pour ſe mettre en mouvement. La ſomme des forces vives eſt comme la ſomme des particules de feu qui ſont reparties dans tous les corps. Il n'y a jamais eu d'action qui n'ait été animée de l'ame de ſon agent, à la différence près que dans les actions ſages & réglées les forces de l'agent ſont à l'intenſité de l'action comme les vues de ſon auteur au produit qui a réſulté ou qui auroit dû réſulter de l'acte. Dans tous les actes plus ou moins inſenſés la même proportion ne peut point avoir lieu, & varie à l'infini, tant par le défaut des forces, proportionnément à l'action, que par la ſomme des forces employées pour des actes qui auroient dû être regardés comme des non-valeurs. La même incongruité a ſouvent lieu à l'égard des vues & de leurs produits. Quoiqu'il n'y ait rien de plus ſimple que la force déterminatrice de l'ame, qui conſiſte dans une repréſentation dont la clarté & la vivacité vont juſqu'à rendre la volonté efficace, rien n'égale cependant la variété que la nature a miſe dans les diverſes modifications de la volonté déterminatrice de nos actions. Car chacun regle la notion du bien ſur ſon état actuel, qui differe à chaque inſtant. L'ame paſſe par une infinité d'états, puiſque les ſenſations qu'elle reçoit des objets externes changent continuellement ſes diſpoſitions internes. La réflexion nous peut bien conduire à un état uniforme pour quelque tems, afin que l'ame ait le loiſir d'agir ſur elle-même. Comme cet état, s'il pouvoit être plus fréquent, ne ſeroit pas analogue à l'activité ſociale, la nature, pour augmenter la ſomme des forces vives, a donné aux ſenſations une force déterminatrice à l'action qui eſt ſupérieure en intenſité & en viteſſe à l'idéal & à l'abſtrait. Par nos organes qui ſont rélatifs aux principales eſpeces des corps toute la nature agit ſur nous; & afin qu'aucune impreſſion ne ſe perdît, nos organes agiſſent ſans ſe troubler dans leurs fonctions tous à la fois. Tous ces actes produits par l'organiſation ſont comme autant de cordes concentriques à la volonté ou aux facultés actives de l'ame, & chaque acte extérieur répond à une vibration qui produit immanquablement ſon effet. L'ame, qui ne pourroit pas ſuffire à tou-

Forces vives de l'ame.

tes ces impreſſions, à la faculté de choiſir, entre les idées qui lui repréſentent les effets des corps, celle qui lui convient le plus, & elle choiſit ordinairement un certain ordre d'objets qui lui a le plus ſouvent procuré un bien-être inſtantané, c'eſt à dire tel qu'il ne lui laiſſoit rien à déſirer. L'ame eſt comme abſorbée par une ſenſation lorſque ſon intenſité eſt très forte, accordante avec elle-même & propre à joindre à l'idée de notre exiſtence l'idée d'une maniere d'exiſter qui met toutes nos forces & toutes nos facultés à l'uniſſon. Delà naît la vivacité du déſir, qui étant le premier reſſort de l'ame, eſt variable & fougueux. Les déſirs devant fournir l'élaſticité, la force & la durée aux paſſions & aux affections de l'ame, ils ont à leur diſpoſition toutes les forces du corps & le doivent accoutumer à obéir promtement aux ordres de l'ame. Le déſir recherche un certain ordre d'objets machinalement & indéfiniment. S'il ſe met à ſe ſubdiviſer, à analyſer un objet, à trouver des différences dans la même claſſe des corps, il devient *penchant*, & c'eſt alors que l'homme paſſe de l'état des idées obſcures à celui des idées claires, & il ne juge plus d'après la ſenſation ſeule, mais d'après l'idée qu'il s'eſt formée de l'objet de ſes déſirs. Ces idées croiſſant toujours en nombre, il préfere celle qui a le plus d'analogie avec les autres, ou qui ſemble ſe rencontrer le plus ſouvent. Par la multitude & par l'accord de ſes idées il juge de leur excellence, & s'y porte avec la ſomme de tous ſes déſirs; ce qui eſt l'origine des *paſſions*, qui ne different des déſirs que par leur jonction, & ne ſont diſtingués des penchans que par leur intenſité. Le moral n'y entre donc pour rien, puiſque l'homme paſſionné peut devenir également le martyr de la vérité & de l'erreur, & enthouſiaſmé pour le vice tout comme pour la vertu. C'eſt une eſpece d'ivreſſe de l'ame, cauſée par une notion exaltée du bien & du mal. Les plaiſirs agiſſent alors ſur l'ame comme les philtres & les chagrins peuvent devenir des poiſons. L'ame, qui eſt paſſionnée pour un objet & qui porte ſon activité au plus haut degré, eſt comme placée ſur le ſommet de ſes affections: portée ſur les aîles du génie & ſoutenue par la vertu, elle atteint le ſublime; mais ſi la malice & la préſomtion l'étourdiſſent, elle riſque de tomber dans une eſpece d'anéantiſſement; ce qui n'arrive jamais à ceux qui

rectifient

rectifient la passion & la rendent durable par la considération intuitive du *Beau*, & par la considération réfléchie du *Bon*. Ainsi la passion devient la source de deux dispositions de l'ame qui dirigent d'une maniere réglée ses opérations & ses facultés, savoir le *goût* & le *sentiment*. Le goût est la passion rendue analogue à l'objet. Épuré par la réflexion le goût ne varie plus, & possédant l'art de jouir, il n'a pas l'inquiétude du désir. En nous faisant voir le Beau orné de tous les charmes que lui ont prêtés la nature & l'art il fixe nos idées & détermine nos penchans. Orné par les mains des Graces qui, tantôt simples & naïves, parlent le langage uni de la nature, & tantôt sublimes & pathétiques, expriment toute la dignité de la vertu, le goût devient l'organe d'une infinité de nouvelles sensations, & la source des plaisirs les plus purs de l'ame, qui consistent dans l'intuition du Beau contenu dans une notion pratique. Le sentiment est la production la plus noble du goût qui sert à le perfectionner & à le rendre utile & pratique. Le sentiment est le goût pratique & moral qui nous fait trouver des charmes aussi ravissans dans la contemplation de la vertu & dans celle de ses offices, que l'on peut avoir de plaisirs & d'agrémens dans la considération des chefs-d'œuvre de l'art. C'est le goût & le sentiment qui concourent à nous donner des *affections réglées*, que l'on transporte alors sur un objet qui est rendu le dépositaire de nos goûts & de nos sentimens.

Repartition des forces vives dans les corps socials.

Rien n'est plus inégal que la somme des forces vives de la société sujettes à mille variations par les diverses manieres de voir & de sentir les choses. Il y a un accroissement & un déchet continuel dans la masse des sentimens & des notions. Comme ces forces agissent les unes sur les autres, on voit disparoître celles-ci & prédominer celles-là. Leur élasticité est encore infiniment plus grande que celle des particules de l'air, dont la condensation & la raréfaction se fait alternativement & en mille manieres différentes. On observe que les hommes en faisant usage de leurs notions ont suivi à peu près les mêmes regles qui sont usitées pour évaluer les rapports numériques. Ils ne firent d'abord que joindre & additionner les idées que le hasard ou le besoin leur offroient. Le code des loix & le recueil des usages & des notions des peuples qui ne viennent que d'éclorre, se fait par la simple *juxta-*

position, & les monumens de leur esprit ressemblent aux monumens de leur reconnoissance & de leur vénération publique, qui ne consistoient que dans des monceaux de pierres posées les unes sur les autres. On se mit ensuite à soustraire de la somme de ces notions & de ces maximes celles qui convenoient à leur intérêt particulier. On peut regarder les premieres législations comme les extraits du code universel; & ces extraits étoient faits selon le tour de l'esprit du législateur & la somme des besoins publics. Le discernement ayant été formé par l'usage, & le goût étant intervenu, on se mit à multiplier les notions. De nouvelles vues, aussi étendues que solides, sont alors aux forces vives de la société qui doivent être multipliées par leur moyen, comme celles-ci sont au produit, c'est à dire à la somme des notions & des actes, ou aux diverses utilités que la société en retire. Quand le peuple s'enrichit de connoissances, il y en a toujours quelques-unes qui ont besoin de correction. L'esprit de la saine critique, tant littéraire que morale, s'occupe à diviser ces connoissances selon les degrés de leur utilité. Alors les connoissances sur l'échelle desquelles on apprécie toutes les notions publiques, sont à la somme de ces mêmes notions, comme celles-ci sont à un nouveau rapport intelligent de la société, ou à l'expression de ce qui après cette opération peut déterminer le vrai état des lettres & des connoissances tant théorétiques que pratiques. Si ces opérations pouvoient se faire sans opposition, on auroit le vrai état des forces vives de la société. Mais les forces mortes, ou l'adhérence aux anciennes opinions & aux anciennes coutumes, résiste le plus au succès de cette derniere opération. Pour multiplier les connoissances, il suffit de les répandre & d'intéresser la curiosité de l'homme; mais pour diviser les connoissances en vraies ou fausses, utiles ou inutiles, essentielles ou accessoires, il faut que l'homme s'occupe lui-même, qu'il soit porté à renoncer à ses anciennes opinions, & qu'il goûte de nouvelles méthodes & de nouveaux plans; occupation à laquelle on le porte très difficilement; c'est pourquoi tous les siecles où l'on a voulu faire valoir de nouvelles théories ont été fort agités de troubles. Quant aux forces morales, il dépend de chacun de leur donner plus d'intensité & de les élever, pour ainsi dire, à une *puissance supérieure*. Un bon pere de fa-

mille reproduit ſes ſentimens dans tous ſes enſans, & tâchant de les rendre ſemblables aux ſiens, une bonne éducation eſt le réſultat de ſes forces morales multipliées par celles de ſes enfans. L'amour de la patrie eſt l'amour paternel, ou celui qu'on porte à ſes proches, transféré à tous les chefs de famille qui compoſent l'Etat. Il réſulte donc de l'amour paternel multiplié par celui que chaque chef de famille porte à ceux qui lui ſont confiés. Chacun voit que ce degré eſt ſupérieur au premier en intenſité & en étendue. L'humanité veut procurer le bonheur du genre humain, & ce bonheur qu'on a dans l'intention ſeroit le multiple des félicités particulieres des ſociétés & des félicités individuelles des familles. La vraie religion eſt un ſentiment d'humanité puiſé dans la notion de la vraie félicité, qui doit régler, rectifier & ſubordonner les diverſes claſſes de bonheur par la notion la plus complette du bien. Ainſi l'homme vraiment religieux augmente l'intenſité de chaque acte d'humanité, & l'ennoblit en le faiſant aboutir à la perfection. La magnanimité leve les conflits ou les colliſions des devoirs & des intérêts qui peuvent ſe trouver entre ces diverſes claſſes dans des cas particuliers, & agit par un ſentiment non ſeulement équivalent aux ſentimens rélatifs à toutes ces claſſes, mais qui les ſurpaſſe encore en ce qu'il corrige les inconvéniens de l'exécution & du choix par un ſentiment qui ſaiſit tous ces rapports à la fois. Si l'homme pouvoit être affermi dans ces diſpoſitions, ſon ame monteroit encore un degré plus haut ſur l'échelle qui aboutit à la perfection morale. Cette foible eſquiſſe peut ſervir à faire voir que dans la repartition des forces vives, l'homme peut beaucoup contribuer à augmenter ces forces par une plus grande intenſité qu'il donne à ſes actes moraux.

Diverſes combinaiſons des forces vives & des forces mortes dans les ſociétés.

Tous les corps de ſociété ſont des compoſés de deux forces, qui agiſſent avec une efficacité réciproque, l'une pour éteindre, amortir & anéantir une portion des forces vives, l'autre pour émouvoir, mettre en action & exercer une partie des forces mortes. Pour vaincre dans chaque cas particulier les forces mortes rélativement à l'eſprit, il faut ébranler l'ame ou la tirer de ſon indifférence en lui préſentant une notion qui lui eſt étrangere ſous une face qui ſoit intéreſſante pour elle; il faut de plus ſavoir ſoutenir ſon attention juſqu'à la rendre analogue au ſujet qu'on veut lui rendre re-

commandable, & mettre à la place de l'assemblage des motifs qui la déterminent à adhérer à l'ancienne opinion, une combinaison de motifs qui puissent gagner un assés grand ascendant sur l'esprit. D'où l'on peut reconnoître que les forces mortes de l'esprit résistent aux forces vives en raison composée de l'indolence, de l'inattention & de l'état extérieur. Quand ces obstacles sont infinis, c'est à dire, quand l'indolence & l'inattention vont jusqu'à l'ineptie, la résistance est infiniment forte. Ce n'est donc qu'aux degrés de l'activité humaine qu'il faut s'attacher, & voir l'état des sociétés, qui ont communément des dispositions égales à celles des esprits. Comme il y en a qui sont vifs & entreprenans, il y a *des sociétés où prédominent les forces vives.* A l'exemple des hommes lourds & pesans, il y a des *sociétés où prévalent les forces mortes.* Comme il y a enfin des hommes qui passent leur vie dans une alternative perpétuelle d'activité & de paresse, il y a des *sociétés* où ces deux forces sont à peu près *dans la même proportion*, c'est à dire, où l'intensité des forces vives est à l'intensité des forces mortes comme le produit des forces vives est au produit des forces mortes.

État des sociétés où prédominent les forces vives.

Les forces vives ont le dessus toutes les fois que le lien social qui consiste dans la forme & dans les usages de la société n'est pas assés fort pour mettre de l'uniformité dans la façon de penser & dans la façon d'agir du peuple, ce qui arrive d'abord *après une nouvelle forme de l'association publique, soit monarchique, soit républicaine.* Chaque changement excite une espece de révolution dans l'ame. Devant passer d'un état à un autre, les traces qu'elle conserve du premier état viennent à choquer les impressions qui résultent du second, & de ce conflit l'on voit naître une effervescence de désirs & de tendances qui font croître l'activité de l'ame. A leur esprit originaire les Francs & les Goths joignirent, après les conquêtes des Gaules, de l'Italie & de l'Espagne, une fierté nationale qui étendit d'un côté la sphere de leur activité & qui leur fit sentir la nécessité de figurer aux yeux de leurs nouveaux sujets par une valeur des plus brillantes & par des actes qui pussent leur en imposer. Que l'on suppose un homme intriguant & audacieux emporter une haute dignité; cette place lui fera enfanter mille desseins, & de tant de nouveaux objets qui feront des impres-

ſions différentes ſur lui il fera autant de nouvelles combinaiſons. C'étoit le cas de ces peuples; & c'eſt auſſi le cas de toutes les Républiques, ſoit naiſſantes, ſoit *peu ſûres quant à leur conſtitution.* Les premiers tems de l'Ariſtocratie Romaine & Vénitienne furent très orageux. L'on ne voit jamais les hommes plus agités que lorſque pluſieurs concertent des meſures que la crainte leur dicte & que l'inexpérience rend peu juſtes. Alors chacun emporté par ſon zele veut donner des conſeils & des avis qu'il ſoutient avec opiniâtreté & chaleur. Mille idées, les unes plus incomplettes que les autres, vont éclorre à la fois, & chacun meſure ſa ſageſſe ſur l'échelle de ſes variations. C'eſt comme la conſtruction de la tour de Babel, où l'on finiroit par ne plus s'entendre du tout; & c'eſt ce qui arriveroit toujours ſi l'intérêt commun ne prévaloit ſur la diverſité des intérêts & des plans particuliers.

En général les conflits ou les colliſions entre deux ſortes de ſéries ſervent à multiplier les idées, parce que l'eſprit eſt alors obligé d'augmenter ſon attention, pour voir ce que ces deux ſuites d'idées contiennent de différentiel. Dans les États il y a quatre ſortes de *colliſions*, qui viennent des parties du gouvernement qui ne ſont *nullement analogues*, des contradictions perpétuelles qui ſe trouvent entre les *notions généralement reçues de deux peuples voiſins.* Il y a un autre ordre de conflits qui réſultent *d'une ſuite de colliſions entre les intérêts politiques de deux peuples qui occupent le même pays:* enfin les *conflits entre l'ordre du gouvernement & celui qu'une partie de la nation veut établir* ſont le quatrieme ordre. Chacun de ces conflits augmente l'intenſité des forces vives de la nation & les fait prévaloir; & il arrive alors à l'activité nationale ce que l'on voit arriver à une armée dont l'ardeur militaire eſt augmentée dans la chaleur du combat. Une nation qui n'a pas un gouvernement fixe eſt dans le cas d'un homme qui n'eſt pas content de ſon ſort. A chaque lueur d'eſpérance il cherche à ſe dépouiller de ce qui l'attache à ſon ancien état & tend de toutes ſes forces vers le nouveau poſte qu'il a en vue. Son impatience ne lui ayant pas laiſſé le tems de réfléchir ſur ſon objet, il ſe trouve encore dans le cas de changer ce qui l'aigrit contre tous les autres, & augmente le fond de ſon activité ou

la tendance à corriger tous ces inconvéniens. C'eſt dans cette ſituation critique que ſe trouvoient les Génois avec quelques autres États d'Italie dans le tems du moyen âge, où leur gouvernement ſubit des changemens rapides & violens. C'eſt probablement une des principales cauſes du caractere vif, adroit & diſſimulé de ce peuple. Car une longue ſuite d'événemens publics laiſſe de longues traces dans l'eſprit & dans le caractere national. Les guerres continuelles des Arabes avec les Chrétiens tant Grecs qu'Occidentaux, occaſionnées & fomentées d'abord par le zele religieux, fourniſſent des exemples frappans du conflit des *notions*. Le Muſulman, qui avoit peu de notions, frappé & pénétré jusqu'au fond de l'ame de l'unité de Dieu par les deſcriptions pathétiques de ſon Prophete, crut être le champion des droits de la divinité ſur la Terre; & le culte des images lui paroiſſant être un crime de Leze-Majeſté divine, ſa notion lui inſpira d'abord de la haine, & de la haine il paſſa à la vengeance. Sans vouloir légitimer les deſſeins de ces conducteurs de fanatiques, qui ne ſe ſervoient du zele des Croyans que pour s'aggrandir, l'on peut dire du peuple que le ſeul conflit entre une notion extrémement exaltée, & une notion qui lui étoit diamétralement oppoſée, pouvoit opérer ce violent déſir de ramener tous les autres peuples aux mêmes ſentimens religieux. Si avec un goût vif & décidé pour un objet on voit naître un vif dégoût pour tout ce qui lui eſt oppoſé, il eſt clair qu'en donnant plus d'intenſité au goût, il faut auſſi donner plus d'intenſité à ſon effet. La même chaleur des eſprits réſulte de la contrariété ſucceſſive & perpétuelle des intérêts politiques de deux peuples qui habitent le même pays. Les Eſpagnols & les Maures avoient cette haine invétérée qui, dans les cas particuliers, a lieu entre deux hommes qui ſe diſputent la même terre ou le même office. L'eſprit exercé par une grande paſſion épuiſe toutes les reſſources. L'intenſité des ſentimens devant ſuppléer aux forces, on emploie tous les moyens imaginables pour faire croître la notion intuitive du Beau & du Grand qui ſe trouve dans la jouiſſance de l'empire & de la puiſſance. Quand on eſt engagé dans une diſpute longue & épineuſe, on s'anime toujours plus; & la vue de la partie adverſe ſuffit pour nous faire reſſouvenir de tous les traits qui nous avoient été lancés. La ſomme des forces vi-

ves va donc toujours en augmentant. Pour ce qui regarde les révolutions internes des États, on n'a qu'à considérer les factieux de tous les tems pour être convaincu du grand effet produit par les forces vives d'un esprit qui va opposer ses idées à celles qui constituent le gouvernement originaire de l'État. A proportion qu'il y a moins de justice dans son fait, il y supplée par plus d'ardeur. Les partisans de Henri IV. & de Charles I. étoient beaucoup plus modérés que les Liguéurs & les Puritains; & cette ardeur croît selon la férocité du siecle, la disette des notions, & le peu d'accord qui se trouve dans la constitution, de sorte que les Armagnacs & les Bourguignons étoient encore plus furieux que les partisans de la Ligue & les Frondeurs. Tous ces conflits venant de la diversité indéfinie établie dans les pensées & dans les sentimens, elle fait agir chacun avec toute la somme de ses forces naturelles & aquises.

État des sociétés où prévalent les forces morales.

A ce sentiment de diversité est opposée *l'uniformité de la constitution, des notions, des sentimens, & des usages*, d'où vient la prépondérance des forces mortes. Auguste sut ôter tous les conflits du gouvernement, & anéantit en même tems tous les ressorts de l'activité romaine. On alloit dans le Forum pour se desennuyer, & on portoit l'ennui dans le Sénat. Cette assemblée, autrefois si auguste, n'étant plus gouvernée par l'esprit aristocratique, ressembloit au second temple où l'on n'avoit plus l'esprit prophétique. De désespoir les Romains, qui n'osoient plus parler de politique, se jetterent dans la Littérature & dans la Philosophie. Comme le bel-esprit n'étoit pas leur propre caractere, ils ne purent pas soutenir bien longtems un personnage qui leur étoit étranger. Le goût tomba bientôt, & il ne fut que le partage d'un petit nombre d'esprits supérieurs. De la dépravation du goût naît la sécheresse de l'esprit & la monotonie des notions. Dans le douzieme & le treizieme siecle on n'eut qu'une seule notion & un seul systeme par lequel on jugeoit de tous les cas. On étoit hérétique d'abord qu'on ne savoit pas prononcer les *Schibbolet* de la foi, & on poursuivoit comme Magicien celui qui avoit plus d'esprit que les autres. Les notions universelles & exactes qui répandent une lumiere fort étendue sur une infinité d'objets, les laissent subsister tels qu'ils sont, & servent à exercer l'esprit par les applications très différentes qu'on doit faire de la même

notion. Mais une notion incomplette ou confuſe ayant été trop généraliſée produit une infinité de fauſſes applications, dont il faut ſauver le ridicule, ou par des diviſions ſophiſtiques, ou par des voies de force & de violence. L'eſprit borné qui a dicté ces ſortes de formulaires produit le même effet ſur l'eſprit du ſiecle; & il ne ſe communique pas moins aux mœurs & aux ſentimens. Car dans le même ſiecle tous les ſentimens ſe réduiſoient à reſpecter la force. Si elle comprend le nerf & la vigueur de l'État, l'objet eſt grand & élevé: il peut élever l'ame & la porter à de belles actions. Mais repartiſſez cette force entre mille Seigneurs dont chacun prend le ton d'un Monarque, & vous verrez décroître les ſentimens en raiſon de la multiplicité de ces rapports rétrécis. Au lieu d'avoir l'attachement d'un héros, l'on n'aura que la timidité d'un eſclave. C'étoit là l'eſprit des tems féodaux, où par une ſubordination qui alloit à l'infini les ſentimens repartis entre tant de Seigneurs devenoient nuls. L'uniformité enfin du genre de vie qui ne préſente qu'un petit nombre d'objets à l'homme & les lui préſente preſque toujours ſous la même face, engourdit ſon ame, & rétrécit beaucoup ſes facultés. Le Lappon, qui ne connoit qu'une ſeule maniere de pourvoir à ſa ſubſiſtance, n'exerce ſon eſprit qu'en conformité du petit cercle de ſes beſoins. D'où l'on peut inférer que les arts, les manufactures & le commerce ſervent beaucoup à favoriſer les forces vives de la ſociété, puisque ces divers moyens de pourvoir à la ſubſiſtance mettent l'homme dans la néceſſité de devenir inventif, tant par l'incertitude du ſuccès que par le grand nombre de ceux qui courent dans la même lice.

Rapport des forces vives & des forces mortes dans les ſociétés bien réglées.

Il y a un juſte rapport entre les forces vives & les forces mortes d'une ſociété, lorſque l'emploi des forces vives de la part du gouvernement eſt tel qu'il préſerve l'État de l'abus dangereux des forces mortes. Ce ſoin ſe rapporte ou à la *nature du gouvernement*, ou *aux ſecours qu'il tire des Arts & des Lettres*, ou enfin *à la Police*. Un gouvernement qui a beſoin de ſuivre des meſures tendantes à tranquilliſer les eſprits & à ne leur donner aucun ſujet de plainte, comme celui de Veniſe, laiſſe aux Citadins tout ce qui concerne le perſonnel & le local, ou la liberté de ſe déterminer pour leurs intérêts particuliers. Quand il y a un grand nombre de forces vives dans

la

la société, comme en Angleterre où ce rapport est très variable par les attentats continuels que l'on forme contre le ministere & contre les mesures que prend le gouvernement, il est de son intérêt de tenir la main à la conservation des forces mortes, & de ne pas permettre que l'on s'écarte de l'observation striĉte des usages & des loix, qui étant aussi favorables à la puissance exécutrice qu'aux libertés personnelles, maintiennent l'équilibre entre l'humeur inquiete du peuple & la consistance que doit avoir la forme de la constitution. Dans les États où le peuple n'a ni le pouvoir ni le droit de censurer les maximes du gouvernement, on doit venir au secours de l'inertie des sentimens, de l'industrie & de l'activité de la nation par tous les moyens qui sont propres à devenir de nouvelles sources de forces actives. Les Arts & les Lettres, présentés sous l'aspect attrayant de l'honneur & de l'intérêt, vivifient en quelque maniere le corps national, en l'animant & en lui donnant de nouveaux motifs d'agir. Du tems de Louis XIV. la somme des forces mortes s'accrut beaucoup par l'accroissement de la puissance exécutrice; mais dans ce beau siecle on sut tant renforcer les forces vives par mille plans utiles & agréables, que le juste rapport entre les forces vives & les forces mortes se maintint. Ce que les particuliers ne peuvent pas faire, l'État le doit faire en leur nom, en réglant par de bonnes institutions tout ce qui regarde la façon de vivre sociale. Dans les Républiques il faut porter ces réglemens jusqu'à régler la dépense & les habillemens de chacun, afin de contrebalancer la trop grande activité des forces vives, ou l'usage indéterminé des libertés, par l'uniformité de la conduite. Dans les États monarchiques au contraire une bonne police est comme la moyenne proportionnelle entre le principe monarchique & les intérêts individuels de chacun; de sorte que la somme des forces subordonnées au lien social est à la somme des forces qui le resserrent, comme la somme des préceptes est à la somme des actes policés; ce qui sert à combiner & à régler toutes les parties de l'État, sans que le principe de l'activité nationale en souffre trop, puisqu'une bonne police doit compenser les restrictions par des avantages équivalens & capables d'exciter & de généraliser l'industrie nationale. Comme une sage po-

lice manquoit aux Romains, ſous le gouvernement des Céſars, toute l'induſtrie languit, & la ſomme des forces mortes s'accrut prodigieuſement.

La curioſité & l'invention ſont les moyens par lesquels ſont entretenues les forces vives des ſociétés.

Le gouvernement ne fait que mettre en action les forces vives qui ſont dans le corps ſocial. Comme il en eſt l'ame & le moteur il préſuppoſe des forces propres à être dirigées. Dans un corps foible, languiſſant, exténué, une ame forte & vigoureuſe ne fait que le fatiguer & l'épuiſer par les mouvemens trop violens qu'elle lui fait faire. L'eſſentiel eſt d'entretenir & d'augmenter le nombre & l'intenſité des eſprits vitaux qui dans les corps ſocials ſont les forces actives de chacun. Les reſſorts de ces forces vives ſont *l'eſprit de curioſité*, & *celui d'invention*. Une nation qui n'a pas ce déſir inquiet & inſatiable de voir, de connoître, d'examiner & d'approfondir les choſes, eſt comme iſolée & retranchée de la maſſe des nations actives & ambitieuſes. Étant toujours devancée par des nations beaucoup plus actives, & ne pouvant pas les atteindre, elle déſeſpere à la fin de tout ſuccès. L'ignorance & l'abrutiſſement ſont des eſpeces de flétriſſures qui condamnent ces nations au mépris, & tiennent lieu de lettres de cachet qui les exilent. Quand on ne ſait pas agir, on n'eſt pas admis dans la communion de ceux qui agiſſent. L'activité ſe prévaut toujours de l'inaction, & on ſouffre une double perte, de n'avoir pas agi, & d'avoir laiſſé agir les autres. Un peuple qui n'eſt pas au courant des lettres, de l'induſtrie & des arts, eſt obligé d'uſer de circonſpection, & ſa circonſpection étant priſe pour timidité l'exclut du concours. Ces peuples qui par le défaut de la curioſité n'ont jamais été de niveau avec les autres, ſe virent obligés d'accepter les ſecours précaires que l'eſprit d'intérêt particulier & d'intérêt public donne toujours avec parcimonie & aſtuce. Les Grecs & les Italiens ont bien ſu ſe faire valoir par les progrès que l'eſprit de curioſité nationale leur a fait faire; & s'ils ſont allés chez les autres nations, pour les endoctriner ſur les préceptes de l'art de gouverner, de financer & de policer, ils ſe ſont toujours ſtipulés de grands avantages. Lorſque l'eſprit de curioſité eſt bien réglé & dirigé vers un ſeul ordre d'objets, il devient inventif. C'eſt la partie brillante d'une nation, & par laquelle cette nation ſe diſtingue le plus avantageuſement. Car l'eſprit d'invention ne nous unit pas ſeulement au ſiecle qui

nous a précédés, mais aux fiecles qui ont été les plus célebres & les plus fertiles en belles actions. Il y a une chaîne d'inventeurs & d'inventions qui eſt comme le cercle d'or où étoit tracé le cours du Soleil, & qui entouroit le plus fameux temple de l'Égypte. Chaque invention, en faiſant une époque remarquable dans l'hiſtoire du genre humain, devient le principe fécond d'une infinité de belles idées & illuſtre le nom d'une nation. C'eſt une mine qui, à force d'être exploitée, donne de nouvelles richeſſes.

La curioſité *populaire* eſt produite par la ſenſibilité & la délicateſſe des organes qui ſervent à varier & à multiplier les ſenſations. L'ame étant donc accoutumée à être ébranlée par des impreſſions nombreuſes, ſubites & variables, cherche à remplir les vuides que les intervalles du tems laiſſent dans l'accompliſſement de ſes déſirs, par des arrangemens tendans à combiner les objets de la curioſité & à établir une ſucceſſion réglée entr'eux. Le *goût* commence à l'inſtant où l'on s'attache à des ſenſations d'une certaine eſpece, que l'on ſubordonne aux notions du beau. Rien n'exalte tant l'imagination que la recherche de l'analogie qui ſe trouve entre ſes nuances. C'eſt avec des caracteres de feu que chaque nouvelle obſervation du beau s'imprime dans l'ame d'un homme de goût. Tout ce qui lui paroit exquis eſt placé dans le tableau de la ſymmétrie & de la perfection idéale. En rapportant les traits de la beauté qui ſont répandus dans tous les corps, à l'idée qu'on s'en eſt formée, l'idéal de la perfection devient toujours plus vif & plus agiſſant. Tour à tour auteur ou interprête, modele ou copie, il ſe met tantôt au centre de la nature pour la ſaiſir en grand, & fait tantôt le tour de ſes beautés particulieres pour les connoître en détail. Qu'il s'occupe à épurer le plaiſir par le goût, ou à égayer le goût par le plaiſir, la ſomme de ſes ſenſations répond toujours à la vivacité des actes qu'il produit. Semblable à ces artiſtes qui d'un coup de pinceau font rire ou pleurer leurs images & qui ſavent animer l'archet & le marbre, il met tout en action. Sa marche eſt légere comme celle de la jeuneſſe, & ſemant les plaiſirs ſur ſes pas, il maitriſe l'ame & ſes affections. Rien n'égale l'efficacité des ſentimens agréables. Ces Romains qui auroient bravé Jupiter s'il eût voulu leur diſputer l'empire & la domination, ſubjugués par le plaiſir, & apprivoiſés

Différence entre la curioſité populaire, celle du goût & de l'intelligence.

par de nouveaux Œdipes, deviennent les hommes les plus dociles. C'est cette supériorité de force & d'efficace du goût qui doit nous rendre attentifs à aimer le beau en lui-même & de maniere qu'on y comprenne l'amour de l'ordre moral.

De la perfection du goût dépend la curiosité philosophique, qui consiste dans l'aptitude de choisir entre les notions communes celles qui sont les plus conformes à l'ordre & à la félicité. Selon que ces notions contiennent plus de vérité & qu'on s'y attache avec plus de goût & de discernement, elles deviennent plus pratiques. Le recueil de ces notions est comme l'almanac de la nation. Si la dimension du tems a été faite avec soin, on sait ce qui convient à chaque saison; & si une nation suit des maximes fondées dans la sagesse & dans la vérité, ces préceptes à raison de leur universalité produisent un plus grand nombre d'actes, & l'on tombe en moins de conflits.

L'esprit de curiosité conduit à l'esprit d'invention; autre principe des forces vives.

L'esprit de curiosité cherche le neuf indéterminément, l'esprit d'invention le cherche déterminément. D'abord que l'attention devient plus soutenue & qu'on sait se fixer plus longtems sur un objet, l'intensité de l'attention est au prix de la découverte, comme le nombre des considérations est au nombre des vues. Chaque invention ressemble à la conclusion que l'on tire d'un raisonnement, qui est toujours formé de la jonction d'une proposition universelle avec un cas particulier compris dans l'universalité de cette notion. D'où l'on peut inférer que l'esprit d'invention comprend l'esprit *philosophique*, *observateur* & *méthodique*. Au moyen de ce perfectionnement des facultés de l'ame, on lit à livre ouvert dans les vastes recueils des phénomenes physiques & moraux. Avec des notions plus exactes chaque atome de lumiere conduit l'observateur jusqu'à la source de l'évidence. Ces idées n'étant pas, comme les atomes d'Épicure ou les vapeurs de l'atmosphere, dans un conflit perpétuel, on sait au juste quel est l'ordre de leur dévoloppement. Rien n'est plus avantageux à la société qu'un esprit dont l'intelligence, semblable à un thermometre, désigne les divers degrés de chaleur & d'extension qu'on a donnés aux notions publiques. Il y a mille choses qui nous échappent à cause de la rapidité avec laquelle nous

conſidérons les nbjets. Un degré d'attentinn de plus fait décnuvrir à une nation des faits qui ne lni ſeroient pas cnnnus. Le dnn d'nbſerver eſt cnmme la découverte de la lentille, qui a fait naître un nouveau monde. On rend une découverte pratique & uſuelle, par la ſimplicité du principe, par l'analogie des vnies auxiliaires & par le vrai eſprit d'nrdre & de ſubordination. Tnut ce qu'on a inventé pnur le ſnulagement de l'homme & pnur le bien de la ſociété dnit être rangé dans la claſſe des méthodes, dont le prix conſiſte dans la généralité de l'applicatinn & dans la facilité de l'exécutinn. Une nation qui favnriſe & cultive cet eſprit eſt dans le cas d'un hnmme qui par la conſtructinn de machines ſimples & efficaces fait prnduire un plus grand nnmbre d'effets. Ce qui augmente beaucoup la ſnmme de l'activité natinnale eſt encnre l'énergie des actes mnraux, c'eſt à dire, leur élévation à un degré ſupérieur d'extenſinn & de puiſſance. Un grand homme réunit dans ſes actes l'art d'obſerver & de raiſnnner méthodiquement, nu avec juſteſſe. Comme il y a beaucoup plus d'actes qui partent des forces mortes qu'il n'y a d'actes qui nnt pour principe les forces vives, il convient extrémement à l'intérêt de la ſociété d'augmenter l'intenſité des actes mnraux, afin que par un ſeul acte de cette eſpece on pût ſuppléer à un grand nnmbre d'actes fnibles ou fautifs.

L'habitude eſt le contrepoids des forces vives de la ſociété.

C'eſt par l'*habitude* ou la tendance à réitérer & à répéter les nntinns & les actes que la diverſité indéfinie des forces vives eſt rendue ſtable & unifnrme. La lni de l'habitude eſt dnnc prnprement la lni de l'uniformité, tnut comme le principe de l'activité eſt la diverſité indéfinie. Pnur empêcher les effets de la cnntrariété que la diverſité indéfinie des nntinns & des actes introduiroit dans le cnrps ſocial, l'habitude interpoſe ſes nffices, en rendant réglé & méthodique ce qui de ſa nature n'obſervernit d'autre regle que le libre arbitre. L'habitude parvient à produire cet effet en faiſant durer plus longtems le même acte & en mettant, comme la meſure dans la muſique nu le mouvement nſcillatoire de la pendule, des intervalles égaux entre les actes de la même eſpece. Les fnrces vives étant le réſultat de la nature libre & indépendante de l'homme qui agit irréſiſtiblement, l'habitude qui eſt deſtinée à rallentir, à rétrécir & à mndifier la viteſſe & la variété de ſes actes, ne

pourroit jamais atteindre ſon but ſi la nature n'avoit preſcrit à l'homme des loix propres à rendre ſes actes habituels. Ces loix ſe réduiſent à l'*aſſociation d'une idée à pluſieurs autres*, à ſon *applicabilité à pluſieurs cas différens*, & à la *néceſſité dans laquelle l'on doit mettre les hommes pour les porter à réfléchir*. La premiere de ces loix ſe rapporte à ce qui *plait*, la ſeconde à l'*utile* & la troiſieme au *néceſſaire*. C'eſt par tant de liens, tirés du fond de la nature, qu'elle nous attache à l'habitude. Une notion nous plait ſelon le nombre de repréſentations agréables qu'on y a joint de propos délibéré ou fortuitement. L'homme qui aime ce qui lui plait, ſe décide toujours en faveur d'une idée à laquelle on a joint le plus grand nombre de ſenſations agréables. Les premiers Légiſlateurs & Philoſophes connoiſſoient ſi bien le reſſort de la nature qu'ils appellerent à leur ſecours tous les charmes de la Poéſie. Nous apprenons par cœur les plus beaux traits des Poëtes parce qu'ils ſont analogues au plus grand nombre de ſituations capables de s'aſſocier les idées les plus agréables. Ces ſortes de notions ſont comme les traits d'un homme en faveur duquel nous ſommes d'abord prévenus à cauſe de ſa reſſemblance avec quelqu'autre que nous aimons beaucoup. C'eſt par cette aſſociation d'idées avec un objet que toutes les habitudes tant théorétiques que pratiques ſont formées; & on ne parvient à nous dégoûter d'une choſe qu'en ôtant à ces idées acceſſoires & analogues à notre maniere d'être le neuf & le piquant. Encore faut-il pour deshabituer un homme gagner un très grand aſcendant ſur l'eſprit & ſur le cœur de celui dont l'imagination eſt vivement frappée d'une notion. Car ſon ame s'étant miſe à l'uniſſon avec l'objet, elle eſt, pour ainſi dire, montée ſur le ton d'une idée, de ſorte que ſes notions, ſemblables aux vibrations d'une corde, la font encore trémouſſer après l'acte. L'habitude contractée par l'aſſociation de ce qui plait, ne finit donc qu'avec une aſſociation d'idées qui paroit plus intéreſſante à l'eſprit. L'homme aime à reproduire ce qui plait, parce que le plaiſir donne à l'ame tel ſentiment de bien-être. Comme ce bien-être eſt variable & local, il eſt ſujet au changement. Il n'en eſt pas ainſi de ce qui nous a paru *utile*. L'applicabilité d'une idée à une infinité de cas différens s'unit en quelque maniere à notre être ou à nos diverſes manieres d'exiſter,

L'homme accoutumé à regarder une notion comme une espece de spécifique, la met au rang des regles universelles & y recourt sans cesse; c'est ainsi que les maximes de prudence, de malice & d'astuce nous peuvent devenir si familieres, que nous ne pouvons plus nous en passer, & l'on y revient sans cesse. L'homme, qui est pressé d'agir, s'attache plus aux notions qui lui sont connues & dont il a déjà fait usage, qu'à celles qu'il lui faudroit apprendre. Si une notion paroît applicable à une infinité de cas différens, l'homme d'esprit tout comme le sot ne s'en départent gueres: le premier, parce qu'il en peut tirer un très grand parti; le second, parce qu'il ne sauroit tirer parti d'aucune autre. Ces sortes de notions sont comme les livres *classiques*, dont on préfere les notions & les préceptes à mille autres. La réflexion qui tend à épurer les notions & à perfectionner notre façon de penser, pourroit donner atteinte à la force de l'habitude, si l'homme étoit autant porté à réfléchir, à comparer & à examiner, qu'il panche à sentir, à se représenter & à s'occuper. C'est la *nécessité* ou le concours des circonstances qui le fait incliner à la réflexion. Nous recevons mille idées à crédit & nous les admettons sur la foi d'autrui, parce que l'obligation d'examiner scrupuleusement les moindres objets retarderoit infiniment le cours des affaires & des actions. Ainsi l'homme pour réfléchir ne choisit que les notions qui l'intéressent le plus. Cette espece de répugnance que l'homme sent à considérer attentivement les choses, vient de la grande activité de son esprit, qui ne lui permet pas de s'arrêter longtems à la considération du même objet. C'est pourquoi dans la jeunesse, où les forces de l'homme sont les plus actives, l'homme est le moins propre à réfléchir. C'est cependant dans cet âge, qui consiste dans la variation & qui ne fait qu'une sphere mouvante, où l'habitude commence à jetter les fondemens de son empire à la faveur d'une sorte d'impressions qui a plus de force & d'énergie que les autres. Semblable à ces liaisons durables que l'on forme quelquefois au milieu du fracas & de la pompe des spectacles & des sociétés les plus brillantes, l'habitude qui trouve l'ame d'une jeunesse vive & folâtre ouverte & disposée à recevoir les impressions de toute espece, s'y glisse & commence à former ces nœuds indissolubles que l'on nomme les grandes passions.

A confidérer le défaut de réflexion comme une des fources de l'habitude, il ne faut pas s'étonner de leur variété & de leur nombre; puifqu'il feroit bien plus furprenant qu'il n'y en eût pas tant, vû l'infinité de cas où l'homme ne peut ou ne veut pas réfléchir, & qui occafionnent autant d'actes habituels. Tant d'habitudes différentes fe maintiennent à la faveur de la fubordination dans laquelle l'homme les met à l'égard de celle qui le tyrannife le plus, c. à d. qui lui fait les plus fortes illufions quant aux plaifirs qu'elle lui promet, & quant à l'univerfalité de fon ufage, qui le difpenfe fi fouvent de la néceffité de réfléchir. Il en eft à cet égard du corps de chaque fociété comme de tous les individus qui la compofent. Autant de fois que l'individu agit moins par réflexion que par habitude, autant de fois la fociété fe détermine plus pat l'ufage que par la raifon, qui n'eft regardée que comme le recueil des notions ufuelles; & l'habitude fociale eft à la raifon fociale comme la fomme des actes habituels eft à la fomme des actes réfléchis. Dans l'état de natute l'habitude eft purement perfonnelle, & le principe de continuité ne pouvant pas agir uniformément fur tous, l'habitude fociale eft comme zéro. L'habitude publique a été le réfultat du premier état focial, où elle fut d'abord en raifon de tous les privileges de la nature qui furent rendus focials. Ces fortes d'habitudes peuvent être confidérées comme celles du premier degré. Dans les États républicains l'habitude qui en doit naître eft en raifon des privileges dont on jouit encore réglés par la loi & appréciés par l'ufage, & on la peut envifager comme étant d'un degré plus forte & plus permanente. Comme dans les États monarchiques le principe du gouvernement varie moins, les habitudes croiffent felon la force, l'invariabilité & l'uniformité de ce principe, qui étant univerfel s'étend fur la façon de penfer & d'agir de tous les membres de la fociété; & l'habitude eft du troifieme degré, puifqu'il faut multiplier fon intenfité par le principe du gouvernement, les loix & les ufages, ou plutôt les loix par les ufages, & ceux-ci par le lien focial. Dans les États defpotiques l'habitude eft formée par l'uniformité du gouvernement, par celle des loix, des ufages, des mœurs & des fentimens; où la force des habitudes nationales eft comme le produit de la force du gouvernement multipliée pat la fanction des loix, l'inviolabilité

lité des usages & les restrictions mises aux mœurs, ou ce que le gouvernement ôte de la moralité & de la spontanéité des actes particuliers. Le poids de ces habitudes comprime tellement les forces vives de l'ame, que ces esclaves publics ressemblent à ces Indiens qui se couchent à terre pour se faire écraser par les chars où se trouvent placées leurs idoles. Ce sont ces diverses especes d'habitudes sociales que le principe de continuité oppose à l'action vive & instantanée du principe de diversité.

Notion de l'habitude physique appréciée par l'observation.

L'habitude ne seroit pas si forte, si à l'exemple de la nature elle ne tiroit pas la puissante maniere d'agir des forces *physiques* & *morales* de l'homme. L'habitude physique est fondée sur des loix que prescrit à chaque corps la réitération des actes & leur direction uniforme & égale. La nature des habitudes physiques se fait connoître par l'observation & l'expérience. On observe quatre faits principaux qui, réunis & combinés selon l'exigence des cas, forment la théorie de l'habitude physique. La premiere de ces opérations consiste à *simplifier* les loix de la nature de maniere qu'elles soient réduites à une seule; car alors cette loi, en prédominant dans les actes qui sont réglés par elle, donne à ces actes de l'uniformité, de l'aisance & de la facilité. Tous ceux qui excellent dans l'art de voltiger & d'exécuter des mouvemens singuliers & surprenans, les mettent en exécution par l'art de *libration*, & en observant exactement la loi de l'équilibre, quant à la distance dans laquelle il faut mettre le corps rélativement au centre de gravité. En y rapportant tous leurs actes, ils parviennent à leur donner de la simplicité, de l'uniformité & de la ressemblance, ce qui sert à rendre ces mouvemens habituels. Si la simplicité & l'uniformité d'une loi de la nature produit l'habitude, elle est encore l'effet de la *réitération successive* des actes de la même espece. Ces actes sont réitérés successivement en rendant la série de ces actes la plus continue qu'il soit possible, ou en donnant l'exclusion à tout ce qui laisse de trop grands intervalles. A mesure que chaque acte de la même espece semble se confondre avec celui qui l'a dû précéder, & qu'il y a une progression plus graduelle de ces mouvemens nuancés, l'habitude est contractée plus promtement & plus universellement. Car c'est par ce moyen qu'on approche de la simplicité & de l'uniformité des

mouvemens de la nature, qui ne se font pas par des impressions isolées & détachées, mais unies & continues. Les ondulations de l'air & les jets de la lumiere qui produisent les perceptions de l'ouïe & de la vue, nous représentent les mouvemens continus de la nature & sa façon d'agir par la loi de la continuité. C'est sur ce modele qu'il faut former les habitudes des corps. Les soldats qu'on veut accoutumer à subir les loix de la Tactique ne se dégourdissent que peu à peu; & pour faire contracter à leurs muscles une flexibilité qui leur fasse prendre machinalement & sans y penser les positions que la Tactique exige, il faut commencer par les mouvemens les plus simples, s'en servir pour passer à des mouvemens plus composés, bien lier ces mouvemens entr'eux, & en faire à chaque nouvelle évolution un résumé des plus exacts. Car alors le corps étant dans le cas d'un écolier à qui on fait apprendre une leçon pour la savoir par cœur, ce n'est que par cette réitération successive & bien liée qu'on parvient à vaincre jusqu'à la derniere difficulté & au moindre obstacle qui s'oppose à l'exécution la plus promte & la plus aisée. Il ne suffit pas que ces actes ayent la succession la plus réglée, mais il faut encore que *l'ame voie la liaison immédiate* qui se trouve entre ces actes, de sorte que par la sensation d'un certain ordre la sensation la plus proche soit occasionnée immédiatement, à peu près comme dans les déclamations & dans les récitatifs les dernieres syllabes & les derniers sons d'une période servent à la lier avec la période suivante. C'est ainsi que l'oreille s'accoutume à l'harmonie & qu'elle devint musicale, parce que la *réitération progressive* des actes de la même espece met l'ame en état de juger de ce qui doit accompagner ou suivre un son, par ce qui l'a précédé ou qui l'a accompagné souvent. L'ame se réglant, dans la série de ses perceptions, sur la loi de la continuité, lie ce qui par le secours d'une connoissance intuitive de l'ensemble doit être lié. La chose à laquelle dans la direction des habitudes il faut être le plus attentif, c'est de *ménager les forces de l'agent.* Une des plus grandes ressources pour contracter de fortes habitudes consiste dans l'économie des forces ou dans l'art d'employer le *principe de la moindre action.* C'est le secret de tous ceux qui veulent s'habituer à une forte contraction des muscles & des glandes. L'art de plonger, de nager, & de

moduler la voix par des roulemens qui ſe font dans le goſier, ſont de l'ordre des arts où le ménagement des forces entre en conſidération. Si nous réuniſſons ces diverſes obſervations dans la notion de l'habitude phyſique, comme elles y doivent être réunies, *cette habitude eſt l'emploi de la loi la plus ſimple & la plus univerſelle de la nature, réitérée d'une maniere ſucceſſive & progreſſive, avec le moins de force & dans la vue de produire une ſuite d'actes uniformes & continus.* D'où l'on peut déduire pluſieurs propoſitions très intéreſſantes que je me contente d'indiquer. En conſéquence de cette notion fondamentale chaque habitude croît en intenſité ſelon les degrés de la facilité avec laquelle on s'occupe à développer les effets graduels d'une loi ſimple de la nature; & la durée de chaque habitude eſt en raiſon de la moindre conſomtion des forces & du moindre nombre des intervalles qu'on a laiſſés entre les actes qui ont été comme les *émanations* du même principe ou de la même force. Le *maximum* de l'habitude eſt la jonction de la plus grande durée avec le moins de forces. Le *minimum* au contraire de l'habitude eſt la plus courte durée d'un acte habituel produite par la plus grande conſomtion des forces. Une habitude eſt plus *intelligente* que l'autre, ſelon le nombre des actes variables produits par les directions les plus ſimples, & de façon que la vivacité, la force, la juſteſſe & la préciſion de ces mouvemens ſe nuiſent le moins. Les bornes de l'habitude ſe réduiſent au rapport des loix de la nature à la ſomme des forces du corps humain, à le conſidérer comme une machine ſuſceptible de tels ou tels mouvemens; & la perfection des méthodes habituelles dépend de l'action plus immédiate d'une loi particuliere & modifiée ſur le local, ſur la continuité de la durée d'un mouvement. L'homme le mieux exercé dans les mouvemens du corps eſt celui qui ſait le mieux réunir les directions de ces loix dans les ſuites ou ſéries de ces actes corporels. Plus je conſidere cette matiere, plus je ſuis perſuadé qu'elle ſeroit ſuſceptible d'extenſion & de calcul, puiſqu'on y a des directions, des points, des diſtances, & des rapports conſtans; mais comme cette façon de conſidérer l'habitude n'eſt pas de mon reſſort, je ne dois pas tant la conſidérer en elle-même & dans un point de vue phyſique, que réla-

tivement au moral, & à la maniere dont elle sert d'acheminement & de passage aux affections durables de l'ame.

Les habitudes physiques influent sur le moral.

La continuité & la durée des mouvemens du corps servent à régler, à déterminer & à faire durer les mouvemens de l'ame, comme les habitudes physiques forment le genre de vie d'un homme & sa façon d'agir. La même idée revenant fort souvent & dans des circonstances à peu près semblables, elle détermine l'ame à agir uniformément & à recevoir les déterminations qui lui sont données par la continuité de l'exercice. La premiere idée qui naît des exercices du corps portés à un certain degré de force & de précision est *l'idée de ces forces mêmes*, que l'ame substitue dans tous les cas où il s'agit de les éprouver. Ainsi le courage, la bravoure & l'audace, qui ne sont que les idées collectives des forces & de l'adresse de l'homme, naissent de l'application immédiate que l'ame fait de ses expériences à un acte quelconque. Le *courage brut* qui agit indéterminément, parce qu'il résulte de la notion confuse des forces corporelles en général, est donc plus à craindre par rapport à la multitude & à la variété des cas où l'on fait usage de cette notion, qu'à l'égard de son *intensité* dans un cas particulier & déterminé. Le *courage réfléchi* differe du courage brut en ce qu'il fait aboutir & qu'il concentre, pour ainsi dire, toutes les forces dans un seul acte. Or ce qui vient de la collection méthodique des forces est beaucoup plus à craindre que ce qui vient de leur emploi hasardé, indistinct & peu réglé. L'homme policé & exercé selon les regles peut donc agir offensivement & se tenir sur la défensive avec plus de succès que l'homme brut; & la continuité de la bravoure du premier est à la continuité de la bravoure du second, comme la somme des actes réglés & méthodiques qui peuvent être produits par le premier, à la somme des actes fougueux, interrompus & hasardés du dernier. Par la même raison la notion intuitive des forces aquises & dirigées par l'habitude sert encore à *augmenter l'intensité* du désir qui se regle toujours sur l'étendue & le nombre des moyens que l'on a pour les accomplir. Les désirs accompagnés de la notion intuitive d'un objet sont des *passions*. Ainsi un homme qui sent ses forces a nécessairement des passions plus vives & plus fortes. Accoutumé à joindre à chaque acte la notion des forces qui lui

peuvent donner du ſuccès, il déſire avec plus d'ardeur & s'impatiente beaucoup plus qu'un autre qui doit mettre une infinité de reſtrictions dans l'uſage méthodique de ſes forces. Tous les mouvemens d'averſion & de répugnance, comme le dépit, l'animoſité, la colere & l'humeur vindicative, doivent auſſi croître dans la même proportion. Le ſang froid que la valeur met dans l'uſage de ſes forces ne vient pas du ſentiment immédiat de la compétence des forces, mais de la notion habituelle qu'on a jointe à leur uſage à leur répartition & à leur économie. La perſuaſion où l'on eſt alors du fonds inépuiſable & permanent de ces mêmes forces, donne de la fermeté & rend l'homme comme *imperturbable*. Les forces des autres, dont on eſt le dépoſitaire & le diſtributeur, ne ſervent pas moins à exalter la paſſion; & l'exaltent plus ſelon que ce dépot eſt plus intimement uni à l'idée que l'homme s'eſt formée de ſa nature & de ſes privileges perſonels. Un Monarque qui fait intervenir l'idée de défenſeur, de chef & de protecteur de l'État, ne s'enflamme pas d'une maniere auſſi ſubite & auſſi terrible qu'un deſpote qui conſidere les forces & les facultés des autres comme intimement unies à ſa perſonne & comme faiſant partie de ſes propres forces. Chaque acte de déſobéiſſance eſt donc traité par ces Princes comme une offenſe perſonelle; & leur courroux eſt en raiſon compoſée de l'étendue de leurs forces & de la jonction immédiate de ces forces avec leur caractere perſonel, ou de la notion préſomtueuſe qui en a réſulté. Si l'on ſait ſuſpendre l'effet de ſes forces, les diriger, répartir & modifier différemment par l'adreſſe & les tours de ſoupleſſe, l'ame aquiert une idée beaucoup plus étendue de ſes reſſources; & comme elle les tient en réſerve pour les employer avec plus de ſuccès dans l'occaſion, on voit ordinairement naître l'eſprit ruſé & diſſimulé de la perſuaſion où l'on eſt de ſon art & de la multitude des moyens qu'il nous fournit pour obvier à chaque incident. Rien ne ſert tant à rendre l'homme ingénieux & inventif que la multitude de ces ſtratagemes dont il croit avoir ſeul le ſecret. Si l'art de répartir ingénieuſement & de placer à propos nos propres forces produit cet effet, il n'eſt pas moindre dans ceux qui ſont dans la poſſeſſion des forces étrangeres. Si vous y joignez alors l'eſprit artificieux, qui nait des conflits d'où l'on s'eſt

tiré avec adresse, la confiance que l'on met dans ses artifices est le résultat de l'idée qu'on s'est formée de son adresse, augmentée par toutes les combinaisons possibles des forces que l'astuce a en main. La *durée de l'habitude* régle enfin la *durée des plans, des desseins* & *des sentimens:* on devient roide, opiniâtre, inflexible, à force d'être assujetti à des habitudes longues & qui durent sans discontinuité. Le pli que prend alors l'ame est aussi durable & aussi profond que le sont les traces faites dans l'esprit de l'agent. L'habitude qui tend à asservir l'homme au mouvement monotone & uniforme de ses actes, si elle est longue, forte & durable, met des entraves aux facultés pratiques de l'homme, & l'empêche de varier; de sorte que l'attachement fort & opiniâtre à des notions, à des usages & à des actes particuliers, doit souvent être considéré comme l'effet immédiat de l'habitude qui, avec un bras de fer, tient l'homme dans la dépendance la plus absolue d'un certain principe ou d'une certaine façon d'agir. Cette impossibilité de changer, envisagée du côté de l'humeur, est en raison de l'intensité de l'habitude & du nombre des actes qui ont été rendus habituels par l'impression perpétuelle & non-interrompue du même principe actif.

Habitudes nationales.

De l'effet immédiat produit par les habitudes physiques naissent certaines façons d'agir générales & uniformes des peuples qui forment les *habitudes nationales*. Le physique tenant au climat, au genre de vie, à la constitution du corps & à l'exercice, il résulte de la combinaison de ces causes une modification des habitudes physiques en général qui convient à un peuple & ne convient pas à un autre. L'habitude devient nationale ou uniforme par le concours de ces raisons particulieres avec les loix générales de la nature. Tous les peuples qui vivent dans un état approchant de celui de la nature, ont une si grande uniformité nationale, qu'elle absorbe, pour ainsi dire, toutes les diversités individuelles. Celui qui a vu un Lappon a vu en même tems toute la nation, & les usages observés dans sa cabane sont l'emblême des usages nationaux. La police, avec toutes les idées auxiliaires qu'elle tire des arts, des Lettres, des mœurs, de l'industrie & du commerce, modifie à la vérité la force de l'habitude & la rend très variée; mais comme c'est la nation qui s'est pliée à la police, elle a consenti à tous ces insti-

tuts dans la vue d'embellir, d'étendre & de rendre plus uſuelles ſes diſpoſitions ou ſes habitudes originaires. Au travers de toute la ſplendeur qui environne une nation, on voit ce qu'elle étoit d'abord & primitivement; tout comme les dignités, les diſtinctions & les charges ne changent jamais foncierement un caractere. On peut conſidérer la police ſous trois aſpects; ou le peuple s'eſt policé lui-même, ou la police ne regarde qu'une partie de l'État, ou enfin elle eſt l'ouvrage du Souverain. On peut appeller la premiere, *police d'induſtrie*, la ſeconde, *police de rang ou de dignité*, la troiſieme, *police de gouvernement*. La police d'induſtrie procede des efforts réunis de tous pour s'approprier une branche du commerce ou pour améliorer leur ſort. Du frottement de tant de parties naît, comme dans les corps, une eſpece de poli qui ôte toutes les parties contraires à la confiance, à la bonne foi & à l'obſervation des regles de l'ordre public. Comme l'on n'eſt entré dans ces ſortes d'aſſociations que pour un certain objet, chacun s'eſt réſervé ſes propres habitudes, & hors quelques changemens introduits par l'aiſance & le luxe, chaque maiſon conſerve le ton national, où il ne faut retrancher du phyſique de l'habitude nationale que ce qui eſt dû à la néceſſité & à l'étendue du principe induſtrieux. On diſtingue aiſément l'Anglois du Hollandois, malgré tous les changemens introduits dans la façon d'agir de ces peuples par la ſomme & les effets des intérêts commerçans. Car tous les actes d'individu à individu n'ôtent jamais l'individualité, mais modifient ſeulement ce qui eſt commun à tous, de ſorte que chacun adhere aux habitudes qu'il tient du phyſique avec toute la force des penchans naturels. La *police de dignité*, qui réſulte des diſtinctions que s'arroge une certaine claſſe d'habitans, a pour meſure l'idée de cette dignité, & pour but ſon maintien. Tenue dans ces bornes elle ne fait qu'ennoblir les habitudes perſonelles. C'eſt une Croix, un Cordon, qui ne ſont attachés qu'à l'extérieur & qui ne changent dans l'air & dans la démarche que ce qui convient au caractere perſonel. Si vous ôtez à un Noble de Veniſe ou de Genes l'idée qu'il a de ſa prééminence & des prétenſions qui ſont fondées là-deſſus, c'eſt un Vénitien ou un Génois comme les autres. Le ſentiment qui vient de l'intuition donne à la vérité plus d'intenſité aux actes publics, puiſqu'on

veut qu'on ne ſe conforme pas ſeulement à l'extérieur du rang, mais qu'on y joigne une idée ſemblable à celle que l'homme titré en a conçue; mais quelque ſoin qu'il prenne de faire valoir ſes prérogatives, elles n'effacent jamais ſes diſpoſitions & ſes habitudes originaires. La condition étant fondée ſur le caractere, & non le caractere ſur la condition, le Seigneur ramene plutôt ſes habitudes de rang à celles de nation & de caractere que ſes habitudes de nation & de caractere à celles de rang; de ſorte que depuis les habitudes des Sénateurs Romains juſqu'aux habitudes des Conſeillers de la plus petite République, les habitudes nationales ſont toujours aux habitudes ſénatoriales comme les actes particuliers ſont aux actes publics. Comme l'homme agit plus en ſens particulier & individuel, qu'en ſens public & commun, il eſt clair que la force de l'habitude prévaut beaucoup ſur l'inſtitution de rang & de dignité. Quand la police vient du *Souverain*, elle eſt beaucoup plus univerſelle & s'étend ſur toutes les claſſes des citoyens d'un État. Cependant il eſt vrai de dire que le changement ne ſe rapporte gueres qu'à l'extérieur. Le peuple, qui meſure tout ſur l'échelle de ſon intérêt particulier, ne prend pas aiſément le change, & ſes facultés ſe refuſant à tout ce que l'on voudroit introduire à cet égard, il ne peut être mis en mouvement que par l'eſpoir ou la crainte. Ces deux reſſorts ſont ſi puiſſans pour le vulgaire, qu'il en eſt vivement ébranlé. Il s'accommode quelquefois au tems, & des différens accommodemens ſucceſſifs, faits par les anciens uſages avec les uſages plus modernes, il naît un certain état mitoyen, qui n'eſt pas exactement l'état paſſé, & qui n'eſt pas en tout l'état preſcrit. Les habitudes nationales interviennent toujours dans ces divers accommodemens comme les parties médiatrices, qui partiales pour la nation lui ajugent beaucoup plus qu'on n'ajuge à l'inſtitut. Si le caractere du peuple eſt ſimple & s'il a plus de forces mortes que de forces vives, il a une averſion invincible pour toute eſpece d'innovation. Dans le cas oppoſé on peut mettre en jeu l'activité de la nation, lorſqu'on a l'adreſſe de décorer les nouveaux uſages de tout ce qui les fait paroître attrayans. Le plus ſûr eſt de faire accroire au peuple qu'il ſe décide pour l'amélioration de ſes propres

inſtituts;

institus, car alors il s'y porte avec toute la somme de ses forces actives. Tant les habitudes nationales jettent de profondes racines! Et ces dispositions naturelles sont d'autant plus difficiles à déraciner que l'on descend à des classes inférieures de citoyens, par la raison qu'ils ont moins de facultés naturelles ou aquises qui soient analogues aux nouveaux plans. L'habitude exerçant un empire absolu sur la derniere classe des membres de la société, ils sont comme les dépositaires du caractere national; & l'habitude nationale est toujours dans les États mêmes les mieux policés comme la somme des dispositions naturelles & comme la somme des difficultés que l'on trouve à changer ces dispositions.

Les habitudes morales naissent de l'intuition & de la réflexion.

Une idée jointe à un mouvement du corps, ou à quelque acte physique que ce soit, le rend *moral*, parce qu'on n'agit plus en vertu des loix universelles des corps ou de celles qui ont été prescrites au méchanisme de ses fonctions naturelles, mais on se détermine par des notions qu'on s'est formées. Une suite de ces actes, qui est devenue uniforme, fait la nature des *habitudes morales*, qui sont *bonnes* ou *mauvaises* selon la vérité ou la fausseté de la notion qui leur a servi de principe déterminateur. *Vrai en sens moral* est ce qui convient au bien-être de l'homme; *faux en sens moral* est ce qui l'en éloigne. Il y a autant de degrés de moralité qu'il y a de façons plus ou moins étendues de considérer le *bien-être* ou le *mal-être* de l'homme. Les *notions* qui déterminent ces habitudes sont, ou *simplement conçues* par *l'intuition*, ou *distinctement connues par la réflexion*. Le *plaisir* nous détermine quant aux habitudes que l'on contracte par intuition, & la *félicité* nous porte aux actes habituels du second ordre. Une sensation plus vive, plus exaltée que les autres, est le germe des habitudes par intuition. L'homme cherche à perpétuer les jouissances, & il répete cet acte jusqu'à ce qu'il soit devenu habituel, ou jusqu'à ce que la notion qui le dirige à cet acte soit devenue la plus claire, la plus vive, la plus forte & la plus étendue de toutes. L'homme agit dans les habitudes formées par l'idée intuitive du plaisir, comme la nature procede dans les habitudes physiques, & il paroit l'avoir copiée. Il simplifie d'abord cette notion & la regarde comme séparément existan-

te, & le plaiſir qui en réſulte comme le contenu & l'abrégé de tous les plaiſirs. C'eſt ainſi que le goût de l'application devient habituel. On regarde un certain ordre de connoiſſances comme celles qui renferment ce qu'il y a de plus beau & de plus ſolide dans toute la ſphere de la capacité humaine. Cette idée ſoutient l'homme, & vient à l'appui du travail ſoutenu qu'il lui faut employer pour vaincre les difficultés. A chaque ſuccès la notion déterminatrice devient plus lumineuſe & plus étendue. La différence que l'homme met entre cette notion & les autres lui paroit trop claire pour s'y tromper, & la ſuite de ces actes répond à la continuité progreſſive des plaiſirs qu'il reſſent. La jouiſſance de ces plaiſirs s'identifie enfin avec ſon être, & l'homme ne peut plus détacher ſa façon d'exiſter de la détermination à continuer ces actes agréables. Les plaiſirs connus par intuition ne different qu'en degrés, de ſorte que l'un de de ces plaiſirs lui rafraichit le ſouvenir d'un autre, & qu'il ſe forme enfin une chaîne indiſſoluble d'actes tendans à les réaliſer. C'eſt ainſi que ſe contracte l'habitude de mener une vie extrémement diſſipée & de la paſſer dans le grand monde. Ce plaiſir eſt de tous les ſentimens celui qui s'applique le plus aiſément à tous les états & à toutes les conditions. Car l'homme imbu d'une idée agréable ſe forme un monde idéal auquel il ramene ſes goûts & ſes actes. Il fait comme les poëtes & les peintres qui peuvent embellir tous les objets & leur prêter des charmes. Un homme qui eſt paſſionné pour le jeu voit partout des objets qui flattent & qui excitent ſa paſſion. A force de ſe familiariſer avec cette idée la vie ne lui paroît qu'un jeu, & rien n'égale dans ſon eſprit l'idée d'un accroiſſement de fortune qui vient en jouant. La choſe elle-même, & la maniere dont on l'obtient, le flattent également. Tout étant fortuit, chaque haſard le conduit à ſon idée favorite & ſert à la renforcer. Pour le principe de la moindre action il eſt inhérent à la notion intuitive du plaiſir; car rien ne coûte d'abord que l'eſprit eſt prévenu en faveur d'un objet. L'hermite ne compte pas ſes jeûnes ni le courtiſan ſes humiliations. La notion exaltée du plaiſir allant infiniment au-delà de tous les dégoûts, ils ſont comme engloutis & abſorbés dans l'intenſité de cette notion. Une

habitude produite par le plaiſir intuitif a donc la force, la durée, l'étendue de cette notion. Son intenſité peut devenir telle qu'elle eſt le réſumé de tous les plaiſirs particuliers, ou auſſi forte & auſſi étendue que toutes les notions particulieres, ſucceſſives & locales priſes collectivement. Chaque réflexion particuliere eſt donc ſans effet, parce qu'à ſon impreſſion s'oppoſent toutes les notions claires & vives de l'homme paſſionné qui ont été tirées de tous les incidens de la vie. Ce n'eſt donc qu'avec l'affoibliſſement des organes & des facultés de concevoir & de ſentir que la force de cette habitude commence à baiſſer & qu'elle perd une partie de ſon énergie.

Les *habitudes par réflexion*, qui dépendent des combinaiſons arbitraires dans leſquelles on a fait entrer telles ou telles parties *intégrantes* de félicité, ne ſont pas auſſi fortes que les habitudes par *intuition;* parce qu'un plaiſir inſtantané remue d'abord l'ame & agit très efficacement ſur elle, au lieu qu'une notion abſtraite & qui eſt formée par un grand nombre d'autres a beſoin d'être préſentée ſous une face très favorable pour produire de grands effets. Comme les enchaînures des circouſtances ne ſe prêtent pas toujours à ce but, la notion de l'intelligence manque ſouvent de ces lettres de recommandation vives & preſſantes, dont les actes accompagnés de notions intuitives ne manquent jamais. D'ailleurs il faut une grande attention d'eſprit pour voir la combinaiſon qui ſe trouve entre une notion réfléchie & la félicité qu'elle promet, & l'homme n'a pas toujours d'eſprit également bandé, de ſorte qu'il y a mille circonſtances où, ſans appeller à ſon ſecours la notion réfléchie, on ſe livre à un mouvement inſtantané; parce que la combinaiſon variable des événemens ne préſente jamais une ſuite d'encouragemens propres à nous mettre dans cette diſpoſition. Le meilleur eſt que ces déſavantages ſont égaux pour le vice & pour la vertu. Mais comme le vice, qui tient à l'excès, peut facilement s'allier avec l'idée intuitive du plaiſir auquel l'homme paſſionné ſe livre ſans meſure, il eſt de l'intérêt de la ſageſſe & de la vertu d'unir les principes de ces habitudes à la notion intuitive du plaiſir, qui eſt pur & réel toutes les fois que l'homme connoit

par intuition le rapport d'un acte avec le vrai bonheur. Si pour chaque acte vertueux on s'attachoit à établir un plaisir intuitif qui fût rélatif à l'harmonie de l'acte avec l'ordre universel des choses, & si l'on s'efforçoit de faire refluer dans l'ame de l'agent la plus grande partie des plaisirs procurés aux autres par son action, on pourroit renforcer l'empire de la vertu, & contrebalancer celui du vice. Rien ne sert tant à faire voir la force & l'énergie de l'intuition pour produire des actes habituels, que la considératioo des effets produits par le fanatisme, qui ont toujours été infiniment plus efficaces que les maximes d'une piété vertueuse & bien réglée. La chose est allée si loin qu'il n'y eut jamais de culte & de doctrine qui pour se faire valoir d'avantage n'ait permis & même enjoiot à ses adhérens de porter leur attachement jusqu'à le rendre analogue à la notion la plus exaltée qui puisse résulter du plaisir de l'intuition.

Idée de l'Imitation.

Quand on n'a point d'habitudes propres, on contracte celles d'autrui. L'habitude de copier les façons d'agir qui nous sont étrangeres s'appelle *Imitation* qui suit les loix de l'habitude & s'y conforme entierement.

Conclusion.

Si l'on vouloit faire le résumé de tous les états par lesquels on a vu passer les sociétés, il faudroit éoncer ces états socials par des formules dans lesquelles entreroient les rapports constans & variables des notions subordonnées aux loix de la continuité & de la diversité iodéfinie, des actions humaines ou la somme & les différences des forces vives & des forces mortes des sociétés.



PREMIER MÉMOIRE
SUR
L'ÉLOQUENCE,
PAR M. BORRELLY.

La matiere que j'entreprends de traiter eſt auſſi étendue que délicate. Puis-je me flatter de ne rien ômettre d'intéreſſant à peindre & de ne pas me tromper quelquefois dans mes jugemens? Elle a produit des diſcuſſions ſans nombre, dans tous les ſiecles. Ai-je lieu d'eſpérer, que j'aurai ſouvent l'avantage de découvrir des choſes tout-à-fait neuves, ou du moins ſuſceptibles d'un nouveau jour?

Quoi qu'il en ſoit, ſi je réuſſis à développer mon ſujet avec plus de netteté qu'on ne l'a fait encore; à enchaîner mes principes; à former de ces principes un corps de ſyſtême, & à les préſenter de maniere que l'homme de génie ſupplée de lui-même aux détails, ou les apperçoive d'un coup d'œil au bout de la chaîne, je n'aurai pas ſans doute fait un travail inutile; & l'on me ſaura gré de l'avoir entrepris. Qu'on ne regarde cependant cet eſſai que comme l'eſquiſſe d'un grand tableau, qu'il m'eſt plus facile de concevoir que d'exécuter.

J'enviſage dans l'art oratoire quatre objets principaux, qu'il ne faut pas confondre, ſi l'on veut que la diſcuſſion des principes ſoit moins embarraſſante & plus lumineuſe. Ces différens objets ſont l'éloquence, l'orateur, la Rhétorique, & le diſcours, autrement dit l'oraiſon.

L'éloquence n'eſt que le talent de l'oraiſon. Un talent eſt un don que nous fait la nature ſeule, que l'art ſuppoſe & qu'il ne ſupplée jamais.

L'orateur eſt le ſujet, l'individu qui a reçu ce talent. Il naît tel; & cet axiome de nos anciens, *ſimus oratores*, pris à la lettre, n'eſt qu'une erreur groſſiere. Il eſt vrai, que l'exercice & l'application ſont indiſpenſables, pour devenir des orateurs, dignes à tous égards de porter ce nom glorieux: mais il n'eſt pas moins évident, qu'en vain nous nous flatterions de le devenir, ſi la nature ne nous avoit doués de l'éloquence, en naiſſant.

La Rhétorique eſt l'art par lequel on formé ce talent. Un art eſt une collection de regles & de principes; & tout art s'acquiert par l'étude & par l'exercice. C'eſt ce qui diſtingue la Rhétorique de l'éloquence, qui n'eſt qu'une faculté purement naturelle, qu'on ne peut ſe donner.

Enfin, l'oraiſon eſt l'objet ſur lequel l'art donne ſes préceptes, pour aider le talent à parvenir plus-aiſément à ſon but. Ce mot *oraiſon* déſigne, en général, toute penſée, qui eſt exprimée par l'organe de la parole: mais, dans le ſens où je l'emploie ici, il ne ſignifie qu'un diſcours ſuivi, préparé avec art, dont toutes les parties concourent à l'objet qu'on s'eſt propoſé.

Ainſi, l'éloquence, l'orateur, la Rhétorique & l'oraiſon embraſſent tout ce qu'il y a d'objets eſſentiels dans l'Art oratoire.

Si l'art ſuppoſe toujours le talent, l'éloquence a dû naître avant la Rhétorique, comme les langues ont dû ſe former avant la Grammaire: & telle eſt l'idée que je me fais ici des procédés de l'eſprit humain.

L'homme, enviſagé comme un être iſolé, n'a beſoin que de la faculté de penſer & de réfléchir. Il lui ſuffit de pourvoir à ſes néceſſités. Mais, deſtiné par l'Auteur de la nature à vivre en ſociété avec ſes ſemblables, il faut, que non ſeulement il connoiſſe les divers êtres qui l'environnent, & tous les objets intellectuels qui peuvent exercer ſa penſée, remplir ſon imagination, concourir à ſa félicité, mais encore qu'attachant à tout ce qui exiſte ou peut exiſter, à tous les êtres réels, viſibles & inviſibles, une idée nette & préciſe, il crée des mots pour ſe faire entendre, qu'il communique ſes penſées & ſes ſentimens, qu'il ſache en un mot faire uſage de la parole.

Le langage ordinaire eſt né le premier; & c'eſt le beſoin ſeul qui lui a donné la naiſſance. Mais le beſoin s'attache au pur néceſſaire, & néglige les ornemens. Ainſi le langage des premiers hommes fut extrémement ſimple. Leurs mœurs étoient d'ailleurs auſſi pures qu'agreſtes; & le langage eſt toujours l'image fidele des mœurs. Ils n'étoient point encore livrés aux paſſions qui nous tyranniſent; & l'art de convaincre, de plaire, de toucher, n'eſt ſurtout un art important & qu'il faut connoître, que lorsque les paſſions exercent plus ou moins leur empire.

Cet empire fatal ne fut pas longtemps à éclorre. L'eſprit d'intérêt & l'ambition enfanterent les diviſions & les crimes. On acquit de nouvelles lumieres: mais la cupidité en pervertit bien ſouvent l'uſage, & ne s'en ſervit que pour le malheur de l'humanité. Alors l'éloquence fut un art néceſſaire. Il fallut intéreſſer ſes ſemblables à la cauſe commune, s'élever contre les ennemis de la liberté & de la patrie, défendre ſes droits perſonnels, faire parler la raiſon, invoquer la Juſtice, venger l'innocence perſécutée & la foibleſſe ſous l'oppreſſion.

Mais cet art, informe dans ſa naiſſance, ne parvint à la perfection qu'après de longs & pénibles efforts & par des degrés inſenſibles. L'expérience, le temps, le goût polirent peu à peu le diſcours; & il y a bien de l'apparence, que ce fut la poéſie elle-même, auſſi ancienne que le monde, qui ouvrit le chemin à l'oraiſon, & qui lui communiqua, pour l'agrément, tout ce qui l'a miſe depuis preſqu'à ſon niveau.

Comme tous les beaux arts, enfants de la nature, l'éloquence & la poéſie ont un lien commun qui les réunit. Elles ſe dirigent également par les mêmes principes; & c'eſt du mélange de leurs qualités que réſulte leur perfection. La poéſie a prêté ſes parures à l'éloquence. L'éloquence à ſon tour a départi ſon bon ſens à la poéſie.

Telle eſt l'origine de ces deux arts; & telles ſont en même temps leurs fonctions: ennuyés de l'uniformité de la ſimple nature, & ſe ſentant capables de plus vives impreſſions de plaiſir, les hommes chercherent d'abord à ſe procurer un nouvel ordre d'idées & de ſentimens, qui, réveillant leur

eſprit, & ranimant leur goût, fit paſſer leur ame dans une ſituation plus délicieuſe. Leur génie s'échauffe. Un feu preſque divin s'empare de leurs ſens. Tout l'univers s'offre à leurs yeux; & cet eſprit de vie qui les anime ſe répand ſur tous les objets qu'ils ſe repréſentent.

Au milieu de cet enthouſiaſme, la poéſie naît. Elle obſerve les traits épars de la nature, les choiſit, les raſſemble; & par la force de ſon pinceau, elle les reproduit avec tous les charmes poſſibles. Le plaiſir eſt ſa fin derniere. Tout lui ſert de degré pour atteindre à ſon but. Le menſonge & la vérité, la fable & l'hiſtoire, ce qui eſt dans l'ordre des choſes & ce qui en ſort, le poſſible & l'impoſſible, entrent également dans ſes vues, font partie de ſes deſſins. Sa raiſon active ſe change en fureur. Un phantôme qui fuit l'entraîne. Elle éleve des édifices, ſans poſer de fondements. Les plus petits objets ſuffiſent pour l'enflammer. Tout l'occupe, tout la transporte, tout la ravit.

Tandis qu'elle enfante ſes chefs-d'œuvre divers & qu'elle s'amuſe de ſes propres fictions, l'éloquence, que forme le beſoin qu'ont les hommes de ſe communiquer réciproquement leurs penſées, s'éleve inſenſiblement au deſſus d'elle-même. La raiſon la ſoutient & la ſuit par-tout. Mais, à l'imitation de la poéſie, elle ſe pare d'ornemens qui l'aident à parvenir à ſes fins; & pour nous conduire plus ſûrement à la perſuaſion, elle ſeme les fleurs ſur ſa route.

La poéſie a frayé la voie à l'éloquence. Elle a dirigé ſes pas dans ſa marche, & lui a ſervi de modele. L'éloquence a modéré les écarts de la poéſie; &, ſans la détourner de ſon véritable objet, elle l'a rapprochée du ſien. Celle-ci a montré à la poéſie la néceſſité d'oublier quelquefois la fiction pour la vérité; & comment, pour plaire à l'eſprit, elle doit intéreſſer le cœur par la réunion de l'utile & de l'agréable. Celle-là a appris à l'éloquence à aſſaiſonner auſſi quelquefois ſes leçons; & comment, pour gagner le cœur, elle doit éblouir & frapper l'eſprit par une expreſſion vive & énergique de la nature.

C'eſt

C'eſt donc avec raiſon qu'on a dit, que nos fameux orateurs ont été, pour ainſi parler, poëtes dans leurs oraiſons, comme nos poëtes célebres ont été orateurs dans leurs poéſies.

L'orateur ſe propoſe d'inſtruire; le poëte, de plaire: c'eſt en quoi conſiſte leur différence. La vérité eſt l'objet de l'un; l'agrément ou le plaiſir, de l'autre. Mais, pour parvenir à leur but, l'orateur doit s'efforcer de plaire; le poëte, d'inſtruire: c'eſt en quoi ils ſe réuniſſent & ſe reſſemblent. L'un éclaire l'eſprit, en charmant l'imagination. L'autre rend ſes jeux plus piquans & ſes fictions plus intéreſſantes, en y mêlant quelquefois l'inſtruction. Tous deux ſont parfaits dans leur art, s'ils excitent à propos dans le cœur humain les différentes paſſions, par leſquelles on le gouverne.

C'eſt cette proximité & cette reſſemblance de l'éloquence avec la poéſie, qui lui donnerent la facilité d'emprunter une partie de ſes ornemens. Elle apprit à connoître ceux qui lui convenoient & à ſe les ajuſter. Dès-lors elle ne ſe contenta plus de préſenter la vérité toute nue. Elle ſongea encore aux moyens de la rendre agréable, & de joindre à ſa beauté naturelle ces graces ſéduiſantes auxquelles il eſt ſi difficile de réſiſter. Son objet ne fut pas ſeulement de s'exprimer toujours purement & avec clarté, mais d'arrondir ſes phraſes & ſes périodes, de meſurer tous ſes mouvemens, de faire contraſter avec dignité ſes expreſſions & ſes penſées, de peindre fortement la nature & de la faire ſentir, de ſe revêtir enfin de toutes les parures que l'imagination & l'harmonie pouvoient lui fournir.

On n'a donc joint toutes les reſſources de l'art au génie dans le langage oratoire, & l'on n'a ſoumis ce langage à la préciſion des regles, qu'après les grands ſuccès de la poéſie. Mais ce ne fut qu'au ſiecle d'Homere qu'on le vit paroître avec tous ſes charmes. Cet homme immortel, ce génie ſublime, toujours ſimple, vrai & naïf, ſut choiſir, embellir la nature, & la rendre par-tout agréable. On ſe dirigea d'après ſes principes; & comme lui on s'attacha à peindre la vérité & à ſuivre pas à pas la nature, mais en s'efforçant de les montrer également par-tout avec autant de graces que d'énergie. Il racontoit les faits des héros avec dignité; & ſa narration

eſt toujours ſi vive, ſi animée, qu'on eſt moins avec le poëte qu'avec ceux dont il décrit les belles actions. Ce fut auſſi de lui qu'on apprit cet art ſi rare & ſi eſſentiel, ſurtout à tout ouvrage de longue haleine, où le défaut de mouvement & d'action conduit inévitablement à l'ennui, quand la vivacité de la peinture n'en corrige point l'uniformité, la monotonie. Sa marche harmonieuſe & ſon ſtyle pittoresque firent ſentir la néceſſité de commencer par flatter l'oreille & par charmer les ſens pour convaincre l'eſprit. Enfin il excelloit dans l'art d'exciter à ſon gré les divers mouvemens des différentes paſſions; & l'on cultiva cet art merveilleux ſous le plus grand des maîtres. Hérodote, Iſocrate, Démoſthene, Eſchyle, Socrate, Platon, lui durent preſque tout leur ſuccès.

C'eſt ainſi que l'éloquence, ſe formant ſur la poéſie, a fait partie des beaux arts.

Il n'en eſt aucun qui mérite d'être cultivé avec plus de ſoin, & dont l'utilité ſoit plus ſenſible & plus univerſelle. Son uſage s'étend à tout & fut le même dans tous les temps. C'eſt l'éloquence qui a jetté les fondemens de la ſociété civile, qui a banni la barbarie, qui a adouci l'humeur ſauvage des premiers hommes, qui les a rendus plus traitables, qui leur a donné des loix, qui les a ſoumis à la juſtice & à la raiſon; & lorſque l'intérêt particulier, cet eſprit deſtructeur des ſociétés, a fait naître les diviſions & les crimes, c'eſt elle encore qui a ſecouru le foible opprimé, vengé l'innocence perſécutée, repouſſé la calomnie, retenu les méchans par la crainte, protégé les bons contre leurs aggreſſeurs. Elle fait entendre ſes oracles dans les Cabinets des Princes. Elle éclaire & guide les eſprits dans les aſſemblées. Elle enflamme les ames guerrieres dans les combats. Elle excite les eſprits chancelans & releve les cœurs abattus. Ici, elle inſpire l'amour des vertus & l'horreur du vice. Là, elle commande aux paſſions, impoſe ſilence aux préjugés, ordonne le ſacrifice de tout intérêt perſonnel, préſente le bien public comme le but unique de tout bon citoyen, l'honneur comme le terme & la récompenſe des belles actions. Tantôt, elle menace & fait trembler les Tyrans ſur leur thrône. Tantôt, elle montre aux ſujets la ſource & le

principe de leur bonheur, dans la soumission aux loix, le concours à l'ordre public, l'amour de la patrie, l'obéissance, le respect & le dévouement envers le Souverain. Tantôt, elle réveille dans tous les cœurs ces nobles idées, ces grands, ces généreux sentimens, qui élevent l'homme, pour ainsi dire, au dessus de l'homme même, & qui en feroient presque un être divin, s'ils étoient toujours soutenus.

Les orateurs qui font servir leur éloquence à l'injustice & au crime, la dégradent & l'avilissent. Elle est née pour faire triompher l'honneur, la vertu, l'innocence, la vérité, la justice, & jamais ces passions brutales & tyranniques qui sont les fléaux de la terre & la honte de l'humanité.

Mais il n'est malheureusement que trop vrai, que ce talent précieux a été bien souvent l'instrument du crime, & que la perversité humaine en abuse encore & en abusera même dans tous les siecles. Toujours des hommes ambitieux se serviront du don de la parole, pour étendre leur domination, pour opprimer les foibles, pour donner des fers à des peuples libres. Toujours de mauvais citoyens tourneront contre le sein même de leur patrie les armes qu'ils auront reçues de la nature avec les talens dont elle les aura doués en naissant, & s'efforceront de répandre parmi le peuple imbécille cet esprit de murmure & d'inquiétude, ces sentimens d'indépendance & de rébellion, qui ne respectent ni les loix ni l'autorité légitime, & qui par là-même entraînent si souvent la ruine des plus fermes États. Toujours enfin des orateurs serviles & mercenaires trafiqueront honteusement de leur gloire, aviliront leur voix & leurs plumes, en les prostituant au mensonge, à l'injustice, à la cruauté.

L'éloquence est noble par son institution; & le service réel de l'homme est sa fin originaire.

De là résulte une grande maxime, dont tout bon esprit apperçoit aisément toute la justesse, & dont nos orateurs néanmoins s'écartent bien souvent dans leurs productions oratoires: c'est que l'art ne doit jamais s'y montrer, & que tout ce qui n'y est que pour l'ornement les dépare. Tout édifice, dont les différentes parties ne tendroient qu'à l'agrément, manque-

roit ſon but, ſeroit vicieux. Toujours grave, toujours modérée, toujours modeſte, l'éloquence s'attache, de même que l'architecture, à l'utile & au vrai. Elle n'emprunte de parures qu'autant qu'il lui en faut pour s'ouvrir un accès plus facile, & pour triompher plus aiſément des obſtacles qu'on lui oppoſe.

Ce n'eſt pas que ces deux arts ne prennent quelquefois l'eſſor. L'éloquence célebre les Héros. L'architecture éleve des temples en l'honneur des Dieux arbitraires du Paganiſme & à la gloire du ſeul Dieu véritable chez les Chrêtiens. Leur fonction eſt alors d'atteindre à la grandeur de leur objet par l'imitation; & leur devoir, d'étonner les regards, de frapper les eſprits, d'élever l'ame des ſpectateurs, d'exciter une admiration générale. Mais dans ces cas là-même, on ne permet, ni à l'éloquence ni à l'architecture, de s'écarter trop de leur fin originaire, qui n'eſt jamais que le beſoin, l'utilité réelle.

Ces principes ſont immuables. Ils ont toujours été admis, & ne ſeront jamais méconnus par les vrais orateurs. Mais qu'il eſt à craindre, que la manie du bel-eſprit, qui ſemble faire tous les jours de nouveaux progrès, n'éteigne tôt ou tard parmi nous cette éloquence mâle & vigoureuſe, ennemie des fauſſes parures & des ornemens recherchés, qui fut autrefois celle des Cicéron & des Démoſthene, & de cette multitude étonnante d'hommes célebres qui ont honoré la France ſous le regne de Louis le Grand! On s'attache au clinquant. On veut du léger & du délicat; & les diſcours, à force d'être polis & limés, n'ont preſque plus de corps & ſont vuides de choſes. Ce n'étoit point là l'éloquence des grands modeles que nous offre l'Antiquité.

Les Rhéteurs ont preſque tous reſtreint l'éloquence à l'art de perſuader. Mais combien de morceaux dans tous les diſcours & dans toutes les langues, qui ne prouvent rien, & qui néanmoins ſont vraiment éloquens, par cela ſeul qu'ils excitent la plus vive émotion dans les cœurs?

Ne bornons point l'éloquence à ſa partie la plus noble & la plus étendue; & pour nous en faire l'idée la plus générale, enviſageons-la comme

le *talent de faire passer avec rapidité & d'imprimer avec force dans l'ame des autres le sentiment profond dont on est pénétré.*

Cette définition est complette, & convient, comme l'a fort bien remarqué Mr. d'Alembert dans ses *Réflexions sur l'élocution oratoire*, à l'éloquence même du silence, langage énergique & quelquefois sublime des grandes passions; à l'éloquence du geste, qu'on peut appeller l'éloquence du peuple, par le pouvoir qu'elle a pour subjuguer la multitude, toujours plus frappée de ce qu'elle voit que de ce qu'elle entend; enfin à cette éloquence adroite & tranquille, qui se borne à convaincre sans émouvoir, & qui ne cherche point à arracher le consentement, mais à l'obtenir.

Cette derniere espece d'éloquence est de l'usage le plus fréquent. On la retrouve presque par-tout. Ses expressions sont toujours simples & naturelles, ses peintures naïves, ses passions douces. Elle rejette les grands traits, les teintes chargées; & si elle n'agite point l'ame avec violence, si elle ne l'enleve point à elle-même, elle l'intéresse, elle la soumet & la gagne par sa douceur. Elle nous présente la vérité sans apprêt & sans fard. Elle peint la nature telle qu'elle est; &, quoique les ornemens qu'elle employe ne nous fassent point illusion, elle ne laisse pas de produire en nous une sorte d'enchantement, auquel même nous nous livrons d'autant plus, que rien ne l'annonce, que ses effets sont lents, que ses gradations sont imperceptibles. C'est cette éloquence que les anciens ont appellée le *genre simple ou délié.*

Celle qu'ils ont nommée le *genre tempéré* s'éleve de quelques tons plus haut, a quelque chose de plus brillant & de plus recherché, est tout à la fois plus abondante & plus ornée. Elle s'occupe davantage des moyens de flatter l'imagination, & de la charmer par l'éclat des pensées, la richesse des expressions, la variété des tours, la vivacité des figures, la pompe des images, l'harmonie du nombre & de la cadence. Elle s'étudie moins à déguiser sa marche, & à cacher l'art par lequel elle tend à la persuasion. Souvent même elle se plaît à étaler ses richesses avec une sorte d'ostentation. Si la vérité qu'elle offre à l'esprit ne triomphe point par sa seule beauté,

elle l'orne, elle l'embellit; elle compose sa parure de tout ce que l'art peut lui fournir de plus gracieux & de plus flatteur. Si on résiste encore à son pouvoir, elle a recours à la force & à la contrainte. Mais la douceur & l'agrément dominent chez elle. Naturelle & coulante, sa diction se distingue sur-tout par l'exactitude, la clarté, la simplicité, la facilité. Les traits frappans & lumineux n'y sont point réunis en masse, mais placés de distance en distance pour éclairer & non pour éblouir.

L'éloquence ou *genre sublime* s'éleve à tout ce que la pensée a de plus grand, le sentiment de plus noble, l'expression de plus énergique, la peinture de plus brillant, de plus vif, de plus animé, le tour de plus harmonieux, la passion de plus fort & de plus véhément. Elle frappe, elle ravit l'ame par la majesté de ses traits & de ses couleurs. C'est elle, selon la remarque du prince des orateurs latins dans son livre *de l'Orateur*, qui enleve les suffrages, qui se rend maîtresse des délibérations publiques, qui étonne le monde par le bruit & la rapidité de sa course; qui, après avoir excité l'applaudissement & l'admiration des hommes, les laisse dans le désespoir d'atteindre à cette haute perfection où elle s'est élevée. En un mot, c'est elle qui regne souverainement sur les esprits & sur les cœurs; qui, tantôt brise tout ce qui ose lui résister, tantôt s'insinue dans l'ame des auditeurs par des charmes secrets, & tantôt y établit de nouvelles opinions ou déracine celles qui paroissent les mieux affermies.

Quintilien n'a pas conçu le genre sublime moins fortement. Il le compare à un fleuve majestueux, qui entraîne tout jusqu'aux pierres & aux rochers, qui rompt & emporte ses digues, qui ne connoît d'autres rives que celles qu'il se fait lui-même, qui s'enfle & s'irrite de plus en plus dans son cours. L'orateur dans ce genre évoque les morts, personifie la patrie pour gémir sur les attentats d'un citoyen rebelle, apostrophe les Dieux, prête de l'ame & du sentiment à tous les êtres inanimés.

Tel est le caractere particulier des trois especes d'éloquence, qu'on a désignées par le *genre simple*, le *genre tempéré* & le *genre sublime*.

C'eſt la nature de l'objet ou de l'idée, qu'on ſe propoſe d'exprimer & de peindre, qui fait qu'on a recours tantôt à l'un, tantôt à l'autre de ces différens genres. Mais il n'eſt peut-être pas de diſcours ſuivi, de quelque étendue, où l'on ne puiſſe, où l'on ne doive même les employer tour à tour, pourvû qu'on faſſe dominer celui des trois, qui convient le mieux à la matiere qu'on traite & au ton général de l'ouvrage.

Cette regle eſt un de ces principes fondamentaux, que dictent le bon-ſens & la ſaine raiſon, & dont un orateur ne peut s'écarter ſans tomber dans le ridicule. Si l'idée eſt petite & commune, il ſe renfermera dans le *genre ſimple.* Si l'objet eſt ſuſceptible d'ornemens; & ſi, pour plaire & pour être accœuilli favorablement, il a beſoin de cette parure légere, de ces graces ingénues & naturelles qui fixent ſur elles tous les regards, le *genre tempéré* aura la préférence ſur le premier. Si enfin l'objet eſt grand, noble, élevé, l'orateur déployera toutes les reſſources de l'art, tous les thréſors du *genre ſublime.* L'expreſſion répondra à la hauteur de la penſée. L'image ſera vive, frappante, majeſtueuſe; de maniere que les idées des ſpectateurs ſeront portées au plus haut degré d'étendue & d'élévation, que leur ame ſera ſaiſie, & ſi *fortement* affectée que ſa ſenſibilité ſe réunira pour ainſi dire en un point, & que toutes ſes facultés ſeront comme interdites & ſuſpendues.

Où trouver le germe de ce talent? Ce ne peut être que dans une ſenſibilité rare pour le grand & pour le vrai. Malheur aux ames froides qui ne s'y portent point d'elles-mêmes & comme par inſtinct! Elles ne parviendront jamais à la haute & ſublime éloquence. Cette gloire n'eſt réſervée qu'à ces génies, heureuſement nés, qui, après s'être fortement frappés de l'idée de la perfection de leur art, y tendent avec autant d'ardeur que de courage, & bravent tous les obſtacles pour y atteindre.

L'homme éloquent ou que la nature a doué des qualités néceſſaires pour devenir un grand orateur, peut ſe diſtinguer, ce me ſemble, aux mêmes caracteres qui nous font reconnoître le vrai poëte. Il eſt frappé de tout. Tous les êtres lui font éprouver quelque ſenſation. Il s'intéreſſe à tout ce

qui eſt dans la nature. Aucune idée n'entre dans ſon ame qu'elle n'y éveille un ſentiment. Il parcourt l'univers d'un coup d'œil; & il s'émeut à la préſence des objets dont il eſt entouré. Ses affections ſont auſſi durables que vives; & le plaiſir qu'il en reçoit lui eſt précieux. Il s'abandonne à tout ce qui l'augmente. Il cherche des couleurs, des traits ineffaçables, pour donner un corps aux phantômes-même, qui ſont l'ouvrage de ſon imagination, & qui la tranſportent ou qui l'amuſent. Il perce les abimes. Il vivifie la matiere. Il colore la penſée. Il ſe transforme dans les perſonnages qu'il fait agir; & dans la chaleur de ſon enthouſiaſme il en prend tous les caracteres. Entraîné par la fougue de ſes penſées, livré tout entier à la facilité de les combiner, forcé de produire, il s'élance d'un vol rapide vers une vérité lumineuſe, qui eſt bientôt la ſource de mille autres. Il tire un principe fécond du ſein des ténebres; & meſurant, par l'activité de la penſée l'eſpace immenſe qu'il a devant lui, il part d'un point comme l'éclair; & déjà il touche à ſon but.

C'eſt par là que l'orateur, comme le poëte, ſoumet les eſprits & les cœurs, qu'il renverſe tout ce qui lui réſiſte. C'eſt ainſi qu'il étonne, frappe, ravit, enchante. C'eſt par ces qualités réunies qu'il éclaire ſon ſiecle, qu'il honore ſa nation, qu'il devient le modele de la poſtérité.

On a dit avec fondement, que le ſublime eſt à la véritable éloquence ce que l'enthouſiaſme eſt à la bonne poéſie. Ne s'agit-il que de narrer, & de préſenter les objets avec ſimplicité? Le poëte ne ſe laiſſe point aller au feu de ſon génie. Il ſe contente de peindre de maniere qu'il puiſſe plaire & intéreſſer. Il s'attache bien moins au grand qu'à l'agréable. Il choiſit & place ſes modèles. Il arrange & combine les traits dont il a fait choix. Il oſe quelquefois corriger la nature dans les détails & dans l'enſemble: mais toujours maître de lui-même & de ſa veine, il n'eſt jamais qu'un hiſtorien exact & élégant, qu'un philoſophe éclairé & poli, qu'un peintre fidele & gracieux. S'agit-il, au contraire, d'échauffer l'ame de ſes lecteurs, de toucher vivement leurs cœurs, de leur faire éprouver tous les mouvemens des grandes paſſions? Le poëte s'éleve, prend l'eſſor. Ce n'eſt plus un mortel

ordinaire

ordinaire qui parle. C'eſt un génie inſpiré par les Dieux. Il eſt Dieu lui-même. Son imagination, auſſi féconde que la nature, crée des ames comme des corps. Il raſſemble des traits frappans de divers modeles; & il en forme des êtres à ſon gré. Il oppoſe ces êtres les uns aux autres, & les met en action. A l'énergie du ſentiment & à la vivacité des images, il joint l'expreſſion de la voix: & non ſeulement il s'émeut par l'éloquence du ſentiment & le coloris des images; mais il flatte & charme l'oreille par la beauté phyſique & l'harmonie imitative des ſons. Son caractere, ſes traits, ſon langage ſont ceux-même du Dieu qui l'anime & qui le remplit. Ainſi procede l'orateur dans ſa marche; & ce n'eſt qu'après avoir inſtruit & éclairé ſes auditeurs, autant que le beſoin de ſon ſujet le demande, qu'il fait mouvoir les plus puiſſans reſſorts de ſon art.

L'enthouſiaſme a, dans la poéſie, ſa place fixée par le bon ſens; & c'eſt le goût qui le retient dans de juſtes bornes. Le ſublime eſt placé de même dans l'éloquence. Il n'exclud ni le genre tempéré ni le genre ſimple; & toujours dépendant du ſujet & ſoumis à la loi du goût, il ne prend jamais que le rang & la forme qu'ils lui aſſignent.

Ce qui nous éleve l'eſprit ou l'ame, & ce qui nous humilie & nous anéantit en quelque ſorte à nos propres yeux, eſt, comme l'obſerve Mr. d'Alembert dans ſon *Diſcours de reception à l'Académie Françoiſe*, la matiere propre de l'éloquence.

D'après ce principe, il ne faut à un génie élevé que de grands objets, pour être éloquent, même ſans aſpirer à cette gloire. N'a-t-on que des choſes triviales & ordinaires à expoſer? L'ame demeure froide & tranquille. Rien ne l'échauffe. Rien ne l'émeut. Mais que le ſujet ſoit grand, élevé: l'eſprit s'aggrandit, s'éleve avec lui. La même diſpoſition, qui le rend ſuſceptible d'une émotion vive, ſuffit pour en faire ſortir l'image au-dehors; & le caractere du ſujet paſſe de lui-même au diſcours.

Le ſujet produit l'intérêt. L'intérêt fait naître la paſſion. La paſſion appelle l'imagination; & l'imagination enflammée enfante le ſublime & le merveilleux.

Auſſi rien n'eſt-il comparable à l'éloquence des Livres ſaints. Que d'endroits frappans n'y trouve-t-on pas? Partout, quelle majeſté & quelle ſimplicité! On ſent, que ce ſont des hommes inſpirés & pénétrés de la grandeur de leur miniſtere qui nous inſtruiſent, ou plutôt que c'eſt Dieu même qui daigne ſe communiquer à nous, pour nous annoncer ſes merveilles & pour nous preſcrire ſes volontés. Les expreſſions & les images ne ſont jamais pompeuſes & brillantes, que parce que les choſes ſont elles-mêmes ſi grandes & ſi élevées qu'elles entraînent néceſſairement la magnificence du ſtyle.

Jamais l'éloquence humaine n'a rien produit de ſi noble, de ſi ma-
jeſtueux, de ſi digne d'admiration. Ouvrons ces livres ſacrés; & voyons ſous
Exod. 3, 14. quels traits, par exemple, ils nous peignent l'Être ſuprême. Il eſt celui qui eſt.
Iſaïe 66, 1. Son nom eſt l'Éternel. Le monde eſt ſon ouvrage. Le ciel eſt ſon thrône,
& la terre ſon marche-pied. Quelle gloire, quelle majeſté l'environne!
Il eſt entouré de lumiere comme d'un vêtement. Il a tendu le ciel comme
Pſeaume 103 un pavillon, dont les eaux ſupérieures ſont le toît. Il monte ſur les nuées.
Il marche ſur les aîles des vents. Les orages ſont ſes miniſtres; & le feu
brûlant exécute ſes ordres. Toutes les nations ne ſont à ſes yeux que com-
me un grain de pouſſiere. Tout l'univers eſt devant lui comme s'il n'étoit
Iſaïe 40, 15. 17. pas. Sa puiſſance & ſa ſageſſe le conduiſent & en reglent tous les mouve-
Dan. 4, 14. 31. mens. Il diſpoſe des ſceptres & des empires; & il les donne à qui il lui
plaît. Mais ſon empire & ſon pouvoir ſont ſans bornes. Il regarde la
Pſeaum. 103. Terre: elle frémit de crainte. Il touche les montagnes: elles ſe per-
dent en fumée.

Si on examine bien, pourquoi les Auteurs prophanes ne nous préſentent nulle-part ce ſublime qui nous étonne, qui nous ravit, on verra que c'eſt uniquement parce qu'ils n'avoient ni le même fond dans leur matiere, ni le même eſprit pour les animer dans la compoſition. Les écrivains ſacrés alloient juſques dans le ſein de la divinité même prendre leurs ſujets & la force qui leur étoit néceſſaire pour les traiter dignement. Ils puiſoient la vraie grandeur dans ſa ſource.

La principale attention d'un orateur ſera donc de choiſir un ſujet, qui ſoit ſuſceptible d'intérêt & de grands mouvemens.

Il n'eſt plus ſans doute ce temps, où les eſprits, échauffés par l'amour de la liberté & de l'indépendance, excités par l'enthouſiaſme du patriotiſme, enflammés d'une noble ardeur pour la gloire, ſoutenus par l'eſpoir de parvenir, dégagés enfin de toutes les entraves qui reſſerrent aujourd'hui le génie, pouvoient produire des vérités hardies, étaler des raiſons & des peintures fortes. Nos empires modernes ſont à peu près les mêmes, quant au principe actif & à la forme du gouvernement.

Cependant l'orateur peut encore, quel que ſoit le pays qu'il habite, rencontrer des ſujets fertiles, s'il a des yeux pour voir, du diſcernement pour faire un bon choix parmi les objets qui l'environnent, aſſés de pénétration, de philoſophie & de goût, pour enviſager ſous toutes les faces celui de ces objets qui l'aura fixé, & pour le préſenter de la maniere la plus frappante & la plus favorable.

S'agit-il, pour l'homme d'État, de délibérer ſur de grands intérêts publics, de lever des obſtacles, de rompre des meſures contraires aux vues de la Politique, de prendre des réſolutions généreuſes, de faire des repréſentations importantes, de traiter avec quelque Puiſſance étrangere, de ſoutenir les droits nationaux & la gloire du Souverain?

L'orateur, s'il a de l'ame & du ſentiment, ſe pénetre bien de ſon rôle & de ſon objet. Il examine attentivement ce qui eſt utile & honorable, & ce qui ne l'eſt pas. Il étudie les diſpoſitions des eſprits. Il meſure la grandeur des obſtacles qu'il lui faut vaincre, à l'efficacité des moyens qu'il peut employer. Il approfondit les cauſes & les effets des événemens: & quand une fois il s'eſt rendu maître de ſa matiere, qu'il s'eſt revêtu du caractere qui lui convient, que ſon imagination s'eſt échauffée pour ainſi dire au foyer de la méditation, qu'elle s'eſt montée au ton du ſujet & des circonſtances, ſon éloquence eſt telle qu'elle doit être. Elle s'énonce avec netteté. La chaleur du ſentiment intérieur ſe répand ſur tout ſon diſcours.

Les expreſſions lui viennent comme d'elles-mêmes; & les lecteurs ou les ſpectateurs partagent l'enthouſiaſme qui le remplit au moment de la production.

L'homme d'État ne trouve pas toujours, j'en conviens, des occaſions d'étaler avec éclat ſes talens. Mais tous les temps lui en fourniront de plus ou moins brillantes s'il ſait les ſaiſir. Les paſſions humaines ne s'éteignent jamais; & elles ont preſque toujours le même cours, produiſent les mêmes effets, amenent les mêmes révolutions. L'hiſtoire des ſiecles paſſés eſt l'hiſtoire du ſiecle préſent; & le tableau du ſiecle préſent peut être enviſagé comme la peinture exacte & fidele des temps poſtérieurs. Les intérêts varient. Le cœur humain ne change jamais. Les circonſtances ſeules le modifient.

Faut-il, dans les armées, exciter l'ardeur des troupes pour le combat, réveiller leur amour, échauffer leur zele pour la défenſe de la cauſe commune ou de la patrie, les pénétrer de haine & de vengeance contre ſes ennemis, les enflammer de cette noble émulation pour la gloire, qui fait ſupporter conſtamment les fatigues, la faim & la ſoif, affronter audacieuſement les haſards, braver la mort même? faut-il relever leur courage, ranimer leurs eſpérances, raſſurer leurs eſprits chancelans? faut-il les affermir dans la réſolution de vaincre ou de mourir?

Le grand Capitaine, s'il eſt auſſi bon orateur qu'habile politique, connoit d'abord bien les eſprits qu'il a à conduire. Il ſonde leurs penchans & leurs diſpoſitions. Il approfondit leur caractere. Il porte des regards attentifs ſur les ennemis qu'il a à combattre. Il calcule leurs forces & leurs reſſources; & il les compare avec les ſiennes propres. Il peſe dans la même balance les motifs qu'ils ont reſpectivement de bien faire, les avantages & les déſavantages de leur poſition; & réuniſſant enſuite toutes ſes facultés comme en un point, il préſente ſous les couleurs les plus fortes & les plus vives tout ce qui eſt capable de remuer le cœur, d'élever l'ame, d'inſpirer ces grandes idées, ces ſentimens déſintéreſſés & patriotiques, qui pouſſent, qui entraînent irréſiſtiblement aux belles actions, qui transforment les plus lâches même en héros.

Je sais, qu'il n'est presque plus d'usage de haranguer les armées avant une action. Mais je sais aussi, qu'il n'importe pas moins à nos Généraux d'à présent qu'à ceux de l'Antiquité, de se mettre en état de le faire avec succès.

Le discours sera toujours adapté aux conjonctures. Si elles sont pressantes, il ne sera question que de lancer quelques traits brûlans dans les ames. Si le héros qui commande a tout le loisir nécessaire pour préparer les esprits & les cœurs; & si l'action prochaine doit être décisive: son éloquence s'ouvrira alors un plus vaste champ, & se déployera dans toute sa force.

Les historiens, surtout ceux de l'Antiquité, sont remplis de discours excellens; & soit que les Généraux à qui ils les prêtent les ayent effectivement prononcés, soit que ces discours n'ayent été imaginés que pour mieux peindre les mœurs des héros ou pour répandre plus de variété dans l'exposition des événemens, on ne peut les lire sans émotion. Que de politique, quelle connoissance profonde du cœur humain dans les harangues inimitables de César, de Tite-Live, de Salluste, de Tacite & de Quinte-Curce! & qui ne convient pas, en les lisant, qu'un grand Capitaine s'élévera toujours à la plus sublime éloquence, quand, avec l'heureux don de la parole, il saura tirer avantage des circonstances & de la disposition de ses troupes?

Rien n'est plus propre à élever l'ame que le haut rang & les fonctions importantes d'un Général, dans les mains de qui sont déposées les espérances de la patrie, qui est envoyé pour venger les droits & la gloire du Souverain, qui marche à la tête d'une nombreuse armée dont tous les yeux sont tournés vers lui, qui d'un seul signal fait remuer ce vaste corps dont il est l'ame, & met en mouvement cent mille bras. Les grandes idées ne sauroient lui manquer; & peu d'orateurs sont plus à portée de briller par le talent de la parole.

De là vient que nous ne lisons peut-être rien de si noble & de si éloquent, dans nos poëmes épiques même, quoique tout entiers consacrés au merveilleux, que les harangues que les poëtes y mettent de temps en temps dans la bouche de leurs héros. Qu'on ouvre Homere, Virgile, Lucain:

on trouvera partout chez eux des morceaux de la plus sublime beauté. L'esprit, l'imagination, le cœur, toute la capacité de l'ame est remplie par la grandeur des intérêts, par la vivacité des tableaux, & par la pompe harmonieuse du style.

Quel orateur est par exemple supérieur à Ulysse dans le poëte grec? Semblable à un torrent qui tombe avec impétuosité du haut d'un rocher, il entraîne tous les esprits par la force de son éloquence. Quelle chaleur dans le discours d'*Agamemnon*, lorsque, parcourant les rangs, il exhorte les héros au combat! Son élocution tient de la vigueur de son ame. Ce sont, non des étincelles, mais des traits d'un feu continu. *Nestor* se leve-t-il pour parler dans l'assemblée? Son éloquence est un fleuve de miel qui coule avec une douceur insinuante, dont l'effet est de chatouiller l'oreille, de flatter l'imagination, & de charmer les sens. On entend un vieux favori de Mars, que la vue des camps & des combats réjouit. Il parle de ce qu'il a vu, de ce qu'il a fait, des héros dont il a été le compagnon. Ses cheveux blanchis sous le casque l'autorisent à faire des leçons à *Achille* même, à *Agamemnon*, & à donner sa vie pour exemple.

L'éloquence du barreau a rarement de si grands objets à offrir. Elle est renfermée dans le cercle étroit des événemens civils; & comme dans la plûpart des États les citoyens ne sont presque jamais que de petits particuliers, dont les actions, bonnes ou mauvaises, intéressent peu la société générale, il n'est pas étonnant que les orateurs s'y distinguent moins parmi nous que chez les anciens. D'ailleurs, notre maniere de procéder & la forme de nos jugemens sont toutes différentes de celles des Grecs & des Romains; en sorte que des discours, qui auroient produit le plus grand effet chez ceux-ci, seroient entierement déplacés dans notre barreau. Ici, nul appareil n'accompagne les causes publiques. Or, le *genre sublime*, comme l'observe très bien Mr. de Voltaire, (Encycl. art. Éloq.) *ne peut regarder que de puissans intérêts, traités dans une grande assemblée.*

Cependant les sujets qui se présentent à nos avocats ne sont pas tous également stériles. Il en est quelquefois qui sont véritablement dignes de la

plus ſublime éloquence, & qui immortaliſent ceux qui les traitent avec la dignité convenable. *Combien de cauſes célebres renfermées dans le cercle étroit d'un petit nombre d'années!* diſoit autrefois (en 1699) M. d'Agueſſeau dans le premier Sénat de la France. *La poéſie a-t-elle jamais rien haſardé de plus étonnant ſur la ſcene, que les révolutions imprévues, les évènemens incroyables qui ont excité depuis deux ans l'attention & la curioſité du public? La fable la plus audacieuſe n'auroit jamais eu la hardieſſe d'inventer ce que la ſimple vérité nous a fait voir; & le vrai a été beaucoup au delà du vraiſemblable.*

On pourroit dire la même choſe de notre tems; & je ne penſe pas que les circonſtances ſoient plus ingrates. Mais, pour goûter encore la douce ſatisfaction d'être la lumiere des aveugles, la conſolation des malheureux, l'oracle de tous les citoyens: que nos orateurs apprennent à concilier ſagement les loix, les mœurs, les coutumes de leur nation; &, qu'afin de démêler avec ſagacité les trames de l'injuſtice & du crime, & de juger ſainement des vrais principes de nos actions, ils s'appliquent à connoître, à poſſéder l'homme tout entier par l'étude continuelle de la plus pure morale; que ſe pénétrant bien de l'importance, de la nobleſſe, & de l'indépendance de leur état, ils dégagent leur ame de tout vil intérêt, de toute conſidération politique, & n'ayent jamais devant les yeux que ce qu'ils doivent à la juſtice, à leurs parties & à eux-mêmes: qu'enfin, après avoir profondément médité les anciens; & avoir emprunté des *philoſophes*, la ſolidité des penſées & la juſteſſe des raiſonnemens; des hiſtoriens, l'ordre, la variété, l'abondance; des poëtes, la nobleſſe de l'invention, la vivacité des images, la hardieſſe des expreſſions, & ce nombre caché, cette ſecrette harmonie qui répand dans la proſe même toute la douceur & toutes les graces de la poéſie; & des orateurs, la ſimplicité ou l'élévation, l'inſinuation ou la force ſelon le ſujet & les évenemens, ils joignent tous les ornemens de l'art à la clarté & à la pureté du diſcours.

Les Péliſſon, les Patru, les le Maître, les Evrard, les Terraſſon, les Cochin & les d'Agueſſeau, dont les Ouvrages ſe font lire avec tant d'intérêt, ſuffiroient ſeuls pour nous convaincre, que notre Barreau n'eſt pas entie-

rement dépourvû de sujets capables de faire briller le talent. Ces hommes célebres ont eu des successeurs; & ils en auront toujours vraisemblablement, tant que notre constitution politique ne replongera point les esprits dans la barbarie.

Mais le véritable triomphe de l'éloquence est dans la religion révélée; & la chaire évangélique est sans contestation son plus beau théatre, si je puis me servir ici de cette expression. C'est là que l'orateur peut étaler son talent dans toute son étendue & dans toute sa force; que son imagination peut s'élever à tout ce que l'esprit humain est capable de concevoir de plus grand, de plus relevé, de plus majestueux & de plus sublime. C'est là qu'il lui est permis d'offrir les images les plus frappantes, les objets les plus intéressans, les vérités les plus consolantes & les plus terribles. C'est là que, parlant au nom de Dieu même dont il est le ministre & l'ambassadeur, il lui est ordonné de foudroyer le vice, d'attacher les hommes à la vertu, d'abattre notre orgueil, de confondre notre raison, toujours vaine & présomptueuse, & de la soumettre au joug de la foi.

Quels sujets importans ne puise-t-il pas dans les livres sacrés qui sont le dépot de cette religion respectable?

Nous parle-t-il des merveilles de la toute-puissance & de la sagesse infinie d'un Dieu créateur? Ce ne sont point des événemens temporels, souvent pleins d'incertitude & de contrariétés, qu'il expose à nos yeux; mais des faits surnaturels, opérés par le seul acte de la bonté de l'Être souverain, à qui tout est soumis, qui regle & conduit tout, qui veille & préside à tout, qui dispose & décide à son gré & suivant les loix de sa providence du sort des peuples & des empires.

Nous enseigne-t-il ces vérités utiles, ces principes de mœurs & de conduite, qui sont la base du Christianisme? il nous montre une perfection que la philosophie humaine n'a jamais pû atteindre; & il nous embrase de la plus vive ardeur d'arriver à cette perfection, si digne de l'homme, & dont le terme est un bonheur sans fin. L'Évangile lui fournit ses grandes

maximes.

maximes. Les écrits des Apôtres l'éclairent sur l'application qu'il en fait à nos mœurs & à nos actions. L'histoire sacrée lui présente les faits, les exemples & les modeles qu'il nous propose; & les cantiques des Prophetes lui inspirent, lui donnent avec profusion, ces expressions fortes & énergiques qui réveillent, frappent l'esprit, & qui le tiennent toujours en action; ces images sublimes qui transportent l'imagination, & qui la ravissent; cette onction douce, & ce pathétique victorieux, qui soumet les ames les plus rebelles, qui ramenent les cœurs les plus obstinés.

Nous annonce-t-il ces dogmes sacrés, qu'il a plû à la sagesse divine de nous cacher sous des voiles impénétrables? Non seulement il nous apprend à adorer la profondeur des secrets de cet Être suprême, & à nous taire, en nous humiliant: mais il emprunte de notre foible raison elle-même des armes pour la combattre. La révélation, la tradition, l'autorité des peres & des conciles, sont tour à tour les garans de ses décisions: & c'est par elles qu'il terrasse l'homme orgueilleux, qui ose rejetter ce qu'il ne peut comprendre, & mesurer à sa petitesse la grandeur des richesses de l'Être infini, de l'Être par essence, & principe unique de tous les êtres.

Célebre-t-il un héros Chrétien recommandable par ses talens & ses connoissances, par ses vertus morales & politiques, par ses services envers la patrie, & surtout par sa piété? il le prend pour ainsi dire au berceau, & le suit pas à pas dans tous les détails de sa vie & de sa conduite; & sans nous déguiser ses foiblesses, triste & malheureux appanage de l'humanité, il nous peint fortement & sous les couleurs les plus vives, celles de ses actions qui méritent de nous être présentées comme les modeles des nôtres, & qui sont dignes d'être transmises à la postérité. Ainsi, en s'occupant du soin de faire honneur à son héros, il ne perd jamais de vue notre instruction; & tandis que son éloquence répand, avec profusion, les fleurs sur sa tombe, sa piété nous parle un langage, aussi noble que pathétique.

Il n'est pas de matieres plus propres à l'éloquence que celles que la religion nous fournit; & cependant, dit Mr. de Voltaire (Dict. Encycl. art. Éloq.) *quoique nos Sermons roulent sur l'objet le plus important de l'homme,*

il s'y trouve peu de ces morceaux frappans qui, comme les beaux endroits de Cicéron & de Démosthene, sont devenus les modeles de toutes les nations occidentales. Oserai-je en dire la cause? C'est que la plûpart de nos prédicateurs se pénetrent peu des vérités qu'ils enseignent; qu'ils s'intéressent peu au succès de leur ministere; que, semblables à des acteurs de théâtre, ils se contentent de jouer un rôle; que la conviction intérieure, le sentiment anime rarement leurs discours; que souvent leur conduite est en contradiction avec leurs principes.

L'éloquence académique, embrassant tous les objets qui tiennent aux arts & aux sciences, n'a pû manquer de produire des chefs-d'œuvre dans tous les genres. Les hommes les plus distingués par l'érudition & le goût composent aujourd'hui les sociétés littéraires de l'Europe: & comment ne sortiroit-il pas de ces corps respectables une foule d'ouvrages, aussi lumineux qu'éloquens?

Mais qu'il me soit permis d'observer, que, si l'éloquence n'est pas peut-être encore aussi florissante dans nos Académies qu'elle pourroit l'être, c'est aux loix, qu'elles se sont généralement imposées à elles mêmes, qu'il faut s'en prendre. Celle-ci se restreint aux productions purement utiles & scientifiques; & elle exclud comme frivoles & inutiles toutes celles qui appartiennent au genre oratoire; comme si l'éloquence ne pouvoit réunir dans le même discours la solidité, l'utilité, la vérité, l'érudition même, & la beauté, l'agrément, la noblesse, la chaleur, l'énergie, la force & les graces. Celle-là soumet son récipiendaire à des formules de complimens, mille fois rebattus; où, comme dans un champ moissonné, les derniers ne trouvent plus qu'à glaner; où, pour ne pas se traîner servilement sur les traces de ses prédécesseurs, on est forcé en quelque sorte de substituer le ton précieux, l'enflure, l'entortillage, au simple, au naturel, au vrai; où, dépouillé de la liberté de suivre son propre génie, il faut se borner à couvrir de fleurs la futilité de la matiere. Cette autre exige de tous ceux qui prétendent à ses couronnes, à la palme de l'éloquence, qu'ils concluent leurs pieces par une invocation mystique, adressée au Patron, sous les auspi-

ces duquel elle s'est formée; confondant ainsi fort souvent dans le même sujet le sacré avec le prophane, & composant un tout monstrueux de diverses parties, aussi bizarrement choisies que ridiculement assemblées. Cette autre ne se contente pas de fixer les points à traiter: mais elle prescrit encore à l'orateur les limites étroites dans lesquelles il doit se renfermer; semblable à un avare, qui demanderoit à son architecte un édifice somptueux, & qui borneroit néanmoins sa dépense à la somme la plus modique. D'autres font un devoir à leurs Sécretaires de faire l'apothéose de chacun de leurs membres indistinctement, de ceux qui n'ont eu l'honneur de leur être aggrégés qu'à la faveur de l'intrigue, de la protection ou de leur naissance, comme de ceux que leur mérite personnel & leurs travaux littéraires ont seuls appellés dans leur sein; de ceux qui n'ont jamais produit aux yeux de leurs confreres que leur inutilité ou leur petitesse, comme de ceux qui les ont honorés par leurs productions, qui ont étendu les limites des arts & des sciences, qui ont fait des découvertes importantes pour l'humanité, ou qui ont porté à leur perfection celles qui existoient avant eux. Si du moins, dans ces occasions, l'orateur pouvoit donner carriere à ses pensées, & juger rigoureusement celui qui n'est plus! mais des considérations politiques, & peut-être encore des ménagemens malentendus pour la Compagnie elle-même, ne lui permettent presque jamais que le choix des éloges. Ainsi ces sortes de panégyriques funebres ne sont pour la plûpart, malgré les talens & les efforts de ceux qui les font, que des productions insipides, aussi obscures que la vie de ceux qui en sont les objets.

Où le fond manque, l'orateur ne peut qu'échouer. Où le sujet est grand, important par lui-même, le génie devient fertile; & ses productions sont intéressantes. C'est une vérité que l'expérience démontre & qui n'exige pas d'autres preuves.

Mais ce n'est pas assés que de bien choisir sa matiere, de la concevoir dans toute son étendue, & de saisir parfaitement tout ce qu'elle offre d'intéressant à peindre. Il faut encore que de la disposition méthodique des parties résulte l'effet que l'on veut produire, & qui est le but ou

l'objet du discours. Il faut que ces différentes parties se rapportent toutes à ce but unique, & qu'elles s'accordent toujours entr'elles. Il faut qu'elles soient dans une proportion exacte les unes par rapport aux autres. Il faut qu'elles soient variées, & cependant simples & distinctes autant que justes.

L'éloquence suit à cet égard les mêmes regles que l'Architecture, & que nous trace la Nature elle-même dans l'arrangement des parties qui composent le corps humain, dont les divers membres forment un tout parfait, auquel rien ne manque, qui n'a rien d'étranger ni de superflu, où tout est juste, exact & proportionné, où tout a sa place fixe & marquée, où rien n'embarrasse.

Ainsi tout discours oratoire, comme tout autre ouvrage de goût, pour satisfaire pleinement dans l'ensemble, réunira la justesse, la netteté, la simplicité, la fécondité, l'unité & la proportion.

Ce qui n'est pas juste déplaît aux bons esprits. Ce qui n'est pas net jette dans la confusion & l'obscurité. Ce qui n'est pas simple fatigue & lasse l'attention. Ce qui n'est pas fécond ne produit que des idées vagues ou étrangeres. Ce qui n'est pas un & proportionné blesse les loix du goût, s'écarte de la nature, & ne peut offrir que des especes de monstres, aussi désagréables que révoltans. Mais l'orateur qui, dans son oraison, réunit toutes ces qualités, est sûr d'obtenir tous les suffrages & de s'emparer de tous les esprits.

Le sujet choisi, & les différens objets qui tiennent de près ou de loin à ce sujet enchaînés & disposés dans le corps du discours, de maniere que rien n'y choque, que tout y intéresse: c'est sur la nature, la forme & l'ordre des preuves qu'il doit fixer toute son attention: car il faut qu'il s'attache aussi à convaincre. Que lui serviroit-il d'offrir de grandes vérités, s'il ignoroit l'art de les insinuer dans l'esprit de ceux qui l'écoutent; de s'être ouvert la carriere la plus brillante, s'il s'égaroit en la parcourant, ou s'il faisoit autant de chûtes que de pas inutiles, en s'avançant vers le but qu'il s'efforce d'atteindre.

Les preuves qu'on peut employer à la conviction ne ſont pas toutes d'un poids égal. L'orateur doit ſavoir démêler les fortes d'avec les foibles, celles qui ſont inconteſtables d'avec celles qui ne ſont établies que ſur des probabilités & des vraiſemblances, celles qui ſont fondées ſur l'évidence même d'avec celles qui ont beſoin d'être démontrées.

Les circonſtances ſont-elles preſſantes? il ne fera uſage que de celles qu'il ſuffit de préſenter avec force, avec énergie, pour opérer la conviction. L'occaſion au contraire lui permet-elle les détails? & le nombre peut-il influer ſur le ſuccès de ſon action? Il ſe ſervira de toutes ſes reſſources & les fera ſucceſſivement concourir à ſon but.

Tel un habile Général n'emploie pour un coup de main déciſif & qui exige de la promptitude, que l'élite de ſes meilleurs ſoldats: mais partout ailleurs il déploie adroitement tout ce qu'il a de forces ſelon les lieux, les temps & les conjonctures.

La juſteſſe de cette comparaiſon eſt ſenſible; & les maîtres de l'art s'en ſervent ſouvent. Rien en effet ne convient d'avantage à l'ordre des preuves qui entrent dans un diſcours, où il s'agit eſſentiellement de convaincre ſes auditeurs, que la diſpoſition la plus ordinaire des différens corps militaires dans une armée qui marche au combat.

On voit au premier rang, les troupes les plus vigoureuſes & les plus braves, celles qui joignent à plus d'expérience des ſentimens d'honneur plus inaltérables, celles dont le nom ſeul fait voler la terreur & l'effroi au devant de leurs pas. Il importe que le premier choc ſoit heureux. C'eſt ce qui aſſure preſque toujours le gain des batailles. D'autres troupes d'élite ſont réſervées pour porter le dernier coup à l'ennemi; & dans le milieu ſont placés les ſoldats d'une bravoure équivoque, & d'une capacité ou moins étendue ou moins éprouvée, ceux qu'il faut ſoutenir, entraîner, pouſſer au combat, & forcer par leur poſition même à vaincre ou à mourir.

C'eſt ainſi qu'on diſpoſe les preuves en éloquence. Celles qui peuvent faire le plus d'impreſſion ſont ordinairement placées au commence-

ment & à la fin du diſcours; & les plus foibles ſont confondues dans la foule.

Mais chaque ſujet a ſes regles propres, comme il eſt pour chaque terrein des meſures particulieres à prendre. C'eſt à la prudence & à l'habileté du Général de diſpoſer ſes troupes ſuivant ſa poſition & les événemens. C'eſt au génie de l'orateur de diſtinguer ce que demande ſon objet & ce qu'il rejette, de connoître ſes loix & de les ſuivre, de ſaiſir finement & avec juſteſſe ce qui peut contribuer à la conviction de ceux qu'il veut gagner & ce qui peut produire chez eux un effet contraire.

En général, la netteté & la préciſion ſont les deux qualités qu'on ne ſauroit trop recommander à quiconque s'attache à convaincre. Une preuve trop étalée manqueroit de vigueur & de nerf. Celle qui ſeroit trop ſerrée n'auroit pas de maſſe, de portée. La perfection n'eſt que dans le milieu de ces deux excès.

Il faut plus d'art encore dans la réfutation que dans la preuve même, dont elle fait partie: car, dans le diſcours, il ne s'agit pas moins de renverſer l'édifice d'autrui, que d'élever le ſien propre ſur ſes ruines.

Tout ſujet eſt ſuſceptible de difficultés, grandes ou petites. Toute propoſition peut être enviſagée ſous des points de vue contraires. Toute cauſe eſt, ſelon la maniere de voir, de ſentir, & les degrés de connoiſſances & de lumieres de chaque individu, juſte ou injuſte, bonne ou mauvaiſe, évidente ou obſcure & douteuſe; & ce que l'un condamne, l'autre l'approuve.

L'orateur doit donc approfondir ſoigneuſement les objections qu'on fait ou qu'on peut faire contre ce qu'il avance & qui eſt l'objet de ſa preuve.

Ces objections demandent-elles une réfutation en regle? Il la fait par des raiſons, des argumens ſolides, qu'il puiſe dans la nature de la choſe, des circonſtances, & qu'il oppoſe à celles de ſon adverſaire. Il le terraſſe, s'il le peut, d'un ſeul coup; ou il repouſſe ſucceſſivement ſes aſſauts. Ces objections ſont-elles trop fortes? il tâche de les éluder,

feint de n'y pas faire attention ou promet d'y répondre, & paye, en attendant, de plaisanteries & de bons mots. Tous ses efforts tendent à écarter l'orage qu'on lui prépare, à diminuer la chaleur qu'on a excitée contre lui, à affoiblir le coup qu'on lui a porté. Ces objections ne sont-elles dignes que de mépris? il se contente de couvrir de ridicule ceux qui les font.

Mais ici, comme partout ailleurs, l'orateur doit bien prendre garde de faire naître des idées défavorables sur ses mœurs, sa probité, sa conduite, sa délicatesse. Une parole peu réfléchie peut tout gâter, & détruire l'impression qu'on a faite ou que l'on veut faire.

C'est par l'étude approfondie de son sujet que l'orateur trouve les argumens nécessaires pour produire la conviction, & pour porter la lumiere dans les esprits. Mais il n'appartient qu'au goût de le conduire surement dans sa marche.

Sa dialectique n'est point celle du Philosophe. Celle-ci est seche, stérile. Elle se borne à lier à ses principes les conséquences qui en découlent. Ses propositions sont toujours énoncées simplement; &, pourvû qu'elles soient convainquantes, peu lui importe qu'elles se présentent à l'esprit sans parure. Elle va droit au but. Elle compare une vérité avec une autre; & elle en conclud une troisieme qui est son objet.

La dialectique de l'orateur au contraire est également ornée & féconde. Elle envisage de loin le terme qu'elle se propose d'atteindre. Mais en s'efforçant d'y arriver le plus promptement qu'elle peut, elle a soin de déguiser sa marche; & c'est à travers les fleurs qu'elle porte ses pas. Elle choisit celles de ces fleurs qui conviennent à sa parure, s'embellit avec art, ménage ses forces dans ses progrès. Elle frappe enfin d'autant plus, au moment qu'elle porte le dernier coup & qu'elle triomphe, qu'on s'est moins préparé contre ses efforts, & qu'on est plus épris de ses charmes.

Le simple Logicien tombe sur son adversaire, la main fermée. L'orateur ne s'avance vers lui que la main ouverte: mais cette main étale à ses yeux des fleurs si séduisantes, qu'il n'a ni la force de combattre ni le courage de résister. C'est en deux mots toute la différence de l'argu-

ment philoſophique & de l'argument oratoire. Celui-ci eſt toujours embelli de tous les charmes de l'élocution.

Le génie fournit les penſées à l'orateur. Le jugement & le goût lui font diſcerner les parures dont ſes penſées doivent être revêtues, & la maniere de les en revêtir afin qu'elles produiſent tout leur effet. Si quelquefois une ſecrete complaiſance l'invite à une profuſion déplacée, c'eſt eux qui le retiennent, & qui ne lui permettent d'adopter que ce qui peut prendre la teinte du ſujet même & faire un même corps avec lui.

La premiere qualité du diſcours, c'eſt la correction. On doit avant tout reſpecter ſa langue. Un auteur qui n'eſt pas correct offrira des choſes merveilleuſes à ſes lecteurs. Il ne ſera cependant jamais regardé que comme un écrivain médiocre, & déplaira toujours au grand nombre.

Il eſt quelquefois, je l'avoue, des licences heureuſes & que l'art autoriſe. Mais pour être ſupportables, il ne faut point qu'elles ſoient fréquentes; & jamais on ne doit ſe permettre d'être incorrect, que lorſque la correction nuiroit à la chaleur & à la vivacité du diſcours.

La clarté n'eſt pas moins eſſentielle au diſcours que la correction. C'eſt, pour ainſi dire, la loi fondamentale du langage. On ne parle que pour ſe faire entendre; & quiconque n'a pas le talent de s'énoncer de maniere à être entendu de la multitude même, n'a rien de mieux à faire que de ſe condamner au ſilence.

Ce qui fait naître l'obſcurité, ce ſont, en premier lieu, les conſtructions louches. Toute langue a ſon génie propre. Un écrivain ne peut s'en écarter, ſans égarer l'eſprit de ceux qui le liſent. Ce ſont, en ſecond lieu, les phraſes trop chargées d'idées acceſſoires à l'idée principale. On ne doit pas chercher à tout dire à la fois. Chaque choſe a ſon tour, ſon rang, ſa place marquée. Les gens vifs ou peu réfléchis, & ceux que les grandes paſſions agittent avec trop de vivacité, ſont ſujets à entaſſer idées ſur idées. Elles ſe préſentent en foule à leur imagination, qui ſe preſſe de les faire éclorre; & leur langage eſt néceſſairement obſcur,

& embarraſſé. Ce font, en troiſieme lieu, les tours épigrammatiques. L'envie de briller, d'éblouir, fait courir après les pointes. On craint de s'exprimer comme le vulgaire. On ſe fait un art de ne rien dire que d'ingénieux; & cet art puérile & mépriſable ôte l'ame & le nerf au diſcours, & le rend preſque toujours obſcur & fatiguant. C'étoit le défaut de Séneque & de Pline. C'eſt celui d'une foule de nos orateurs, beaux-eſprits. Mais peut-on appeller éloquence, celle qui ne convient point au grand nombre?

L'orateur réunira encore dans ſon ſtyle, la propriété des termes, la nobleſſe, l'harmonie & la facilité; & qui n'en ſent point la néceſſité?

Les mots ſont faits pour les idées; & chaque idée a ſon expreſſion analogue. C'eſt de ce principe que doit partir tout homme qui écrit ou qui parle. Lorſqu'il n'employera jamais que le terme propre: ſon ſtyle ſera au niveau de ſon ſujet; ſes penſées ſe feront entendre ſans difficultés, ſans obſtacle; on les ſuivra avec plaiſir; elles paſſeront dans l'ame des auditeurs avec les ſentimens dont elles ſeront la repréſentation ou l'image. S'il ſe ſert au contraire de termes impropres: ou l'on ne fera aucune attention à ſes diſcours, dans lesquels on verra toujours l'expreſſion à côté de l'idée; ou on l'écoutera avec le même dépit & le même genre de peine qu'on éprouve toutes les fois que, doué d'une oreille délicate, on eſt forcé d'entendre un chanteur, dont la voix eſt entre le faux & le juſte.

La nobleſſe, dans le ſtyle, eſt une qualité rélative, c'eſt à dire, qu'elle eſt ſubordonnée à l'objet qu'on peint & à la penſée qu'on exprime: il eſt abſurde de renfermer dans des expreſſions pompeuſes des idées triviales & populaires. C'eſt une affectation puérile d'employer des images majeſtueuſes & ſublimes pour des objets vils & communs. Ainſi les traits & les couleurs doivent être aſſortis à la nature même des choſes qu'on traite. Mais s'il eſt vrai que l'orateur doit écarter ſoigneuſement de ſon diſcours, tout ſujet bas & rampant, & toute idée qui ne préſente rien de grand ni de gracieux à l'eſprit, il ſuit que la nobleſſe doit être comptée parmi les qualités eſſentielles de l'éloquence.

Cependant comme les mœurs & les opinions des différens peuples ne se ressemblent pas à beaucoup près, & que ce qui est bas chez les uns ne l'est pas toujours également chez les autres, on pourroit, ce me semble, se prêter jusqu'à un certain point au goût particulier de la nation pour laquelle on travaille.

L'harmonie est peut-être moins arbitraire & moins dépendante de l'opinion. Toujours les hommes ont été sensibles à ce qui en porte le caractere; & souvent des discours, qui n'ont eu pour tout mérite que d'être harmonieux, soit par le son que produit la qualité des mots, soit par le nombre qui résulte de leur arrangement, ont excité les applaudissemens de toute une grande assemblée, & se sont même maintenus longtemps en possession de l'estime & de l'admiration qu'ils avoient en quelque sorte usurpées.

Isocrate introduisit le premier chez les Grecs cette grace du nombre & de la cadence. Cicéron rendit le même service à sa langue; & nous avons nous-mêmes à Balzac l'obligation d'avoir prescrit des bornes à la période, & de lui avoir donné ce tour plein & nombreux auquel un goût naturel nous rend si sensibles.

Avant ce dernier, on soupçonnoit à peine que la langue françoise fût susceptible d'harmonie. Mais son style enchanteur détrompa bientôt les esprits; & le succès qu'il fit avoir à ses productions, d'ailleurs fort médiocres, fit sentir à nos écrivains combien ils avoient eu tort jusques-là de négliger une partie aussi importante, sans laquelle l'oreille, ce *juge fier & dédaigneux*, comme l'appelle Cicéron, fait souvent rejetter à l'esprit les meilleures choses.

On commença donc à consulter l'oreille; & l'on s'efforça d'éviter tout ce qui pouvoit offenser sa délicatesse. On apprit à arranger les mots, d'après l'effet qu'ils avoient fait sur elle. La marche de la phrase devint plus libre, plus coulante, plus dégagée. Le nombre fut plus soutenu dans la période, dont la chûte ne fut ni assez prompte pour paroître défectueuse, ni assez traînante pour donner le temps à l'esprit de s'impatienter, de s'endormir ou de se distraire. Le discours, tantôt s'avança avec une gravité majestueuse, tantôt imita la rapidité & les sifflemens des vents orageux, tantôt coula

comme des ruiſſeaux de miel avec une douceur inſinuante; toujours enfin, plein de force, de feu & de graces, il mit lès objets ſous les yeux, & marqua autant par le ſon que par l'arrangement des mots la nature des choſes qu'il eut à décrire.

Mais l'orateur, en faiſant de l'harmonie un des principaux objets de ſon attention & de ſes ſoins, doit bien prendre garde de tomber dans l'affectation & dans la contrainte. Rien n'eſt plus ennemi des beautés en tout genre. Le diſcours ne plait, qu'autant qu'il a cet air aiſé & facile, qui n'annonce point le travail, & qui empêche de le ſentir. Un ouvrage ne vaut pour l'ordinaire qu'à proportion de ce qu'il a coûté. Mais il perd plus de la moitié de ſon prix, quand les efforts qu'a faits ſon auteur en le produiſant s'y laiſſent appercevoir. C'eſt à l'art de cacher l'art même; & la facilité, dans les vers comme dans la proſe, eſt un des plus grands charmes de l'éloquence.

Cependant ce qu'il y a de plus important dans l'art oratoire, ce ſont les paſſions, quoi qu'en diſent certains critiques; & ce n'eſt pas connoître le cœur humain & ſavoir comment il faut le conduire que de prétendre avec Ariſtote (Rhet. lib. 1. & 7.) qu'elles ne ſont qu'acceſſoires à l'éloquence, & que la partie eſſentielle de cet art conſiſte dans les preuves. Si les hommes étoient tels qu'ils devroient être; s'il ſuffiſoit de leur préſenter la vérité pour la leur faire embraſſer; ſi leur volonté s'accordoit toujours avec leurs lumieres; ſi les préjugés & les habitudes leur permettoient de ſuivre toujours conſtamment & d'un pas égal les ſentiers de l'honneur & de la vertu, il ſeroit inutile de recourir aux paſſions. Mais dans combien de cas ne faut-il pas combattre ſes juges, ſes auditeurs, faire uſage contr'eux de toutes ſes forces, contraindre leurs penchans, changer leurs diſpoſitions, les entraîner en dépit d'eux-mêmes? Il n'eſt pas, je le ſais, d'inſtrument plus dangereux que celui des paſſions, dans les mains du délire, du fanatiſme & de la fureur. Mais que cet inſtrument eſt utile! qu'il eſt efficace, quand c'eſt la raiſon elle même qui le manie, quand elle ne s'en ſert que pour le bien de l'humanité!

Quelques Auteurs modernes ont poussé l'austérité jusqu'à en proscrire entierement l'usage & à regarder comme quelque chose d'humiliant, qu'un homme, par ses paroles, par ses gestes, par le ton de sa voix, par ses cris, nous agite, nous trouble, nous égaye, nous attriste, nous arrache des larmes. Cet effet naturel de l'éloquence, loin d'avilir notre être, en démontre au contraire la perfection, qui consiste surtout dans notre sensibilité. La satisfaction de nous trouver sensibles est le plus délicat de tous les plaisirs. Heureux l'homme dont l'ame est également affectée de tout ce qui lui rappelle l'idée de son excellence, & de tout ce qui lui présente l'image terrible de sa bassesse & de son néant! Mais plus heureux encore l'artiste, qui connoit assez bien les grands ressorts du cœur humain pour y exciter à propos tous les mouvemens des diverses passions; qui, par la vivacité de ses peintures & la force de ses tableaux, ébranle, quand il veut, notre ame, & la gouverne toujours à son gré; qui nous fait passer tour à tour, selon les sujets & les circonstances, de la tristesse à la joie, de la pitié à la colere, de la haine à l'amour! C'est ainsi que Démosthene a régné dans l'Aréopage, Cicéron dans les Rostres, Bourdaloue & Massillon dans nos temples, & Cochin dans notre barreau.

Il est, selon Quintilien, deux sortes de passions que l'éloquence peut émouvoir: les unes plus fortes, plus véhémentes; les autres plus douces, plus tendres, plus insinuantes. Celles-là marquent plus d'agitation; celles-ci plus de tranquillité. Les premieres sont faites pour commander, les autres pour persuader; celles-là pour agiter & troubler les cœurs; celles-ci pour les adoucir & pour les gagner.

Mais comment exciter les grands mouvemens des passions? Il faut, ou les éprouver en soi-même, ou par l'effort de son imagination se représenter si vivement ce qu'on se propose de peindre & d'exprimer, qu'on paroisse réellement affecté de la même maniere qu'on veut affecter les autres.

Le sentiment est le premier ressort par lequel on met notre ame en mouvement. Il produit presque toujours son effet. Tous les Rhéteurs s'accordent sur ce principe. Si vous voulez que je pleure, dit Horace,

commencez par pleurer vous-même. C'eſt alors que le récit de vos infortunes m'attendrira. *Si vis me flere, dolendum eſt primùm ipſi tibi. Tunc tua me infortunia lædent.* C'eſt le cœur, c'eſt l'ame ſeule qui nous rend éloquens, dit encore Quintilien: *pectus eſt quod diſertos facit & vis mentis.*

Mais, quoique le ſentiment ſoit de tous les reſſorts qui remuent notre ame le plus puiſſant & le plus efficace, il n'en eſt pas moins rare que ce ſoit lui qui anime l'artiſte. Où ſont les orateurs qui ne parlent que d'après ce qu'ils ſentent, d'après ce qui ſe paſſe au fond de leurs cœurs? Nos prédicateurs, ſont-ils toujours bien pénétrés des vérités qu'ils nous annoncent? nos avocats, ne défendent-ils jamais leurs cliens que par zele pour la justice & les loix de la patrie, par amour pour l'humanité? En examinant de bien près tous ceux qui font profeſſion de l'éloquence, on verroit que chez eux ce n'eſt guere que l'imagination qui joue le rôle du ſentiment & qui tient ſa place. Elle y ſupplée néanmoins quelquefois avec une ſorte d'avantage; & ſi l'action du ſentiment eſt toujours plus durable, celle de l'imagination eſt ſouvent plus impétueuſe, plus violente. Par elle, l'ame enflammée comme d'un feu divin, ſe repréſente vivement les objets, & répand ſur eux ces traits brûlans & victorieux, qui nous terraſſent, qui nous raviſſent. Ainſi l'acteur tragique ſe peint ſi fortement l'affreuſe ſituation d'un héros opprimé par le ſort, qu'il ſe transforme pour ainſi dire tout entier dans ſon caractere, & qu'il fait trembler & frémir les ſpectateurs au récit animé des malheurs qu'il n'a pas reſſentis.

Le talent d'employer à propos les divers mouvemens des paſſions n'eſt donc que celui de ſe pénétrer des affections que l'on exprime & de s'abandonner entiérement à la nature. Alors le ſtyle s'échauffe; & les figures, qui ſont ſi froides & ſi puériles quand c'eſt l'eſprit ſeul qui les appelle, ſe préſentent naturellement & avec toute la chaleur de la paſſion qui les fait naître. Les idées s'échappent comme des traits de lumiere; & les ſentimens, qui ſe preſſent dans l'ame & qui l'agitent avec violence, s'efforcent de ſe répandre au dehors & de paſſer dans l'ame d'autrui.

Mais l'illuſion doit être ſi naturelle que tout paroiſſe couler de ſource & ſans aucun art. Ce qui a l'air d'être préparé ne perſuade & ne touche jamais. Il faut que l'orateur faſſe oublier, que ſon rôle eſt appris. Il faut, que la nature ſeule ſe montre dans toute ſon expreſſion. Il faut, que la tournure du diſcours, le ton de la voix, les geſtes, toutes les attitudes concourent à l'effet que l'on veut produire. Souvent un regard, l'air du viſage, le ſilence, un rien ſuffit pour émouvoir.

Mais ſi l'orateur néglige de s'obſerver avant tout lui-même & ceux qui l'écoutent, & de régler ſon langage ſur leurs rapports reſpectifs, en vain il aſpire à la gloire de l'éloquence. Les bienſéances, ou ce qui convient & ne convient pas, *quid deceat quid non:* voilà ce qu'il doit obſerver ſans ceſſe, & ſans quoi, quelques efforts qu'il faſſe, il ne ſauroit jamais triompher.

La premiere des bienſéances eſt celle qui tient aux mœurs même de l'orateur. Il n'en eſt pas qui influe davantage ſur la perſuaſion. Que tout en lui reſpire la modeſtie, la probité, la bienveillance & la ſageſſe: dès l'abord, on ſe préviendra en ſa faveur; on lui accordera ſa confiance; on l'aimera comme ſon ami; on l'écoutera comme ſon oracle; on le ſuivra aveuglément & ſans inquiétude.

Tout homme, qui parle en public reſſemble à celui qui paroît aux yeux de ſon juge. La modeſtie eſt la qualité par laquelle il doit s'annoncer. On s'offenſe de l'orgueil de celui dont on eſt établi le cenſeur. On n'aime point à être gouverné par ceux qui ſentent trop leur ſupériorité & qui veulent trop la faire ſentir. On ſe révolte contre quiconque oſe fiérement entreprendre de renverſer toutes nos idées & de nous ramener à ſes ſentimens.

Combien ne lui ſeroit-on pas plus contraire, s'il manquoit de probité, ou ſeulement ſi ſa conduite étoit équivoque & ſuſpecte? On ſe rit d'un hypocrite, qui veut nous perſuader ce qu'il ne croit pas, & nous faire embraſſer ce qu'il ne met pas lui-même en pratique. On eſt indigné contre un fourbe, qui ne travaille à ſubjuguer notre intelligence & à fléchir notre volonté, que pour ſe jouer, après ſon triomphe, de notre crédulité & de notre foibleſſe. On ſe tient en garde contre ſes

séductions. On lui résiste, on le combat encore, lors-même que ses raisonnemens portent la conviction dans notre ame. Les payers eux-mêmes ont si bien senti la nécessité d'une vertu solide & éprouvée dans l'orateur, qu'ils l'ont défini, *vir bonus dicendi peritus;* & c'étoit ainsi qu'en parloit Caton.

La bienveillance ne lui est pas moins essentielle. Elle couvrira jusqu'à ses défauts. Elle donnera du poids à toutes ses paroles. Elle lui ouvrira, pour ainsi dire, la porte des cœurs. Pourroit-on ne pas s'abandonner sans réserve à ceux qui nous aiment avec désintéressement & pour nous-mêmes, qui ne nous parlent que pour nous communiquer leurs lumieres, qui ne cherchent à nous conduire que pour assurer nos pas dans la voie du bonheur ou la recherche de la vérité? Un penchant naturel nous entraîne vers eux. Nous sommes portés à croire leurs assertions. Nous les admettons presque sans examen; & nous sommes persuadés, avant même d'être convaincus. Ainsi Cicéron & Démosthene, regardés par leurs concitoyens comme les défenseurs de la cause commune & comme les peres de la patrie, parvinrent également, l'un à sauver la République Romaine des criminels attentats de Catilina & de ses complices, l'autre à renverser tant de fois de fond en comble les projets ambitieux de Philippe.

Ces deux orateurs, dont le nom semble être devenu celui de l'éloquence même, joignoient, aux sentimens patriotiques les mieux caractérisés, les lumieres les plus étendues sur les intérêts publics & les divers objets de leur profession. S'ils parloient en faveur de la liberté, c'étoit d'après la connoissance qu'ils avoient de l'efficacité des moyens qu'ils proposoient comme les plus propres à la défendre & à la maintenir. Est-il étonnant que leur éloquence fût victorieuse? D'où il résulte que la prudence sera toujours comme le complément des vertus & des mœurs de tous ceux, qui desirent de marcher sur leurs traces & qui prétendent aux mêmes succès.

Une séconde bienséance, qu'il n'importe pas moins de garder, est celle qui établit un rapport exact de convenance entre le discours, & les personnes, les temps & les lieux, qui détermine le rang & les places, qui met en quelque sorte le style & les choses à l'unisson. Il faut proportionner le ton au sujet & au genre. Il faut régler son action, son langage, sur son état, son ministere, ses talens, sa réputation. Il faut sans trahir la vérité, sans blesser la justice, sans violer les loix de l'honneur & de la vertu, consulter, pour chaque nation, ses mœurs, ses loix, ses usages; pour chaque individu, son génie & son caractere; pour chaque condition, son esprit & ses préjugés; pour chaque âge, ses goûts, ses penchans, son humeur. Il faut, en un mot, éviter dans son extérieur & dans ses discours tout ce qui peut déplaire à son auditoire, & l'éloiguer du but où l'on tend.

FIN.



TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE.

MDCCLXXII.

MÉMOIRES.

CLASSE DE PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALE.

CLASSE DE MATHÉMATIQUE.

CLASSE DE PHILOSOPHIE SPÉCULATIVE.

CLASSE DE BELLES-LETTRES.

Fautes à corriger.

MÉM. Page 80. ligne 15. *& de marquer*, lisez *& à marquer*.
— P. 86. l. 8. *par la laisser*, lis. *pour la laisser*.
— P. 111. l. 3. *je commencerai à supposer*, lis. *par supposer*.
— P. 148. l. 12. *doit servir*, lis. *doivent servir*.
— P. 397. l. 9. d'en bas, *développé*, lis. *développés*.
— P. 436. l. 5. d'en bas, *dabuntur*, lis. *dabantur*.
— P. 515. l. 10. d'en bas, *d'esprit*, lis. *l'esprit*.